Journal of Algebra **232**, 564–577 (2000)
doi:10.1006/jabr.2000.8406, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl sous l'action d'un groupe fini[1]

J. Alev

Laboratoire de Mathématiques, UPRESA 6056 du CNRS, Université de Reims, 51100 Reims, France
E-mail: jacques.alev@univ-reims.fr

M. A. Farinati

Dto. de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Cdad. Univ., Pab I, 1428 Buenos Aires, Argentina
E-mail: mfarinat@dm.uba.ar

T. Lambre

Département de Mathématiques, UMR 8628 du CNRS, Université Paris Sud, 91405 Orsay Cedex, France
E-mail: thierry.lambre@math.u-psud.fr

and

A. L. Solotar

Dto. de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Cdad Univ., Pab I, 1428 Buenos Aires, Argentina
E-mail: asolotar@dm.uba.ar

Communicated by Michel Van den Bergh

Received March 9, 2000

Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ opérant par automorphismes dans l'algèbre de Weyl $A_n(\mathbf{C})$. Nous calculons les groupes d'homologie et de cohomologie de Hochschild de l'algèbre d'invariants $A_n(\mathbf{C})^G$.

Let G be a finite subgroup of $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ acting by automorphisms in the Weyl algebra $A_n(\mathbf{C})$. We compute the Hochschild homology and cohomology groups of the invariant algebra $A_n(\mathbf{C})^G$. © 2000 Academic Press

[1] Ce travail a été partiellement subventionné par le projet ECOS A98E05, le CONICET et la Fundación Antorchas.

0021-8693/00 $35.00

1. INTRODUCTION

Ce texte est consacré au calcul de l'homologie et de la cohomologie de Hochschild des invariants de l'algèbre de Weyl $A_n = A_n(\mathbf{C})$ sous l'action d'un sous-groupe fini G d'automorphismes contenu dans le groupe symplectique $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$. Nous montrons le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ opérant par automorphismes dans l'algèbre de Weyl A_n. On désigne par A_n^G la sous-algèbre des invariants de A_n sous l'action de G. Pour $j \in \mathbf{N}$, désignons par $a_j(G)$ le nombre de classes de conjugaison d'éléments de G ayant la valeur propre 1 avec la multiplicité j. Alors, pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a*

$$\dim_{\mathbf{C}} HH_j\left(A_n^G\right) = \dim_{\mathbf{C}} H^{2n-j}\left(A_n^G, A_n^G\right) = a_j(G).$$

La preuve s'organise ainsi. Une équivalence de Morita permet de réduire le calcul à celui de l'homologie du produit croisé $A_n * G$. Une suite spectrale *à la* Grothendieck converge vers l'homologie de ce produit croisé. Nous en calculons le terme E^2, ce qui nous permet de montrer que cette suite spectrale dégénère. Ce terme E^2 s'exprime en termes d'homologie de l'algèbre A_n à coefficients dans les bimodules $A_n g$ pour $g \in G$. La dualité entre les groupes d'homologie $H_j(A_n, A_n g)$ et de cohomologie $H^{2n-j}(A_n, A_n g)$ induit une dualité entre homologie et cohomologie pour le produit croisé $A_n * G$.

Ce théorème complète les calculs de [3], qui traitaient le cas $j = 0$. En particulier, l'homologie et la cohomologie sont concentrées en degrés pairs et nulles en degrés supérieurs à $2n$.

A partir de la suite exacte longue de Connes (cf. [10]), ce théorème fournit immédiatement le calcul de l'homologie cyclique des algèbres d'invariants A_n^G. En posant $b_j(G) = \sum_{k \leq j/2} a_{j-2k}$, on aboutit à $\dim_{\mathbf{C}} HC_j(A_n^G) = b_j(G)$ pour $j \in \mathbf{N}$. Ces groupes sont nuls en degrés impairs et stabilisés en degré supérieur à $2n$, la dimension des groupes stabilisés étant 0 (si j est impair) ou le nombre de classes de conjugaison du groupe G si j est pair, $j > 2n$, (cf. [3]).

La dualité observée dans l'énoncé du théorème peut s'expliquer en termes d'invariants d'anneaux de polynômes sous l'action de groupes finis. En effet, le gradué associé de A_n^G par rapport à la filtration induite sur A_n^G par la filtration de Bernstein de A_n s'identifie à $S_n = \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]^G$. Le groupe fini G étant inclus dans $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$, un résultat de Watanabe [17, Theorem 1, p. 1] nous assure que S_n est de Gorenstein et de dimension injective $2n$. D'après un résultat de Van den Bergh [16, Proposition 3 et Theorem 1], one en déduit la dualité $HH_j(A_n^G) = H^{2n-j}(A_n^G, A_n^G)$. Nous proposons au paragraphe 7.2 une autre explication pour cette dualité.

Voici un premier exemple d'emploi de ce théorème. Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ opérant par automorphismes sur le plan. La variété quotient est une surface de Klein à point double rationnel, notée $\mathscr{S}_G$. Le groupe G opère également dans l'algèbre de Weyl A_1 et l'algèbre des invariants A_1^G est une déformation de l'anneau des fonctions régulières sur la surface de Klein correspondante. Les groupes d'homologie de Hochschild de A_1^G ont pour dimension

$$\dim_{\mathbf{C}} HH_0\left(A_1^G\right) = s - 1 = \dim_{\mathbf{C}} H^2\left(A_1^G, A_1^G\right),$$

où s désigne le nombre de classes de conjugaison d'éléments de G,

$$\dim_{\mathbf{C}} HH_2\left(A_1^G\right) = 1 = \dim_{\mathbf{C}} H^0\left(A_1^G, A_1^G\right),$$

$$HH_j\left(A_1^G\right) = 0 \qquad \text{pour } j \text{ distinct de } 0 \text{ ou } 2$$

et par dualité

$$H^k\left(A_1^G, A_1^G\right) = 0 \qquad \text{pour } k \text{ distinct de } 2 \text{ ou } 0.$$

Pour $j = 0$, le groupe $HH_0(A_1^G)$ est une déformation de l'homologie de Poisson $H_0^{Pois}(\mathscr{S}_G)$ issue de la structure symplectique de $\mathscr{S}_G$ [2]. Le problème reste ouvert de savoir si un tel résultat de déformation subsiste pour $j > 0$.

Nous donnerons en fin d'article un autre exemple d'emploi de ce théorème.

2. RAPPELS, NOTATIONS ET RÉSULTAT PRINCIPAL

Rappelons que si G est un groupe fini d'automorphismes de la $\mathbf{C}$-algèbre A, le produit croisé $A * G$ de base G, à coefficients dans A est la $\mathbf{C}$-algèbre définie par $A * G = \bigoplus_{g \in G} Ag$ dans laquelle le produit est défini par la règle de redressement $ag \cdot bh = ab^{g^{-1}}gh$ pour a, b dans A, g et h dans G [12].

Soit G un sous-groupe de $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$. Le groupe G opère par automorphismes dans l'anneau de polynômes $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$ ainsi que dans l'algèbre de Weyl $A_n = A_n(\mathbf{C}) = \mathbf{C}[p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n]$ définie par les relations $[p_i, p_j] = [p_i, q_j] = [q_i, q_j] = 0$ si $i \neq j$ et $[p_i, q_i] = 1$.

Le théorème principal s'énonce ainsi.

2.1. THÉORÈME. *Soit G un sous-groupe fini de* $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ *opérant par automorphismes dans l'algèbre de Weyl A_n. On désigne par A_n^G la sous-algèbre des invariants de A_n sous l'action de G. Pour $j \in \mathbf{N}$, désignons par $a_j(G)$ le* *nombre de classes de conjugaison d'éléments de* G *ayant la valeur propre* 1 *avec la multiplicité* j. *Alors, pour tout* $j \in \mathbf{N}$, *on a*

$$\dim_{\mathbf{C}} HH_j\big(A_n^G\big) = \dim_{\mathbf{C}} H^{2n-j}\big(A_n^G, A_n^G\big) = a_j(G).$$

Preuve. Puisque le groupe G est fini et l'algèbre A_n simple, l'algèbre d'invariants A_n^G sous l'action du groupe G est équivalente au sens de Morita à l'algèbre produit croisé $A_n * G$ [1, 13]. Le calcul des dimensions $\dim_{\mathbf{C}} HH_j(A_n^G)$ et $\dim_{\mathbf{C}} H^{2n-j}(A_n^G, A_n^G)$ se fait pour le produit croisé $A_n * G$, c'est-à-dire qu'on calcule les dimensions $\dim_{\mathbf{C}} HH_j(A_n * G)$ et $\dim_{\mathbf{C}} H^{2n-j}(A_n * G, A_n * G)$. Le théorème 6.1 montrera que $\dim_{\mathbf{C}} HH_j(A_n * G) = \dim_{\mathbf{C}} H^{2n-j}(A_n * G, A_n * G) = a_j(G)$, ce qui terminera le preuve de 2.1.

Pour obtenir les dimensions des groupes d'homologie d'un produit croisé, nous utilisons le contexte de Morita suivant. Soient k un anneau commutatif unitaire, A et B deux k-algèbres. Soient ${}_AP_B$ un A-B-bimodule et ${}_BQ_A$ un B-A-bimodule tels que $P \otimes_B Q$ soit isomorphe à A en tant que $A \otimes_k A^{op}$-module et $Q \otimes_A P$ soit isomorphe à B en tant que $B \otimes_k B^{op}$-bimodule. Lorsque (A, B, P, Q) satisfont à ces conditions, on dit que A et B sont Morita équivalentes et on écrit $A \sim_M B$. L'invariance par équivalence de Morita de l'homologie de Hochschild s'écrit $H_j(A, M) \cong H_j(B, Q \otimes_A M \otimes_A P)$ (cf. [6]).

Nous aurons également besoin des notations suivantes. Soit G un groupe. Nous désignons par $[g]$ la classe de conjugaison de l'élément g et par $[G]$ l'ensemble des classes de conjugaison de G. Le centralisateur de g dans G est noté $\mathscr{Z}(g)$.

Le tore $\mathbf{T}^n \cong (\mathbf{C}^*)^n$ est un sous-groupe abélien de $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ via l'inclusion $i : (\mathbf{C}^*)^n \to \mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ définie par $i(g_1, \ldots, g_n) = \operatorname{diag}(g_1, g_1^{-1}, \ldots, g_n, g_n^{-1})$.

Nous emploierons le lemme de diagonalisation suivant, valable pour les transformations symplectiques d'ordre fini (voir [3] pour la preuve).

2.2. Lemme. *Soit* V *un espace vectoriel symplectique de dimension* $2n$ *et soit* $g \in \mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ *une transformation symplectique d'ordre fini* r. *Il existe une base symplectique* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n})$ *de* V *et* n *racines* r*-ièmes de l'unité* $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ *telles que* $g(e_i) = \zeta_i e_i$, $g(e_{n+i}) = \zeta_i^{-1} e_{n+i}$ *pour* $1 \leq i \leq n$.

Enfin nous utiliserons constamment les deux résultats suivants. Soient R un anneau, A et M deux R-modules à gauche et G un groupe opérant à gauche dans les groupes additifs A et M. Pour $(x, f) \in G \times \operatorname{Hom}_R(A, M)$, l'égalité $(x \cdot f)(a) = xf(x^{-1}a)$ définit une action à gauche de G sur le groupe additif $\operatorname{Hom}_R(A, M)$. Lorsque M est un R-module à droite, pour

$(x, m \otimes a) \in G \times M \otimes_R A$, l'égalité $x \cdot (m \otimes a) = xm \otimes xa$ définit une opération de G dans $M \otimes_R A$.

3. UNE SUITE SPECTRALE À LA GROTHENDIECK

Soient k un anneau commutatif unitaire, A une k-algèbre et G un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}_{k-Alg}(A)$. Introduisons la catégorie $\mathscr{A}$ des $A * G$-bimodules M se décomposant sous la forme $M = \oplus_{g \in G} M_g$ où M_g sont des groupes additifs tels que $AhM_g = M_{hg}$ et $M_g Ah = M_{gh}$. Prenant $h = e$, on en déduit que pour tout $g \in G$, M_g est un A-bimodule. Par ailleurs, ces conditions montrent que pour $x \in G$ et $m_g \in M_g$, on a $xm_g x^{-1} \in M_{xgx^{-1}}$. Le centralisateur $\mathscr{Z}(g)$ de g dans G opère donc par conjugaison dans M_g et on pose $m_g^{x^{-1}} = xm_g x^{-1}$.

L'isomorphisme de A-bimodules $Ax \otimes_A M_g \otimes_A Ax^{-1} \cong M_{xgx^{-1}}$ et le contexte de Morita $A = B$, $P = Ax^{-1}$, $Q = Ax$ montrent a $H_j(A, M_g) \cong H_j(A, M_{xgx^{-1}})$. L'algèbre A étant un G-module et M_g un $\mathscr{Z}(g)$-module, on déduit des actions de $\mathscr{Z}(g)$ sur les complexes définissant l'homologie et la cohomologie de Hochschild de A à coefficients dans M_g. Par conséquent les groupes $H_j(A, M_g)$ et $H^{2n-j}(A, M_g)$ sont des $\mathscr{Z}(g)$-modules. Pour l'homologie cette action est définie pour $(x, m_g \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) \in \mathscr{Z}(g) \times M_g \otimes_{A^e} A^{\otimes r}$ par

$$x \cdot \left(m_g \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_r\right) = m_g^{x^{-1}} \otimes xa_1 \otimes \cdots \otimes xa_r.$$

Pour la cohomologie, cette action est définie pour $(x, f) \in \mathscr{Z}(g) \times \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes r}, M_g)$ par

$$(x \cdot f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) = f\left(x^{-1}a_1 \otimes \cdots \otimes x^{-1}a_r\right)_g^{x^{-1}}.$$

3.1. PROPOSITION. *Soient k un anneau commutatif unitaire, A une k-algèbre, G un sous-groupe fini de* $\mathrm{Aut}_{k-Alg}(A)$ *et soit M un $A * G$-bimodule appartenant à $\mathscr{A}$.*

(i) *On a une décomposition*

$$H_*(A * G, M) = \oplus_{[g] \in [G]} H_*(A * G, M)_{[g]}$$

ainsi qu'une suite spectrale

$$E^2_{r,s,[g]} = H_r\left(\mathscr{Z}(g), H_s(A, M_g)\right) \Rightarrow HH_{r+s}(A * G, M)_{[g]}.$$

(ii) *On a une décomposition*

$$H^*(A * G, M) = \oplus_{[g] \in [G]} H^*(A * G, M)^{[g]};$$

si $[G:\mathscr{Z}(g)]$ *est fini, il existe une suite spectrale*

$$E_2^{r,s,[g]} = H^r\big(\mathscr{Z}(g), H^s(A, M_g)\big) \Rightarrow H^{r+s}(A*G, M)^{[g]}.$$

Preuve. La suite spectrale en homologie est un cas particulier du théorème 2.5.b de Lorenz [11, pp. 501–504]. Pour la commodité du lecteur, nous rappelons les étapes essentielles de la preuve, qui consiste à interpréter cette suite spectrale comme la suite spectrale de Grothendieck de la composition de deux foncteurs [7, 2.4.1]. Notons $\mathbf{C}[G]$-Mod et $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}$ respectivement les catégories des $\mathbf{C}[G]$-modules et des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels. Considérons les foncteurs

$$F:\mathscr{A} \to \mathbf{C}[G]\text{-Mod} \qquad \text{et} \qquad F':\mathbf{C}[G]\text{-Mod} \to \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}$$

définis par

$$F(M) = H_0(A, M) \qquad \text{et} \qquad F'(N) = H_0(G, N).$$

Pour M dans $\mathscr{A}$, notons $M_{[g]} = \oplus_{h\in[g]} M_h$. La décomposition $M/[M, A] = \oplus_{[g]\in[G]} M_{[g]}/[M_{[g]}, A]$ montre que le foncteur F se décompose sous la forme $F = \oplus_{[g]} F_{[g]}$ avec $F_{[g]}(M) = H_0(A, M_{[g]})$. L'isomorphisme $H_0(G, H_0(A, M)) \cong H_0(A*G, M)$ établi en [11, Lemme 2.4, p. 500] montre que le foncteur composé $F' \circ F$ est équivalent au foncteur $H_0(A*G, -)$. De $F'\circ F = \oplus_{[g]\in[G]} F'\circ F_{[g]}$, on déduit que le foncteur $H_0(A*G, -)$ se décompose en la somme $H_0(A*G, -) = \oplus_{[g]} H_0(A*G, -)_{[g]}$ avec $H_0(A*G, -)_{[g]} = F'\circ F_{[g]}$. On montre que les foncteurs $F_{[g]}$ et F' satisfont aux conditions d'emploi de la suite spectrale de Grothendieck de la composition de foncteurs. Le terme E^2 de cette suite spectrale s'écrit

$$E^2_{r,s,[g]} = L_r(F')\big(L_s(F_{[g]})\big)(-) \Rightarrow L_{r+s}(F'\circ F_{[g]})(-)$$

où L_j désigne la j-ième dérivation des foncteurs. Cette suite spectrale s'écrit par conséquent

$$E^2_{r,s,[g]} = H_r\big(G, H_s(A, M_{[g]})\big) \Rightarrow H_{r+s}(A*G, M)_{[g]}.$$

On a $H_s(A, M_{[g]}) = \mathbf{Z}[G] \otimes_{\mathbf{Z}[\mathscr{Z}(g)]} H_s(A, M_g)$, c'est-à-dire

$$H_s(A, M_{[g]}) \cong \mathrm{Ind}^G_{\mathscr{Z}(g)}\big(H_s(A, M_g)\big).$$

Le lemme de Shapiro montre que le terme $E^2_{r,s,[g]}$ est en fait $H_r(\mathscr{Z}(g), H_s(A, M_g))$.

Le cas cohomologique est analogue. Pour G fini, le lecteur pourra par exemple consulter Stefan et Guichardet [8, 15]. Contentons-nous de préciser pourquoi en cohomologie, il est nécessaire de supposer $[G:\mathscr{Z}(g)]$ fini. Le terme $E_2^{r,s,[g]}$ de la suite spectrale de Grothendieck s'écrit cette fois $E_2^{r,s,[g]} = H^r(G, H^s(A, M_{[g]}))$. Le module $H^s(A, M_{[g]})$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{\mathscr{Z}(g)}^G(H^s(A, M_g))$, mais puisque $[G:\mathscr{Z}(g)]$ est fini, ce dernier module est lui-même isomorphe à $\mathrm{Coind}_{\mathscr{Z}(g)}^G$. Grâce au lemme de Shapiro, version cohomologique, on obtient

$$H^r\big(G, H^s(A, M_{[g]})\big) \cong H^r\big(\mathscr{Z}(g), H^s(A, M_g)\big).$$

4. RÉSOLUTION DE L'ALGÈBRE DE WEYL

Pour résoudre l'algèbre de Weyl A_n, nous utiliserons l'argument suivant, classique en algèbre homologique.

4.1. Proposition. *Soit (C_*, d) un complexe de chaînes filtré. On suppose que la filtration $\mathscr{F}$ de (C_*, d) est croissante, exhaustive et bornée inférieurement, c'est-à-dire*

$$\mathscr{F}^r(C) \subset \mathscr{F}^{r+1}(C), \qquad \bigcup_{r\geq 0}\mathscr{F}^r(C) = C, \qquad \mathscr{F}^{-1}(C) = \{0\}.$$

Alors, si $H_j(gr(C), gr(d)) = 0$, il en est de même de $H_j(C, d)$.

En effet, le terme E^0 de la suite spectrale associée à la filtration $\mathscr{F}$ de (C, d) n'est autre que $(\mathrm{gr}(C), \mathrm{gr}(d))$.

La résolution de l'algèbre de Weyl A_n nécessite un complexe de Koszul dont nous rappelons ici le principe de construction (cf. par exemple [18]).

Soient k un anneau commutatif unitaire, A une k-algèbre associative et $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ une suite d'éléments de A commutant deux-à-deux. On introduit le k-module libre V de rang r, de base $(e_1, \dots, e_r)$ ainsi que le *complexe de Koszul* $K_*(\mathbf{x}, A) = (A \otimes_k \Lambda^*(V), d')$ où la différentielle $d' : A \otimes_k \Lambda^s(V) \to A \otimes_k \Lambda^{s-1}(V)$ est définie par

$$d'\big(a \otimes e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_s}\big) = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1} a x_{i_j} \otimes e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \cdots \wedge e_{i_s}.$$

Lorsque la suite $\mathbf{x}$ est régulière dans A, on sait que le module différentiel gradué $K_*(\mathbf{x}, A)$ est une A-résolution libre de $A/(\mathbf{x})$.

Appliquons ce résultat à la $\mathbf{C}$-algèbre $A = A_n^e = A_n \otimes_{\mathbf{C}} A_n^{op}$ et à la suite régulière $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ avec $x_i = 1 \otimes p_i - p_i \otimes 1$ et $y_i = 1 \otimes q_i - q_i \otimes 1$, $1 \leq i \leq n$. Compte tenu de l'isomorphisme $A_n^e/(\mathbf{x}) \cong A_n$, on obtient une A_n^e-résolution libre

$$W_*^n = K_*(\mathbf{x}_n, A_n^e) = \big(A_n^e \otimes_{\mathbf{C}} \Lambda^*(V), d'\big)$$

de l'algèbre de Weyl A_n. Si M est un A_n^e-module, on a par conséquent $H_*(A_n, M) = H_*(M \otimes_{A_n^e} W_*^n)$ et $H^*(A_n, M) = H^*(\mathrm{Hom}_{A_n^e}(W_*^n, M))$. L'espace vectoriel V étant de dimension $2n$, le produit $\Lambda^j(V) \times \Lambda^{2n-j}(V) \to \mathbf{C}$ induit un isomorphisme entre $M \otimes W_j^n$ et $\mathrm{Hom}_{A_n^e}(W_{2n-j}^n, M)$. Cet isomorphisme respecte les différentielles; on en déduit un isomorphisme (non canonique) de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels

$$H_j(A_n, M) \cong H^{2n-j}(A_n, M).$$

Pour $n = 1$, cette résolution prend la forme suivante (cf. [9, 14]).

4.2. PROPOSITION. *Posons* $x = 1 \otimes p - p \otimes 1$, $y = 1 \otimes q - q \otimes 1$. *Le complexe* (W_*) *ci-dessous est une* A_1^e*-résolution libre de l'algèbre de Weyl* A_1,

$$0 \to A_1^e \xrightarrow{d_2'} A_1^e \oplus A_1^e \xrightarrow{d_1'} A_1^e \xrightarrow{\mu} A_1 \to 0,$$

où μ *est la multiplication de* A_1 *et où* $d_1'(z_1, z_2) = z_1 x + z_2 y$, $d_2'(z) = (zy, -zx)$.

5. CALCUL DE $H_j(A_n, A_n g)$ POUR $g \in \mathbf{T}^n$

5.1. PROPOSITION. *Soit* $g \in \mathbf{T}^1$ *un automorphisme diagonal de l'algèbre de Weyl* A_1. *On suppose* $g \neq id$. *Alors* $H_j(A_1, A_1 g) = 0$ *pour* $j > 0$, $H^k(A_1, A_1 g) = 0$ *pour* $k \neq 2$ *tandis que* $H_0(A_1, A_1 g) = H^2(A_1, A_1 g) = \mathbf{C}g$.

Preuve. Pour z_1 et z_2 dans A_1, on pose $[z_1, z_2]_g := z_1 z_2 - z_2 z_1^g$. On a $H_j(A_1, A_1 g) = H_j(A_1 g \otimes_{A_1^e} W_*)$. L'homologie $H_j(A_1, A_1 g)$ est évidemment obtenue en multipliant par g l'homologie du complexe de chaînes $(A_1 g \otimes_{A_1^e} W_*) g^{-1}$. Ce dernier complexe s'écrit

$$0 \to A_1 \xrightarrow{d_2} A_1 \oplus A_1 \xrightarrow{d_1} A_1 \to 0,$$

avec

$$d_1(m_1, m_2) = -[p, m_1]_{g^{-1}} - [q, m_2]_{g^{-1}}$$

et

$$d_2(m) = (-[q, m]_{g^{-1}}, [p, m]_{g^{-1}}).$$

Le complexe gradué $\mathrm{gr}(A_1 g \otimes_{A_1^e} W_*) g^{-1}$ s'écrit

$$0 \to \mathbf{C}[X, Y] \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{C}[X, Y] \oplus \mathbf{C}[X, Y] \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{C}[X, Y] \to 0,$$

avec

$$\partial_1(F_1, F_2) = (g^{-1} - \mathrm{id})(X)F_1 + (g^{-1} - \mathrm{id})(Y)F_2$$

et

$$\partial_2(F) = \big((g^{-1} - \mathrm{id})(Y)F, -(g^{-1} - \mathrm{id})(X)F\big),$$

ce qui montre que ce complexe n'est autre que le complexe de Koszul associé à la suite $((g^{-1} - \mathrm{id})(X), (g^{-1} - \mathrm{id})(Y))$ de $\mathbf{C}[X, Y]$. Puisque $g \in \mathbf{T}^1$ et $g \neq \mathrm{id}$, on a $gX = \lambda X$ et $gY = \lambda^{-1} Y$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Ceci montre que la suite $((g^{-1} - \mathrm{id})(X), (g^{-1} - \mathrm{id})(Y))$ est régulière dans $\mathbf{C}[X, Y]$. Le complexe de Koszul $\mathrm{gr}(A_1 g \otimes_{A_1^e} W_*)$ est donc acyclique en degré strictement positif. D'après la proposition 4.1, on en déduit l'acyclicité en degré strictement positif du complexe $(A_1 g \otimes_{A_1^e} W_*)$, soit $H_j(A_1, A_1 g) = 0$ pour $j > 0$. L'égalité des dimensions $\dim_{\mathbf{C}} H_j(A_n, M) = \dim_{\mathbf{C}} H^{2n-j}(A_n, M)$ citée plus haut montre qu'on a également $H^{2-j}(A_1, A_1 g) = 0$ pour $j > 0$. Rappelons que d'après [2, Theorem 4] on a $A_1 g = [A_1, A_1 g] \oplus \mathbf{C} g$, ce qui montre $H_0(A_1, A_1 g) = \mathbf{C} g$ et par dualité $H^2(A_1, A_1 g) = \mathbf{C} g$.

5.2. *Remarques*. (1) Pour $g \in \mathbf{T}^1$, $g \neq \mathrm{id}$, le complexe de cochaînes $(\mathrm{Hom}_{A_1^e}(W_*, A_1 g))g^{-1}$ s'écrit

$$0 \to A_1 \xrightarrow{d_1^t} A_1 \oplus A_1 \xrightarrow{d_2^t} A_1 \to 0$$

avec $d_1^t(m) = (-[p, m]_{g^{-1}}, -[q, m]_{g^{-1}})$ et $d_2^t(m) = [p, m_2]_{g^{-1}} - [q, m_1]_{g^{-1}}$. Puisque $H^2(A_1, A_1 g) = (A_1/\mathrm{Im}(d_2^t))g$ et que $\mathrm{Im}(d_2^t) = [p, A_1]_{g^{-1}} + [q, A_1]_{g^{-1}}$, l'identité

$$A_1 = \big([p, A_1]_{g^{-1}} + [q, A_1]_{g^{-1}}\big) \oplus \mathbf{C}$$

permet de retrouver $H^2(A_1, A_1 g) = \mathbf{C} g$.

(2) Pour $g = \mathrm{id}$, il est bien connu [9, 14], que $HH_j(A_1) = H^{2-j}(A_1, A_1) = 0$ si $j \neq 2$ et $HH_2(A_1) = H^0(A_1, A_1) = \mathbf{C}$.

5.3. THÉORÈME. *Soit $n \geq 1$ un entier et soit $g \in \mathbf{T}^n$ un automorphisme diagonal de l'algèbre de Weyl A_n. Notons $2\mu(g)$ la multiplicité de la valeur propre 1 de g. Alors, on a*

$$H_{2\mu(g)}(A_n, A_n g) = \mathbf{C} g$$

et

$$H_j(A_n, A_n g) = 0 \qquad \text{si } j \neq 2\mu(g).$$

En outre, ces modules sont des $\mathscr{Z}(g)$-modules triviaux.

Preuve. Écrivons $g = (g_1, \ldots, g_n) \in \mathbf{T}^n$ avec $g_i \in \mathbf{T}^1$. Le A_n^e-bimodule $A_n g$ est isomorphe à $\otimes_{l=1}^n A_1 g_l$ et la formule de Künneth conduit à

$$H_j(A_n, A_n g) = \bigoplus_{j_1 + \cdots + j_n = j} H_{j_1}(A_1, A_1 g_1) \otimes \cdots \otimes H_{j_n}(A_1, A_1 g_n).$$

Pour que $H_{j_l}(A_1, A_1 g_l)$ soit non nul, il faut $j_l = 2$ et $g_l = \mathrm{id}$ ou $j_l = 0$ et $g_l \neq \mathrm{id}$. Ceci montre que si $H_j(A_n, A_n g) \neq 0$, on a nécessairement $j = \sum j_l = 2\mu(g)$ et $H_{2\mu(g)}(A_n, A_n g) = \mathbf{C}g$.

5.4. *Remarque*. Avec les notations du théorème, on a évidemment

$$H^{2n-2\mu(g)}(A_n, A_n g) = \mathbf{C}g \qquad \text{et}$$
$$H^{2n-j}(A_n, A_n g) = 0 \qquad \text{si } j \neq 2\mu(g).$$

6. CALCUL DE $HH_j(A_n * G)$

6.1. THÉORÈME. *Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ opérant par automorphismes dans l'algèbre de Weyl A_n. Pour $j \in \mathbf{N}$, on désigne par $a_j(G)$ le nombre de classes de conjugaison d'éléments de G ayant la valeur propre* 1 *avec la multiplicité j. Alors on a*

$$\dim_{\mathbf{C}} HH_j(A_n * G) = \dim_{\mathbf{C}} H^{2n-j}(A_n * G, A_n * G) = a_j(G).$$

Preuve. La suite spectrale de Grothendieck s'écrit

$$E^2_{r,s,[g]} = H_r(\mathscr{Z}(g), H_s(A_n, A_n g)) \Rightarrow HH_{r+s}(A_n * G)_{[g]}.$$

Le lemme de diagonalisation 2.2 nous assure qu'il existe $x \in \mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ tel que $g' = xgx^{-1}$ appartienne à $\mathbf{T}^n$. On a vu en 3 que l'on a un isomorphisme $H_s(A_n, A_n g) \cong H_s(A_n, A_n g')$. Le calcul effectué en 5.3 montre que ce dernier groupe est un $\mathscr{Z}(g)$-module trivial car $\mathscr{Z}(g)$ agit trivialement (par conjugaison) sur $\mathbf{C}g$. On en déduit $E^2_{r,s,[g]} = \mathbf{C}g$ si $(r, s) = (0, 2\mu(g))$ et $E^2_{r,s,[g]} = 0$ sinon. En particulier, la suite spectrale dégénère, ce qui conduit à $HH_j(A_n * G)_{[g]} = \mathbf{C}g$ si $j = 2\mu(g)$ et $HH_j(A_n * G)_{[g]} = 0$ sinon. Puisque $HH_j(A_n * G) = \bigoplus_{[g] \in [G]} HH_j(A_n * G)_{[g]}$, on obtient $\dim_{\mathbf{C}} HH_j(A_n * G) = a_j(G)$. Le calcul cohomologique est rigoureusement identique.

6.2. *Fin de la Preuve du Théorème* 2.1. Le théorème 6.1 et l'équivalence de Morita $A_n * G \sim_M A_n^G$ citée au paragraphe 2 achèvent la preuve du théorème 2.1.

7. UN RÉSULTAT DE DUALITÉ

Dans ce paragraphe, nous montrons que le théorème 1 de [16] se généralise aux produits croisés.

Soit k un corps de caractéristique nulle et soit A une k-algèbre telle que A^e soit noethérienne. Nous dirons que A satisfait à la condition de dualité de Van den Bergh s'il existe $d \in \mathbf{N}$ et un A-bimodule inversible U tel que pour tout $j \in \mathbf{N}$ et tout A-bimodule M, on ait un isomorphisme de k-modules

$$\varphi_j : H_j(A, U \otimes_A M) \to H^{d-j}(A, M).$$

En choisissant $M = A^e$, on voit que U est nécessairement égal à $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, A^e)$. Supposons que G soit un groupe opérant dans A. Soit M un $A * G$-bimodule; on considére M-comme un G-module pour l'action adjointe. Alors, il existe des opérations canoniques de G dans $H_j(A, U \otimes_A M)$ et $H^{d-j}(A, M)$ pour lesquelles φ_j est une application G-équivariante. En effet, G opère canoniquement dans $U = \mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, A^e)$. On vérifie que les isomorphismes introduits par Van den Bergh [16, p. 1346] dans la preuve de son théorème de dualité sont bien équivariants pour ces opérations.

PROPOSITION 7.1. *Soit A une k-algèbre satisfaisant à la condition de dualité ci dessus et soit G un sous-groupe fini de* $\mathrm{Aut}_k(A)$. *Alors, pour tout $A * G$ bimodule M de la catégorie $\mathscr{A}$ et pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a un isomorphisme*

$$H_j(A * G, U \otimes_A M) \cong H^{d-j}(A * G, M).$$

Preuve. Notons $E_2^{r,s,[g]}$ la suite spectrale de Grothendieck associée au calcul de $H^{r+s}(A * G, M)^{[g]}$ et notons $E^2_{r,s,[g]}$ celle associée au calcul de $H_{r+s}(A * G, U \otimes_A M)_{[g]}$. De G fini et k de caractéristique nulle, on déduit $E_2^{r,s,[g]} = 0 = E^2_{r,d-s,[g]}$ si $r > 0$ tandis que du lemme de Shapiro, on déduit $E_2^{0,s,[g]} = H^s(A, M_g)^{\mathscr{Z}(g)} \cong H^s(A, M_g)_{\mathscr{Z}(g)}$. L'isomorphisme φ_s de Van den Bergh étant équivariant, on a donc $E_2^{0,s,[g]} \cong H_{d-s}(A, (U \otimes_A M)_g)_{\mathscr{Z}(g)}$, c'est-à-dire $E_2^{0,s,[g]} \cong E^2_{0,d-s,[g]}$ pour tout s. De tout ceci, on déduit $H^{d-j}(A * G, M)^{[g]} \cong H_j(A * G, U \otimes_A M)_{[g]}$ pour tout $[g] \in [G]$.

7.2. *Remarque.* Supposons que A soit à dualité de Van den Bergh, de A-bimodule inversible U et que A soit Morita équivalente à B par le contexte de Morita (A, B, P, Q). Alors B est également à dualité de Van den Bergh, de B-bimodule inversible $V = Q \otimes_A U \otimes_A P$.

L'algèbre de Weyl A_n satisfait la dualité $H_j(A, M) \cong H^{2n-j}(A, M)$ rappelée au paragraphe 4, ce qui montre que A_n est à dualité de Van den Bergh. On vérifie que $U = \mathrm{Ext}^{2n}_{A_n^e}(A_n, A_n^e)$ est isomorphe à A_n. On en déduit que pour $M = A_n * G$ et $j \in \mathbf{N}$, la proposition 7.1 fournit les isomorphismes

$$HH_j(A_n * G) \cong H^{2n-j}(A_n * G, A_n * G).$$

Puisque $A_n^G \sim_M A_n * G$, on obtient la dualité

$$HH_j(A_n^G) \cong H^{2n-j}(A_n^G, A_n^G)$$

pour $j \in \mathbf{N}$.

8. L'EXEMPLE $\mathscr{D}(\mathfrak{h})^W$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de dimension n et de rang l, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan et W le groupe de Weyl. L'algèbre duale $\mathfrak{h}^*$ est alors une W-représentation. Le groupe W agit par automorphismes linéaires dans les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}^*$, identifiée à $S(\mathfrak{h})$ ainsi que dans l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{h}^*$ notée $\mathscr{D}(\mathfrak{h}^*)$ isomorphe à l'algèbre de Weyl $A_l(\mathbf{C})$.

L'algèbre des opérateurs différentiels W-invariants sur $\mathfrak{h}^*$ est alors isomorphe à $A_l(\mathbf{C})^G$ et le théorème principal s'applique à cette dernière algèbre. Pour calculer les groupes de (co)homologie de Hochschild, nous aurons besoin des nombres $a_j(W)$ pour W agissant dans la représentation $\mathfrak{h}^*$. En effet, pour appliquer le théorème principal nous remarquons que W s'identifie à un sous-groupe de $\mathbf{Sp}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*)$ et que la multiplicité de la valeur propre 1 d'un élément de W agissant dans la représentation $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$ est le double de la multiplicité de la valeur propre 1 du même élément de W agissant dans la représentation $\mathfrak{h}^*$. Cette multiplicité est aussi la dimension du sous-espace de $\mathfrak{h}^*$ invariant par l'élément considéré. Le théorème principal donne alors:

8.1. Théorème. *On a*

$$\dim_{\mathbf{C}} HH_{2j}\left(\mathscr{D}(\mathfrak{h}^*)^W\right) = a_j(W) \qquad \textit{pour } 0 \le j \le l$$

et

$$\dim_{\mathbf{C}} HH_j\left(\mathscr{D}(\mathfrak{h}^*)^W\right) = 0 \qquad \textit{sinon}.$$

Dans la suite, nous allons déterminer les nombres $a_j(W)$ suivant les types des algèbres de Lie simples de dimension finie. A cette fin, nous utiliserons l'article classique de R. Carter [4] qui fournit une classification complète des classes de conjugaison des groupes de Weyl des algèbres de Lie simples de dimension finie. Cette classification donne en outre le polynôme caractéristique d'une classe de conjugaison et en particulier la multiplicité de la valeur propre 1 pour chaque classe de conjugaison de W agissant dans la représentation $\mathfrak{h}^*$.

Type A_n. Considérons l'espace $\mathbf{C}^{n+1}$, sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ et l'hyperplan $H = \{(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \mid \sum z_i = 0\}$. Alors W s'identife au groupe symétrique de $\mathscr{B}$ et son action dans $\mathfrak{h}^*$ à l'action du groupe symétrique de $\mathscr{B}$ restreinte à H. Pour $0 \leq j \leq n$, nous devons dénombrer les classes de conjugaison du groupe Sym($\mathscr{B}$) ayant 1 comme valeur propre avec multiplicité j. Comme $\sum e_i$ est invariant sous l'action de ces permutations, on obtient

$$a_j(W) = \#\{\text{partitions de } (n+1) \text{ en } (j+1) \text{ parts}\}.$$

Type B_n *and* C_n. Les classes de conjugaison correspondent aux paires de partitions (λ, μ) tels que $|\lambda| + |\mu| = n$. La multiplicité de 1 comme valuer propre de la classe de conjugaison correspondante est donnée par le nombre de parts de la première partition.

Type D_n. Les classes de conjugaison correspondent aux paires de partitions (λ, μ) tels que $|\lambda| + |\mu| = n$ avec la condition supplémentaire que le nombre de parts de μ est pair; en outre, s'il n'y a pas de seconde partition et que les parts de la première partition sont toutes paires, il y correspond deux partitions. La multiplicité de 1 comme valeur propre de la classe de conjugaison correspondante est donnée par le nombre de parts de la première partition.

Type G_2. $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 1$.

Type F_4. $a_0 = 9$, $a_1 = 8$, $a_2 = 5$, $a_3 = 2$ et $a_4 = 1$.

Type E_6. $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 7$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$ et $a_6 = 1$.

Type E_7. $a_0 = 12$, $a_1 = 18$, $a_2 = 13$, $a_3 = 9$, $a_4 = 4$, $a_5 = 2$, $a_6 = 1$ et $a_7 = 1$.

Type E_8. $a_0 = 30$, $a_1 = 31$, $a_2 = 24$, $a_3 = 12$, $a_4 = 8$, $a_5 = 3$, $a_6 = 2$, $a_7 = 1$ et $a_8 = 1$.

8.2. *Remarque*. Les dimensions des groupes d'homologie de Hochschild dans le cas A_n sont données par une fonction génératrice classique. Soit $p(i, j)$ le nombre de partitions de i ayant $j \leq i$ parts. On a alors [5],

$$1 + \sum_{1 \leq j \leq i} p(i, j) x^j y^i = \frac{1}{(1 - xy)(1 - xy^2)(1 - xy^3)\ldots}.$$

Plus précisément, soit $\mathfrak{h}_{n+1}$ la sous-algèbre de Cartan standard de $sl(n+1)$, $W_{n+1} = S_{n+1}$ le groupe de Weyl correspondant. Alors, la formule suivante fournit les dimensions étudiées pour toutes les algèbres de type A_n simultanément:

$$\sum_{0 \leq k \leq n, n \geq 1} \dim HH_{2k}\left(\mathscr{D}(\mathfrak{h}_{n+1}^*)^{W_{n+1}}\right) x^{k+1} y^{n+1}$$
$$= \frac{1}{(1 - xy)(1 - xy^2)(1 - xy^3)\ldots} - 1 - xy.$$

Il serait intéressant de calculer des fonctions génératrices analogues pour les types B, C et D.

REMERCIEMENTS

Les auteurs sont heureux de remercier Roger Carter pour son aide dans les calculs explicites de l'exemple $\mathscr{D}(\mathfrak{h})^W$, Christian Kassel pour son explication concernant la dualité de l'homologie des algèbres de Weyl, citée au paragraphe 4, ainsi que Mariano Suarez Alvarez.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Alev, T. H. Hodges, et J. D. Velez, Fixed rings of the Weyl algebra $A_1(\mathbf{C})$, *J. Algebra* **130** (1990), 83–96.
2. J. Alev et T. Lambre, Comparaison de l'homologie de Hochschild et de l'homologie de Poisson pour une déformation des surfaces de Klein, *in* "Algebra and Operator Theory, Proceedings of the Colloquium, Tashkent," pp. 25–38, Kluwer Academic, Dordrecht, 1998.
3. J. Alev et T. Lambre, Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl, *K-Theory* **18** (1999), 401–411.
4. R. Carter, Conjugacy classes in the Weyl group, *Comput. Math.* **25** (1972), 1–59.
5. L. Comtet, "Analyse combinatoire," Collection Sup., Tome 1, Presses Univ. France, Paris, 1970.
6. K. Dennis et K. Igusa, Hochschild homology and the second obstruction for pseudo-isotopy, *in* Lecture Notes in Math., Vol. 966, pp. 7–58, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1982.
7. A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.* **9** (1957), 119–221.
8. A. Guichardet, Suites spectrales à la Hochschild–Serre pour les produits croisés d'algèbres de groupes, prépublication, 1999.
9. C. Kassel, L'homologie cyclique des algèbres enveloppantes, *Invent. Math.* **91** (1988), 221–251.
10. J.-L. Loday, "Cyclic Homology," Springer-Verlag, New York/Berlin, 1992.
11. M. Lorenz, On the homology of graded algebras, *Comm. Algebra* **20** (1992), 489–507.
12. J. C. McConnell et J. C. Robson, "Non commutative Noetherian Rings," Wiley, New York, 1987.
13. S. Montgomery, "Fixed Rings of Finite Automorphism Groups of Associative Rings," Lecture Notes in Math., Vol. 818, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1980.
14. R. Sridharan, Filtered algebras and representations of Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **100** (1961), 530–550.
15. D. Stefan, Hochschild cohomology on Hopf–Galois extensions, *J. Pure Appl. Algebra* **103** (1995), 221–233.
16. M. Van den Bergh, A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 1345–1348.
17. K. Watanabe, Certain invariant subrings are Gorenstein, I, II, *Osaka J. Math.* **11** (1974), 1–8, 379–388.
18. C. Weibel, "An Introduction to Homological Algebra," Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 38, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1994.