Proyecto 2016 de Daniel Suárez

Propongo seguir estudiando problemas relacionados con operadores de Toeplitz sobre los espacios de Hardy H^2 y de Bergman A^2 del disco unidad $\mathbb{D}$. Ambos espacios H tienen núcleos reproductores, o sea funciones K_z (para $z \in \mathbb{D}$) tales que $\langle f, K_z\rangle = f(z)$ para toda $f \in H$, con lo que se puede definir la transformada de Berezin de un operador $Q \in \mathfrak{L}(H)$ como la función $B(Q)(z) := \|K_z\|^{-2}\langle QK_z, K_z\rangle$. Un extenso programa muy estudiado consiste en determinar propiedades de un operador Q en términos de $B(Q)$, lo cual ha sido particularmente exitoso para operadores Q asociados a operadores de Toeplitz.

Si $a \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ (resp.: $L^\infty(\mathbb{D})$), el operador de Toeplitz en H^2 (resp. en A^2) es $T_a f = P(af)$, donde P es la proyección ortogonal del respectivo L^2. O sea, es la compresión del operador de multiplicación por a en el L^2 correspondiente a su subespacio de funciones analíticas. El álgebra cerrada $\mathfrak{T}$ en $\mathfrak{L}(H)$ generada por operadores de Toeplitz se llama el álgebra de Toeplitz, para H el Hardy o el Bergman. En [3] se probó que un operador $Q \in \mathfrak{L}(A^2)$ es compacto si y sólo si

$$Q \in \mathfrak{T} \;\text{ y }\; \lim_{|z|\to 1} B(Q)(z) = 0.$$

Esta caracterización de compacidad no es válida para operadores en el espacio de Hardy. Sin embargo estamos trabajando con Brett Wick de Georgia Institute of Technology en tratar de probar que $Q \in \mathfrak{L}(H^2)$ es compacto si y sólo si

$$Q \in \mathfrak{T},\; \lim_{|z|\to 1} B(Q)(z) = 0 \;\text{ y }\; \lim_{|z|\to 1} \|Q - T^*_{\varphi_z} Q T_{\varphi_z}\| = 0,$$

donde $\varphi_z \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ es la involución que intercambia z con el origen. Es decir, aparece una condición extra, que en el caso del espacio de Bergman es redundante, pues se deduce de las anteriores, pero no así en el caso del Hardy. Tenemos varios motivos para creer en la validez de esta caracterización, pero el más notable es que el resultado fué probado por Guo y Zheng [2] cuando Q es una suma finita de productos finitos de operadores de Toeplitz,

$$Q = \sum_{j=1} \prod_{i=1} T_{a_{i,j}} \;\text{ con } a_{i,j} \in L^\infty(\partial\mathbb{D}).$$

Y si bien estos operadores son densos en $\mathfrak{T}$, la demostración de [2] usa fuertemente una acotación que depende de n, n_j y $\|a_{i,j}\|_\infty$ para $1 \le i \le n_j$, $1 \le j \le n$, de modo que no se conserva por paso al límite. Más aún, la desigualdad fundamental en [2] es de carácter no lineal, y sólo tiene sentido porque los parámetros anteriores son acotados. De modo que se requiere una demostración completamente distinta para obtener la caracterización deseada. Incluso si no resolvemos el problema completamente, cualquier progreso en este sentido será bienvenido.

Con respecto al espacio de Bergman A^2, en [4] se estudian un tipo de operadores introducidos por Englis en [1], que generalizan los operadores de Toeplitz. Allí se determina la relación de esos operadores con el Laplaciano invariante y las n-transformadas de Berezin, y se usan para obtener resultados de aproximación. Propongo seguir el estudio de esos operadores.

References

[1] M. Engliš, Toeplitz Operators and Group Representations. *Journal of Fourier Analysis and Applications 13*, no. 3 (2007), 243–265.

[2] K. Guo y D. Zheng, The distribution function inequality for a finite sum of finite products of Toeplitz operators. *J. Funct. Anal. 218*, no. 1 (2005), 1–53.

[3] D. Suárez, The essential norm of operators in the Toeplitz algebra on $A^p(\mathbb{B}_n)$. *Indiana Univ. Math. J. 56* (2007), no. 5, 2185–2232.

[4] D. Suárez, A generalization of Toeplitz operators on the Bergman space, *J. Op. Theory 73*, no. 2, pp 315–332 (2015).

Daniel Suárez
Departamento de Matemática
Facultad de Cs. Exactas y Naturales
UBA. Pab. I. Ciudad Universitaria
(1428) Núñez, Capital Federal
Argentina
dsuarez@dm.uba.ar

Bs. As. 28/10/15

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
EXPEDIENTE N° 505.580

Buenos Aires, 8 MAY 2017

VISTO que por Resolución CS N° 4100/16 se concedió, en concepto de "año sabático", licencia al Dr. Fernando Daniel SUÁREZ, entre el 1° de agosto de 2016 y hasta el 28 de febrero de 2017, en un cargo de Profesor Regular Asociado con dedicación exclusiva, del Departamento de Matemática de esta Facultad;

CONSIDERANDO:

El informe del semestre sabático presentado por el Dr. SUÁREZ.

La elevación del Departamento.

Lo establecido en los Art. 12° y 13° de la Resolución CS N° 4518/93.

Lo aconsejado por la Comisión de Enseñanza, Programas y Planes de Estudio.

Lo actuado por este Cuerpo en su sesión de la fecha.

Por ello, y en uso de las atribuciones que le confiere el Art. 113 del Estatuto Universitario,

EL CONSEJO DIRECTIVO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES,

R E S U E L VE:

ARTÍCULO 1°.- Aprobar el informe presentado por el Dr. Fernando Daniel SUÁREZ (Leg.75.899) quien revista en un cargo de Profesor Regular Asociado con dedicación exclusiva (SC.86) del Departamento de Matemática de esta Facultad, correspondiente a las actividades realizadas durante la licencia concedida en concepto de medio Año Sabático, en el período comprendido entre el 1° de agosto de 2016 hasta el 28 de febrero de 2017 (Fuente de Financiamiento 11-Tesoro Nacional-Inciso 1-Gastos en Personal, Principal 1-1, Personal Permanente).

ARTÍCULO 2°.- Regístrese, notifíquese al interesado y comuníquese al Departamento de Matemática y a la Dirección de Personal. Cumplido, archívese.

RESOLUCION CD N° 0907
vsa

Dra INÉS CAMILLONI
SECRETARIA ACADEMICA

Dr. JUAN CARLOS REBOREDA
DECANO