

ESTUDIO NUMÉRICO DE LUBRICACIÓN VISCOELASTOHDRODINÁMICA EN PRÓTESIS DE RODILLA CON FLUIDO NO NEWTONIANO

NUMERICAL ANALYSIS OF VISCOELASTOHDRODYNAMIC LUBRICATION IN KNEE PROSTHESIS WITH NON-NEWTONIAN FLUID

L. E. Robledo Blasco^{*1}, B. A. Weiss¹, M. E. Berli¹ y J. Di Paolo¹

¹Grupo Biomecánica Computacional (GBC), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Ruta 11 km 10, Oro Verde, Entre Ríos, Argentina.

Recibido: 28/10/2021; Aceptado: 17/01/2022

En este trabajo se diseñó un modelo computacional de lubricación de película delgada aplicada a una prótesis de rodilla con el fin de realizar una comparación entre tres modelos constitutivos, es decir, la ley de potencias, el modelo de Carreau-Yasuda y el modelo de Cross. El modelo equivalente de la prótesis de rodilla consiste en un cilindro rígido sobre un plano deformable. El componente deformable que representa la base tibial se asumió como un sólido estándar lineal (SEL) viscoelástico. Las ecuaciones gobernantes se resolvieron simultáneamente con la determinación de una frontera libre móvil utilizando el software COMSOL Multiphysics. Los resultados obtenidos mostraron que el modelo Cross presenta el mayor valor de tasa de corte, el menor espesor de película y la viscosidad dinámica con menor variación a lo largo del canal de lubricación, alcanzando un valor mínimo de viscosidad de 0,02 Pa.s. El modelo Carreau-Yasuda presenta el valor más alto de coeficiente de fricción, siendo un 21,5% superior al modelo de Ley de Potencias y un 3,67% superior al modelo de Cross.

Palabras Clave: sólido estándar lineal, modelo unidimensional, modelado computacional.

In this work, a computational model of thin film lubrication applied to a knee prostheses was designed in order to make a comparison between three constitutive models, i.e. a power law, the Carreau-Yasuda model and the Cross model. The equivalent model of the knee prosthesis was modeled as a rigid cylinder on a deformable plane. The mechanical behavior of the deformable component representing the tibial base was assumed as a viscoelastic Standard Linear Solid (SLS). The governing equations were solved simultaneously with the determination of a free moving boundary by implementing it in COMSOL Multiphysics software. The results obtained showed that the Cross model presents the highest shear rate value, the lowest film thickness and the dynamic viscosity with less variation along the lubrication channel, reaching a minimum viscosity value of 0.02 Pa.s. The Carreau-Yasuda model presents the highest value of friction coefficient, being 21.5% higher than for the Power Law model and 3.67% higher than the Cross model.

Keywords: Linear Standard Solid, one-dimensional model, computational modelling.

<https://doi.org/10.31527/analesafa.2022.fluidos.57>

 ISSN 1850-1168 (online)

I. INTRODUCCIÓN

La rodilla es la articulación sinovial más extensa del cuerpo humano. Cuando el daño sobre las superficies articulares es severo, la única solución posible es reemplazar las superficies articulares por un conjunto protésico artificial.

Una prótesis de rodilla se compone de un elemento femoral metálico, un elemento tibial metálico y un elemento tibial polimérico que se apoya sobre el elemento tibial metálico (Fig. 1).

Si bien las prótesis de rodilla ofrecen una mejora en la calidad de vida de los pacientes, su vida útil no supera los 15 años. Esto, sumado al incremento en el promedio de vida de la población conduciría a un incremento en el número de procedimientos de reemplazo de prótesis de rodilla (artroplastia de revisión). Uno de los factores que definen la durabilidad de estos implantes reside en la capacidad de lubricación de las superficies articulares. Los procesos de lubricación y deformación de la articulación natural y artificial resultan de gran interés para la comunidad médica e

ingenieril.

Gran parte de los estudios sobre el comportamiento de la articulación artificial se basan en modelos computacionales. La mayoría de estos trabajos consideran al fluido sinovial como un fluido Newtoniano [1], a pesar de que su comportamiento no Newtoniano está ampliamente probado tanto para las articulaciones sanas como para las patológicas y periprotésicas [2, 3]. Asimismo, la mayor parte de la bibliografía de referencia adopta modelos simplificados de deformación elástica para el material polimérico deformable, a pesar de que el mismo se comporta como un material viscoelástico [4, 5].

El modelado del fluido sinovial y del material polimérico puede resultar en diferencias notables en los resultados obtenidos [6-9].

Por ello, en este trabajo se aplica un modelo computacional de lubricación viscoelasto-hidrodinámica en prótesis de rodilla y se compara el comportamiento de tres modelos constitutivos de fluido sinovial no Newtoniano.

Es usual la utilización de condiciones de frontera de Sommerfeld en la resolución del problema de lubricación,

* lerblasco@gmail.com



FIG. 1: Esquema del conjunto articular protésico.

esto conduce a presiones subambientales que no se observan en la realidad. La eliminación de estos resultados anómalos se resuelve utilizando condiciones de contorno de Reynolds, las cuales especifican que la presión alcanza el valor ambiental con un gradiente nulo sobre la frontera del dominio, la cual es a priori desconocida y se clasifica como libre. Es usual la utilización de métodos aproximados para determinar la localización de esta frontera libre, como así también es habitual el forzado de las presiones subambientales a cero cuando se aplican condiciones de frontera de Sommerfeld [6]. En este trabajo se aplican condiciones de frontera de Reynolds determinando la frontera libre a partir de un mapeo lineal.

II. MÉTODOS

Modelo Geométrico

Se construyó un modelo unidimensional estacionario de la articulación artificial considerando al componente femoral metálico como indeformable, mientras que el componente tibial se lo consideró un material deformable.

El conjunto osteoartromuscular y ligamentario le permite a la articulación de la rodilla tener principalmente un único grado de libertad, por lo que en este caso es válido considerar un modelo geométrico 1D, de tipo cilindro que se desplaza sobre un plano (véase Fig. 2). El radio del cilindro equivalente R , se obtiene a partir de las curvaturas de las superficies femoral y tibial, de radios R_1 y R_2 , respectivamente:

$$R = \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \quad (1)$$

La ecuación que define la altura del canal se obtiene al restar las parábolas que mejor se ajustan a las curvaturas de las

superficies articulares:

$$h = h_0 + \frac{r^2}{2R} + d(r) \quad (2)$$

Donde h_0 es el entrecruzamiento entre los materiales, R es el radio equivalente y $d(r)$ es el desplazamiento vertical que sufre el material deformable en cada punto de la superficie.

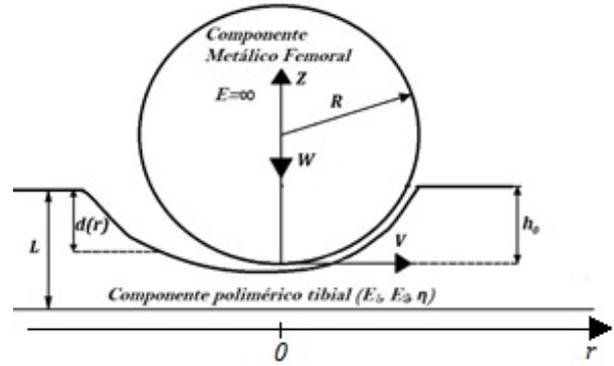


FIG. 2: Modelo geométrico.

El componente tibial se consideró como un material deformable del tipo Sólido Estándar Lineal (SEL) que obedece al comportamiento definido por la expresión 3:

$$\frac{du(r)}{dr} + \frac{E_2''}{\eta'' V} u(r) = \frac{E_1'' + E_2''}{E_1'' \eta'' V} p(r) + \frac{1}{E_1''} \frac{dp(r)}{dr} \quad (3)$$

Donde $u(r)$ es la deformación del material polimérico, $p(r)$ es la presión aplicada sobre el material, V es la velocidad tangencial media, $\eta'' = (4/3)\eta$ y E_1'' y E_2'' son los módulos equivalentes del material definidos como:

$$E_1'' = \frac{E_1(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4)$$

$$E_2'' = \frac{E_2(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5)$$

Estos módulos de elasticidad equivalentes corresponden al modelo de deformación de columna en el que se considera al componente tibial como un material de baja rigidez considerando una deformación plana [5] en la que –mediante el coeficiente de Poisson ν – se incluyen las deformaciones en sentido perpendicular a la dirección de aplicación de la fuerza de compresión o descompresión.

A partir de estos módulos elásticos se define un módulo equivalente E_{eq} que representa el comportamiento elástico total del modelo. Este módulo equivalente se define como:

$$E_{eq} = \frac{E_1'' + E_2''}{E_1'' E_2''} \quad (6)$$

Para cuantificar la influencia del comportamiento viscoso frente al comportamiento elástico del material, se define un número adimensional a partir de parámetros constructivos y operativos del modelo:

$$ND = \frac{\eta''V}{E_2''\sqrt{(2RL)}} \quad (7)$$

siendo L el espesor del material deformable.

Modelos constitutivos de fluido no Newtoniano

En este trabajo el fluido sinovial se modela como fluido newtoniano generalizado, a partir de tres modelos constitutivos. En todos ellos, la viscosidad aparente (μ^*) es función de la tasa de deformación ($\dot{\gamma}$).

El primero de ellos es la Ley de Potencias, de acuerdo a la cual, la viscosidad aparente (μ_p^*) el fluido se define como:

$$\mu_p^* = m(\dot{\gamma})^{n-1} \quad (8)$$

siendo m el índice de consistencia del fluido y n el índice exponencial. Dado que el fluido sinovial es pseudoplástico, n tomará valores menores a 1.

El segundo de ellos es el modelo de Cross, siendo la viscosidad aparente:

$$\mu_{Cr}^* = \mu_{inf} + \frac{\mu_0 - \mu_{inf}}{1 + \alpha\dot{\gamma}^\beta} \quad (9)$$

donde μ_0 es la viscosidad a tasas de corte bajas, μ_{inf} es la viscosidad correspondiente a elevados valores de tasa de corte, α y β son constantes de ajuste del modelo.

El tercer modelo considerado es el de Carreau-Yasuda, donde la viscosidad aparente se define como:

$$\mu_{Ca}^* = \mu_{inf} + (\mu_0 - \mu_{inf})(1 + (\lambda\dot{\gamma})^a)^{(n-1)/a} \quad (10)$$

donde μ_0 y μ_{inf} corresponden a los valores extremos de viscosidad aparente a bajas y altas tasas de corte, λ es una constante temporal, n y a son valores de ajuste del comportamiento exponencial del modelo.

Los parámetros constitutivos de los modelos de Cross y de Carreau se obtuvieron de estudios del comportamiento reológico de muestras de fluido sinovial patológico [3], mientras que los valores de los parámetros constitutivos para la ley de Potencias se obtuvieron a partir de los resultados de los otros dos modelos.

TABLA 1: Valores de los parámetros de diseño.

	Descripción	Valor
R	Radio equivalente del cilindro	0.035 m
E_1 y E_2	Módulos elástico de los elementos en serie y paralelo del material deformable	1 GPa
ν	Módulo de Poisson	0.4
η''	Viscosidad del amortiguador	2.93×10^7 Pa.s
μ_0	Viscosidad aparente del fluido a bajas tasas de corte	0.01 Pa.s
μ_{inf}	Viscosidad aparente del fluido a tasas de corte elevadas	2.00×10^{-2} Pa.s
L	Espesor del material deformable	1.00×10^{-3} m
V	Velocidad tangencial promedio	1.91×10^{-2} m/s
W_x	Carga lineal máxima	7.35×10^{-4} N/m
Δy	Ancho condíleo	1.5×10^{-2} m

Ecuación de lubricación

Los modelos de fluido no Newtoniano considerados forman parte de los fluidos Newtonianos Generalizados, en los cuales se pueden aplicar las ecuaciones de Navier-Stokes. Se adoptaron las siguientes hipótesis simplificadoras para la deducción de la ecuación de lubricación: estado estacionario, frontera de volumen de control fija, fluido isotérmico e incompresible.

A partir de estas consideraciones, se obtuvo la ecuación de lubricación de Reynolds para fluidos Newtonianos Generalizados:

$$\frac{d}{dr} \left(h^3 \frac{dp}{dr} \right) = 12\mu^*V \frac{d}{dr}(h) \quad (11)$$

Condiciones operativas de la rodilla

Durante la marcha se observa un desplazamiento relativo entre las superficies articulares, donde el movimiento de flexión-extensión (FE) en la dirección antero-posterior es el más importante. La velocidad tangencial media (V) se define como el promedio de la suma de las velocidades de las superficies articulares (V_1 y V_2). En este trabajo se adopta una velocidad tangencial promedio $V = 0.0191$ m/s.

La carga (W) es la fuerza a la que está sometida la articulación. En este trabajo, la carga se obtiene como post-procesado, a partir de la integración de la presión en el dominio:

$$W = \Delta Y \int_{\Omega} p(r) dr = \Delta Y W_x \quad (12)$$

donde la integral corresponde a la carga lineal W_x y ΔY es la profundidad cada cóndilo en el eje sagital (profundidad del cilindro).

Durante la fase de apoyo simple del ciclo de marcha, la carga aplicada alcanza a ser tres veces el peso corporal de la persona. Considerando una persona de 75 kg de masa (peso de aproximadamente 735 N), la carga máxima a la que estará sometida la articulación total será de 2205 N. Considerando una distribución uniforme de la carga entre los dos contactos cóndilo-tibiales y adoptando un ancho condíleo $\Delta Y = 0.015$ m, la carga lineal ($W = \int_{\Omega} p(r) dr$) aplicada en cada cóndilo es de 7.35×10^4 N/m.

El coeficiente de fricción (ϕ) se define como el cociente entre la fuerza de fricción ejercida sobre la superficie y la carga. Dado que se considera un modelo unidimensional, en este trabajo se adopta la carga lineal (W_x) y la fuerza de fricción ejercida sobre la línea de contacto correspondiente a la superficie deformable. Esta fuerza se obtiene al integrar los esfuerzos cortantes. El coeficiente de fricción se define, entonces, como:

$$\phi = \frac{\int_{\Omega} \left(-\mu \frac{2V}{h} + \frac{dp}{dr} h \right) dr}{W_x} \quad (13)$$

Técnica de resolución

Para resolver las ecuaciones gobernantes se utilizó el software comercial COMSOL Multiphysics, ya que el alto grado de acoplamiento entre las ecuaciones y la no linealidad de las mismas requiere de métodos numéricos para su resolución en forma simultánea. Debido a esto, se discretizó

el dominio por medio de elementos cuadráticos de Lagrange.

Para utilizar este software, las ecuaciones gobernantes se adimensionalizaron y debilitaron. Además, debido a la condición de frontera libre impuesta en el sistema, fue necesario implementar una estrategia de mapeo de las ecuaciones a un dominio fijo. Para este trabajo se realizó un mapeo lineal obedeciendo la Ec. (14). Las ecuaciones fueron resueltas en el nuevo dominio (de frontera fija y coordenada x , Fig. 3) y las soluciones fueron luego mapeadas hacia el dominio físico (de frontera libre y coordenada r)

$$\frac{d^2 r}{dx^2} = 0. \quad (14)$$

El alto grado de acoplamiento entre las ecuaciones y la no linealidad de las mismas requieren la realización de una continuación paramétrica de orden cero en h_0 , desde cargas nulas o despreciables (correspondientes a elevados h_0) hasta alcanzar la carga lineal deseada ($W_x = 7.35 \times 10^4$ N/m).

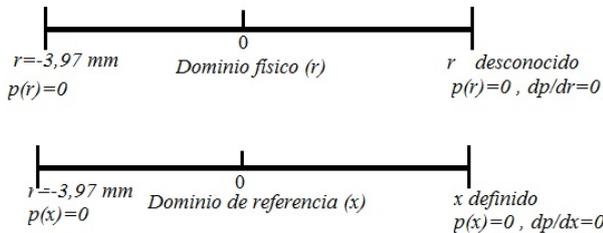


FIG. 3: Conformación de los dominios físico y de referencia utilizado durante el proceso de mapeado.

III. RESULTADOS

La altura del canal de lubricación para los casos en estudio se muestra en la Fig. 4. Se observa una diferencia de altura mínima de 2% entre el modelo de Ley de Potencias y el de Carreau mientras que la máxima diferencia en este sentido observada entre el modelo de Cross y de Carreau es de 9,4%.

La viscosidad a lo largo del canal de lubricación para los tres modelos se presenta en la Fig. 6. El modelo de Ley de Potencias presenta la mínima viscosidad aparente.

El modelo de Cross presenta los valores de viscosidad aparente con menor variación a lo largo del canal de lubricación, alcanzando un valor de viscosidad mínima de 2.00×10^{-2} Pa.s.

El modelo de Carreau presenta valores de viscosidad mínima cercanos a 2.3×10^{-2} Pa.s, mientras que el modelo de Ley de Potencias presenta un valor de viscosidad mínima de 1.95×10^{-2} Pa.s. El descenso de este último valor por debajo de la viscosidad esperada para tasas de corte elevadas (de 0.02 Pa.s) se debe principalmente a las características constructivas de este modelo de fluido no Newtoniano, el cual desciende indefinidamente a medida que la tasa de corte aumenta.

La Fig. 6 muestra la tasa de corte a lo largo del canal de lubricación. Los modelos de Cross y de Carreau poseen los valores más extremos, mientras que el modelo de Potencias

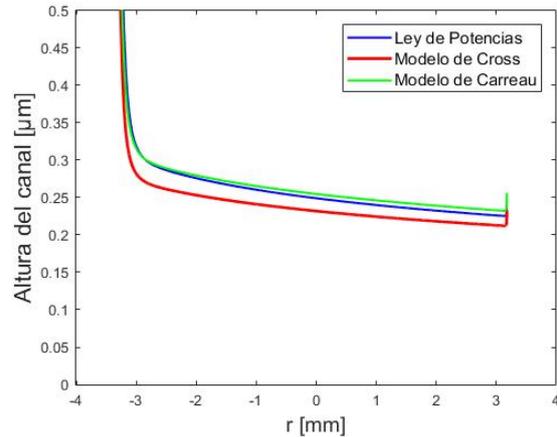


FIG. 4: Altura del canal de lubricación para los modelos de fluido no Newtoniano analizados.

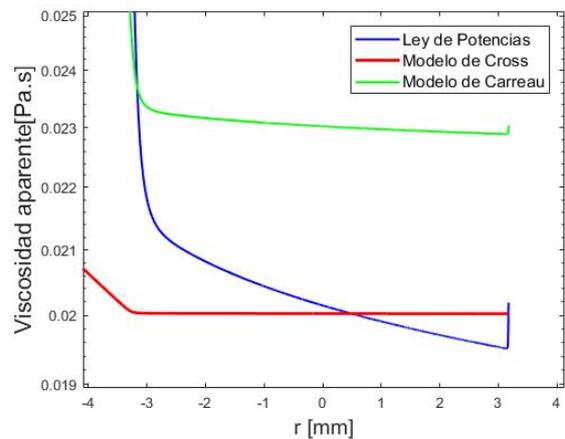


FIG. 5: Viscosidad aparente para los modelos de fluido no Newtoniano analizados.

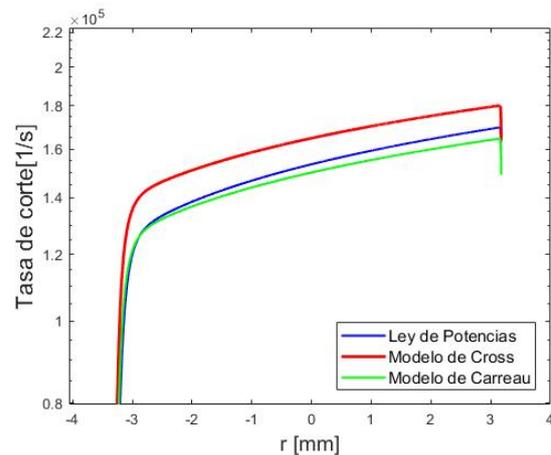


FIG. 6: Tasa de corte a lo largo del canal para los modelos de fluido no Newtoniano analizados.

posee valores de tasa de corte intermedios. Al presentar mayores tasas de corte, la viscosidad disminuirá debido al comportamiento no Newtoniano del fluido, tal como se puede ver en la Fig. 5.

Los tres modelos muestran valores de presión máxima muy similares con una diferencia menor a 1%. Esto se debe a que la carga impuesta en los tres casos de estudio es

la misma. Como la distribución de la carga se ve afectada principalmente por el comportamiento del material deformable [5], la distribución de la presión a lo largo de toda la zona de contacto será la misma, a pesar de que el modelo de fluido no Newtoniano varíe.

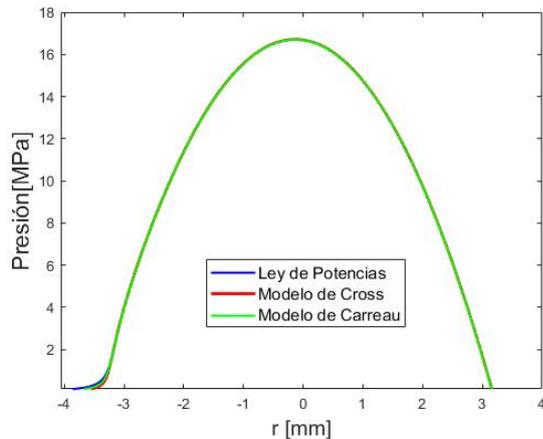


FIG. 7: Presión a lo largo del canal de lubricación para los modelos de fluido no Newtoniano analizados.

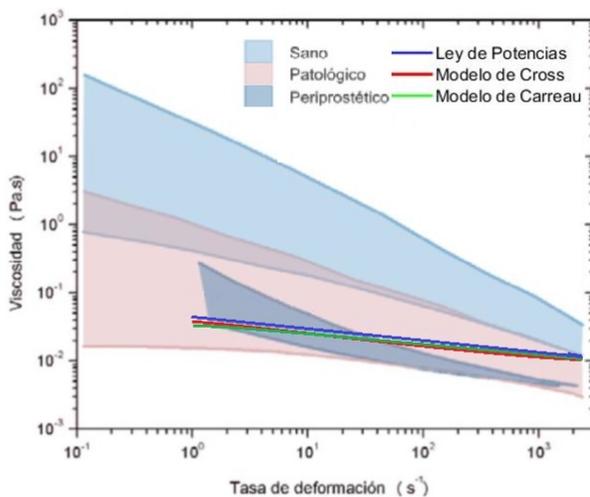


FIG. 8: Viscosidad vs Tasa de deformación para los casos analizados.

IV. CONCLUSIONES

Se construyó un modelo unidimensional estacionario de prótesis de rodilla considerando fluido sinovial no newtoniano y material polimérico deformable viscoelástico del tipo SEL. Se compararon los resultados al utilizar tres modelos de fluido no Newtoniano encontrándose lo siguiente:

- El modelo de Cross muestra la situación más desfavorable dentro de las situaciones analizadas debido a que la altura mínima y la viscosidad mínima son las menores observadas, mientras que presenta el valor de tasa de corte más elevado. Sin embargo, el modelo de Carreau es el que presenta el valor más alto de coeficiente de fricción, siendo 21.5% mayor que para el modelo de Ley de Potencias y un 3.67% mayor que el de Cross.

- Tanto el modelo de Cross como el de Carreau parecerían ser más conservadores que el modelo de Ley de Potencias ya que utilizar este último conduciría a sobreestimar la mínima altura del canal (respecto del modelo de Cross) o predecir coeficientes de fricción inferiores (respecto del modelo de Carreau). Definir el modelo más apropiado requeriría contrastar estos resultados con estudios experimentales sobre conjuntos protésicos reales, inexistentes al momento.
- Para los tres casos la viscosidad aparente en la zona de carga ha alcanzado prácticamente el valor de $\mu_{inj}=0.02$ Pa.s. (Fig. 8), por lo que la simplificación de considerar al fluido como Newtoniano con bajos valores de viscosidad parecería ser razonable.

REFERENCIAS

- M. Jagatia, D. Jalali-Vahid y Z. M. Jin. Elastohydrodynamic lubrication analysis of ultra-high molecular weight polyethylene hip joint replacements under squeeze-film motion. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine* **215**, 141-151 (2001).
- A. F. Cooke, D. Dowson y V. Wright. The Rheology of Synovial Fluid and Some Potential Synthetic Lubricants for Degenerate Synovial Joints. *Engineering in Medicine* **7**, 66-72 (1978).
- P. Bhuanantanondh. Rheology of synovial fluid with and without viscosupplements in patients with osteoarthritis: a pilot study. University of British Columbia, Vancouver. Tesis de maestría (2009).
- Y. Xue, W. Wu, O. Jacobs y B. Schädel. Tribological behaviour of UHMWPE/HDPE blends reinforced with multi-wall carbon nanotubes. *Polymer Testing* **25**, 221-229 (2006).
- M. E. Berli. Estudio Numérico de un modelo viscoelastohidrodinámico aplicado a prótesis de rodilla. Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina. Tesis de maestría (2010).
- B. A. Weiss. *Articulaciones sinoviales artificiales de alta movilidad: investigaciones para el desarrollo de prótesis de por vida*. Tesis doct. (Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina, 2021).
- M. Marian, C. Orgeldinger, B. Rothammer, D. Nečas, M. Vrbka, I. Krupka, M. Hartl, M. A. Wimmer, S. Tremmel y S. Wartzack. Towards the understanding of lubrication mechanisms in total knee replacements – Part II: Numerical modeling. *Tribology International* **156**, 106809 (2021).
- J. D. Paolo y M. E. Berli. Lubrication predictions for total knee prosthesis made of hard materials. *Latin American Applied Research* **45**, 45-50 (2015).
- M. Berli, D. Campana, S. Ubal y J. Di Paolo. Lubrication model of a knee prosthesis, with non newtonian fluid and porous rough material. *Latin American Applied Research* **39**, 105-111 (2009).