CUANTIFICACIÓN CANÓNICA DE FADDEEV-JACKIW EXTENDIDA DE LA ELECTRODINÁMICA NO RELATIVISTA (1+1)-DIMENSIONAL

EXTENDED FADDEEV-JACKIW CANONICAL QUANTIZATION FOR THE (1+1)-DIMENSIONAL NONRELATIVISTIC ELECTRODYNAMICS

E. C. Manavella [*1,2]

[1] *Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, S2000BTP Rosario, Argentina.*

[2] *Instituto de Física Rosario, Universidad Nacional de Rosario, Bv. 27 de Febrero 210 bis, S2000EZP Rosario, Argentina.*

Recibido: 21/05/2020 ; Aceptado: 28/06/2020

Hace algún tiempo, propusimos una extensión del formalismo de Faddeev-Jackiw usual para sistemas vinculados con variables dinámicas de Grassmann en el contexto de la teoría de campos. En el presente trabajo, aplicamos este formalismo extendido a la electrodinámica no relativista (1+1)-dimensional. Comparando los resultados obtenidos con los correspondientes a la implementación del formalismo de Dirac en este modelo, encontramos los mismos vínculos y paréntesis generalizados. De esta manera, podemos concluir que los formalismos de Faddeev-Jackiw extendido y de Dirac pueden considerarse equivalentes, al menos para este modelo. Por el contrario, en este caso, encontramos que no existe equivalencia entre los formalismos de Faddeev-Jackiw usual y de Dirac. Por otro lado, observamos que el formalismo extendido es más económico que el de Dirac con respecto al cálculo de ambos, vínculos y paréntesis generalizados.

Palabras clave: teoría cuántica de campos, formalismo de Faddeev-Jackiw, variables de Grassmann.

Some time ago, we proposed an extension of the usual Faddeev-Jackiw formalism for constrained systems with Grassmann dynamic variables in the field theory context. In the present work, we apply this extended formalism to the (1+1)-dimensional nonrelativistic electrodynamics. By comparing the obtained results with those corresponding to the implementation of Dirac formalism on this model, we find the same constraints and generalized brackets. In this way, we can conclude that the extended Faddeev-Jackiw and the Dirac formalisms can be considered equivalent, at least for this model. On the contrary, in this case, we find that there is no equivalence between the usual Faddeev-Jackiw and the Dirac formalisms. On the other hand, we observe that the extended formalism is more economical than the Dirac one regarding the computation of both, constraints and generalized brackets.

Keywords: quantum field theory, Faddeev-Jackiw formalism, Grassmann variables.

https://doi.org/10.31527/analesafa.2020.31.4.127 ISSN 1850-1168 (online)

I. INTRODUCCIÓN

Como es bien sabido, el formalismo Hamiltoniano de Dirac [1, 2] ha constituido, durante mucho tiempo, el método habitual para efectuar la cuantificación canónica de sistemas vinculados.

Hace algún tiempo, Faddeev y Jackiw [3] desarrollaron otro formalismo para llevar a cabo la cuantificación canónica de sistemas físicos.

Costa y Girotti [4] probaron la equivalencia entre los formalismos de Dirac y de Faddeev-Jackiw (FJ) para sistemas bosónicos, y Govaerts [5] extendió este resultado a sistemas con variables dinámicas de Grassmann.

Barcelos-Neto y Wotzasek [6-8] consideraron el tratamiento de vínculos en el formalismo de FJ para sistemas bosónicos. De esta forma, establecieron el formalismo de FJ usual, denominado algoritmo simpléctico.

El formalismo de FJ usual se utilizó en el marco de la teoría de campos con variables dinámicas bosónicas solamente [6-28] y también con variables dinámicas de Grassmann [29-35].

* manavella@ifir-conicet.gov.ar

En este contexto, propusimos [36] una extensión del formalismo de FJ usual para sistemas vinculados con variables dinámicas de Grassmann en el marco de la teoría de campos, con el propósito de que dicha extensión sea equivalente al formalismo de Dirac.

Estamos interesados en aplicar el formalismo de FJ extendido propuesto a modelos de campos de gauge, y comparar los resultados obtenidos con los encontrados utilizando los formalismos de Dirac y de FJ usual. De esta manera, buscamos poner de manifiesto la efectividad de dicho formalismo en cumplir con el propósito nombrado. En esta búsqueda, tenemos en cuenta los siguientes factores:

(i) Los tipos de términos para los campos de gauge intervinientes en la Lagrangiana.

(ii) La dimensionalidad del espacio-tiempo.

(iii) La consideración de altas derivadas para los campos de gauge (ver, por ejemplo, las referencias correspondientes a altas derivadas en la Ref. [37]).

Con respecto al primer factor, podemos decir que hemos considerado un modelo de campos de gauge no relativista (2+1)-dimensional con un término de Chern-Simons que describe la interacción electromagnética de fermiones compuestos. Este es el primer modelo estudiado en la Ref. [38]. Al aplicar a este modelo el formalismo de FJ usual, obtuvimos sólo dos vínculos y, además, sólo uno de ellos coincidió con uno de los dos vínculos secundarios de Dirac. De esta manera, en este caso, encontramos que los formalismos de FJ usual y de Dirac no son equivalentes. Por otro lado, vimos que el formalismo de FJ extendido provee un vínculo menos del conjunto total de vínculos obtenido por medio del formalismo de Dirac. Asimismo, observamos que este formalismo provee un paréntesis menos del conjunto total de paréntesis de Dirac.

También, hemos considerado la electrodinámica no relativista (2+1)-dimensional sin término de Chern-Simons. Este es el modelo estudiado en la Ref. [36]. Al aplicar el formalismo de FJ usual a este modelo, obtuvimos sólo el vínculo secundario de Dirac. Así, al considerar este modelo, encontramos que los formalismos de FJ usual y de Dirac no son equivalentes, lo mismo que para el modelo anterior. En cambio, observamos que los vínculos y paréntesis encontrados a través de los formalismos de FJ extendido y de Dirac coinciden.

Referido al segundo factor, teniendo en cuenta que los modelos citados fueron desarrollados en 2+1 dimensiones, deseamos analizar la efectividad del formalismo extendido cuando se consideran otras dimensiones del espacio-tiempo.

Con referencia al tercer factor, queremos estudiar la efectividad del formalismo extendido cuando se consideran modelos de campos de gauge en altas derivadas.

Teniendo en cuenta lo dicho recién, el propósito del presente trabajo es aplicar el formalismo extendido al modelo considerado en la Ref. [36], ahora en 1+1 dimensiones.

El trabajo está organizado como sigue. En la Sec. II, recordamos los principales resultados encontrados en la Ref. [36]. Luego, en la Sec. III, consideramos la cuantificación canónica de FJ extendida de la electrodinámica no relativista en 1+1 dimensiones. Finalmente, en la Sec. IV, damos nuestras conclusiones y perspectivas.

II. FORMALISMO DE FADDEEV-JACKIW EXTENDIDO

En la Ref. [38], hemos confeccionado una síntesis de los resultados encontrados en la Ref. [36]. En esta sección, reescribiremos parte de esta síntesis.

El formalismo de FJ debe ser utilizado en sistemas físicos descriptos por Lagrangianas de primer orden. Esto no constituye una restricción porque, como es sabido, cualquier Lagrangiana ordinaria en teorías de campos puede generalmente escribirse en la forma de primer orden introduciendo adecuadas variables dinámicas auxiliares.

De esta manera, partimos considerando una densidad Lagrangiana de primer orden de la forma

$$\mathscr{L}(x) = \dot{\Xi}^A(x)\mathscr{K}_A(x) - \mathscr{V}(x), \tag{1}$$

donde los campos $\Xi^A, A = 1,\ldots,N$, son variables de Grassmann, $\mathscr{K}_A$ son las componentes de la 1-forma canónica $\mathscr{K}(\Xi) = d\Xi^A\mathscr{K}_A(\Xi)$ y $\mathscr{V}$ es la densidad de potencial simpléctico.

Ahora, buscaremos los vínculos asociados con la supermatriz simpléctica

$$\mathscr{M}_{AB}(x,y) = \frac{\delta\mathscr{K}_B(y)}{\delta\Xi^A(x)} - (-1)^{|A||B|}\frac{\delta\mathscr{K}_A(x)}{\delta\Xi^B(y)}, \tag{2}$$

donde la paridad de Grassmann de las variables Ξ^A se denota con $|A| = 0\ (1)(\mathrm{mod}\,2)$ para una variable par (impar) (en todo este trabajo, a menos que sea explícitamente especificado, las derivadas con respecto a Ξ^A son derivadas por izquierda). Entonces, en el cálculo de esta supermatriz, debemos considerar como variables independientes tanto a los campos Ξ^A como a sus derivadas $\partial_\mu\Xi^A$.

Podemos escribir $\mathscr{M}_{AB}(x,y) = \mathscr{M}'_{AB}(x,y)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, donde, de acuerdo a lo que hemos dicho recién, $\mathscr{M}'_{AB}(x,y)$ no puede contener derivadas del tipo ∂_μ. En esta última ecuación, $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \delta(x^1-y^1)\ldots\delta(x^k-y^k)$ es el producto de las funciones delta de las coordenadas espaciales.

Supongamos que la supermatriz $\mathscr{M}'_{AB}(x) = \mathscr{M}'_{AB}(x,x)$ tiene m modos cero por izquierda $\mathbf{u}_{\mathscr{U}}(x), \mathscr{U} = 1,\ldots,m$. Así, estos modos cero son supervectores fila con N componentes $u^A_{\mathscr{U}}(x)$ que verifican la ecuación

$$u^A_{\mathscr{U}}(x)\mathscr{M}'_{AB}(x) = 0. \tag{3}$$

De esta manera, los vínculos asociados con la supermatriz simpléctica están dados por

$$\phi_{\mathscr{I}}(x) = u^A_{\mathscr{I}}(x)\int d\mathbf{y}\frac{\delta\mathscr{V}(y)}{\delta\Xi^A(x)} = 0, \tag{4}$$

donde $\mathscr{I} = 1,\ldots,n\,(n \leq m)$.

De acuerdo a lo que ha sido expresado en el comienzo de esta sección, asumimos que el conjunto de variables de campo dinámicas Ξ^A está compuesto por las independientes más posibles variables de campo dinámicas auxiliares necesarias para escribir la densidad Lagrangiana original en la forma de primer orden (1).

Particionamos el conjunto de variables de campo dinámicas y el correspondiente conjunto de componentes de la 1-forma canónica en la manera $\Xi^A = (\varphi^a,\chi^p)$ y $\mathscr{K}_A = (k_a,l_p)$, respectivamente. En estas ecuaciones, el índice compuesto A se mueve sobre el conjunto $A = (a,p)$, donde $A = 1,\ldots,N, a = 1,\ldots,l$ y $p = 1,\ldots,m(m<N)$.

Las pautas consideradas en esta partición son:

(i) Las variables φ^a son las variables de campo dinámicas independientes con componentes no nulas de la 1-forma canónica más las posibles variables de campo dinámicas auxiliares. De aquí en adelante, estas variables serán llamadas variables de campo dinámicas no singulares. En general, la supermatriz simpléctica $l\times l$ asociada $\bar{\mathscr{M}}_{ab}$, subsupermatriz de la supermatriz simpléctica (2), es no singular.

(ii) Las variables χ^p son las variables de campo dinámicas independientes con componentes de la 1-forma canónica iguales a cero. De ahora en adelante, estas variables serán llamadas variables de campo dinámicas singulares.

Por lo tanto, la densidad Lagrangiana (1) puede expresarse como

$$\mathscr{L}^{(0)} = \dot{\varphi}^a k_a - \mathscr{V}^{(0)}, \tag{5}$$

donde $\mathscr{V}^{(0)} = \mathscr{V}$.

Además, la supermatriz simpléctica $(l+m)\times(l+m)$ (2) puede escribirse en notación compacta como

$$\mathscr{M}_{AB}^{(0)} = \begin{pmatrix} \bar{\mathscr{M}}_{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

En esta ecuación, hemos supuesto que las componentes de la 1-forma canónica correspondientes a las variables φ^a no dependen de las variables χ^p.

Así, existen m modos cero por izquierda $\mathbf{u}_{\mathscr{U}}, \mathscr{U} = 1,\dots,m$, de la supermatriz (6) que verifican la Ec. (3).

Asimismo, por medio de la Ec. (4), obtenemos los vínculos $\phi_{\mathscr{I}} = 0, \mathscr{I} = 1,\dots,n$ $(n \leq m)$. Luego, debemos adicionar estos vínculos a la densidad Lagrangiana utilizando multiplicadores de Lagrange $\lambda^{\mathscr{I}}$ y debemos repetir el procedimiento anterior. Con este fin, escribimos $\lambda^{\mathscr{I}} = \dot{\xi}^{\mathscr{I}}$ y consideramos las variables de campo dinámicas $\Xi^A = \left(\varphi^a, \chi^p, \xi^{\mathscr{I}}\right)$. Consecuentemente, las componentes de la 1-forma canónica son $\mathscr{K}_A = (k_a, l_p, \phi_{\mathscr{I}})$. En estas ecuaciones, el índice compuesto A se mueve sobre el conjunto $A = (a, p, \mathscr{I})$.

Por esto, la densidad Lagrangiana en la primera iteración se escribe

$$\mathscr{L}^{(1)} = \dot{\varphi}^a k_a + \dot{\xi}^{\mathscr{I}} \phi_{\mathscr{I}} - \mathscr{V}^{(1)}, \tag{7}$$

donde la nueva densidad de potencial simpléctico es $\mathscr{V}^{(1)} = \mathscr{V}^{(0)}|_{\phi_{\mathscr{I}}=0}$.

Además, por medio de la Ec. (2), la supermatriz simpléctica extendida $(l+m+n)\times(l+m+n)$ se escribe como

$$\mathscr{M}_{AB}^{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{\mathscr{M}}_{ab} & \mathscr{M}_{a\Sigma} \\ \mathscr{M}_{\Lambda b} & \mathscr{M}_{\Lambda\Sigma} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

En esta ecuación, los elementos $\mathscr{M}_{a\Sigma}, \mathscr{M}_{\Lambda b}$ y $\mathscr{M}_{\Lambda\Sigma}$ tienen dimensiones $l\times(m+n), (m+n)\times l$ y $(m+n)\times(m+n)$, respectivamente, y están dados por

$$\mathscr{M}_{a\Sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta\phi_{\mathscr{J}}(y)}{\delta\varphi^a(x)} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathscr{M}_{\Lambda b}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(-1)^{|\mathscr{I}||b|}\frac{\delta\phi_{\mathscr{I}}(x)}{\delta\varphi^b(y)} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\mathscr{M}_{\Lambda\Sigma}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta\phi_{\mathscr{J}}(y)}{\delta\chi^p(x)} \\ -(-1)^{|\mathscr{I}||q|}\frac{\delta\phi_{\mathscr{I}}(x)}{\delta\chi^q(y)} & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Si la supermatriz (8) es singular, el procedimiento anterior debe ser repetido. En cada paso iterativo, el espacio de configuración se agranda y consecuentemente, las sucesivas supermatrices simplécticas $\mathscr{M}_{AB}^{(k)}$ tienen la forma general dada por las Ecs. (8), (9), (10) y (11), pero con una dimensión mayor. Si no aparece ningún vínculo adicional, el procedimiento iterativo concluye.

Se encuentra que la regularidad de la supermatriz simpléctica que queda al finalizar el procedimiento iterativo depende del modelo considerado. Para modelos invariantes de gauge, esta supermatriz es singular. Sin embargo, en dicha situación, como veremos en la próxima sección, es posible obtener una supermatriz simpléctica final no singular.

Previamente, obtuvimos los vínculos (4) asociados con la supermatriz simpléctica. Ahora, vamos a completar la estructura de vínculos. Con este propósito, debemos considerar los momentos canónicamente conjugados a las variables de campo dinámicas Ξ^A, definidos como

$$P_A = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{\Xi}^A}, \tag{12}$$

donde $\mathscr{L}$ está dada por la Ec. (1). Consecuentemente, sobre el espacio de fases generado (Ξ^A, P_A), quedan definidos los paréntesis de Bose-Fermi [39, 40] a igual tiempo $(x^0 = y^0)$ fundamentales no nulos.

Utilizando las Ecs. (1) y (12), notamos que los momentos P_A verifican los vínculos

$$\Upsilon_A = P_A - \mathscr{K}_A = 0. \tag{13}$$

Por medio de las variables de campo dinámicas $\Xi^A = (\varphi^a, \chi^p, \xi^{\mathscr{I}})$ y las correspondientes componentes de la 1-forma canónica $\mathscr{K}_A = (k_a, l_p, \phi_{\mathscr{I}})$, observamos que estos vínculos se escriben como

$$\Upsilon_A = (p_a^\varphi - k_a, p_p^\chi, -\phi_{\mathscr{I}}) = 0, \tag{14}$$

donde p_a^φ y p_p^χ son los momentos canónicamente conjugados a φ^a y χ^p, respectivamente.

De manera distinta que en el procedimiento de Dirac, en el de FJ no se considera la clasificación de vínculos en primarios o secundarios ni en primera o segunda clase.

En ciertos casos, para un tratamiento conveniente en el contexto de FJ, debemos tener en cuenta la clasificación anterior de vínculos en primera o segunda clase.

Como sabemos, los vínculos de primera clase pueden ser obtenidos por medio del procedimiento habitual utilizado en el método de Dirac desde el conjunto de vínculos dados por la Ec. (14). Un procedimiento alternativo se describe en lo que sigue.

Supongamos que la supermatriz

$$\Upsilon_{AB}(x,y) = ([\Upsilon_A(x), \Upsilon_B(y)]) \tag{15}$$

tiene r modos cero por izquierda $\mathbf{v}_{\mathscr{V}}(x)$ con componentes $v_{\mathscr{V}}^A(x), \mathscr{V} = 1,\dots,r$; esto es,

$$v_{\mathscr{V}}^A(x)\Upsilon_{AB}(x,y) = 0. \tag{16}$$

Así, por medio de las Ecs. (15) y (16), es fácil probar que los vínculos

$$\Sigma_{\mathscr{F}}(x) = v_{\mathscr{F}}^A(x)\Upsilon_A(x) = 0, \tag{17}$$

donde $\mathscr{F} = 1,\dots,f (f \leq r)$, son de primera clase.

Como fue establecido con anterioridad, para modelos invariantes de gauge, la supermatriz simpléctica obtenida cuando el procedimiento iterativo concluye es singular. No obstante, en este caso, es posible encontrar una supermatriz simpléctica final no singular.

Con este fin, debemos buscar condiciones de fijado de gauge adecuadas $\Theta_{\mathscr{F}} = 0, \mathscr{F} = 1,\dots,f$, una por cada vínculo de primera clase. Estas condiciones deben verificar que

$\det G_{PQ} \neq 0$, $P,Q = 1,...,2f$, donde

$$G_{PQ}(x,y) = \left([\Delta_P(x), \Delta_Q(y)]\right), \tag{18}$$

con $\Delta_{\mathscr{F}} = \Sigma_{\mathscr{F}}$ y $\Delta_{f+\mathscr{F}} = \Theta_{\mathscr{F}}$, y deben ser compatibles con las ecuaciones de movimiento.

Al igual que lo que ocurría con los vínculos asociados con la supermatriz simpléctica, debemos introducir estas condiciones en la densidad Lagrangiana. Por esto, las invariancias de gauge desaparecen y así se obtiene una supermatriz simpléctica $\mathscr{M}_{AB}$ no singular. Consecuentemente, puede ser encontrada la inversa de esta supermatriz.

Si la supermatriz simpléctica $\mathscr{M}_{AB}$ es singular, el procedimiento debe ser repetido considerando condiciones de fijado de gauge alternativas.

Ahora, supongamos que la supermatriz simpléctica $\mathscr{M}_{AB}$ es no singular. En esta situación, está definido el paréntesis generalizado en el contexto de FJ o brevemente, el paréntesis de FJ. Los paréntesis de FJ sobre el espacio de configuración son

$$\left[\Xi^A(x), \Xi^B(y)\right]^{FJ} = (-1)^{|A|} \left(\mathscr{M}^{AB}\right)^{-1}(x,y). \tag{19}$$

Si la supermatriz $\mathscr{M}_{AB}$ es singular, los paréntesis de FJ no están definidos.

III. CUANTIFICACIÓN CANÓNICA DE FADDEEV-JACKIW EXTENDIDA DE LA ELECTRODINÁMICA NO RELATIVISTA EN 1+1 DIMENSIONES

Vamos a considerar la electrodinámica no relativista en 1+1 dimensiones descripta a través de la siguiente densidad Lagrangiana singular:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_e^{em} + \mathscr{L}_{em}, \tag{20}$$

donde $\mathscr{L}_e^{em}$ está dada por

$$\mathscr{L}_e^{em} = i\psi^\dagger \mathscr{D}_0 \psi + \frac{1}{2m}\psi^\dagger \mathscr{D}^2 \psi - \mu \psi^\dagger \psi \tag{21}$$

y $\mathscr{L}_{em}$ se escribe como

$$\mathscr{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{22}$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor del campo electromagnético. En la Ec. (22), los índices griegos toman los valores $\mu, \nu = 0, 1$.

Utilizamos unidades naturales donde $\hbar = c = 1$. La métrica Minkowskiana es $g_{\mu\nu} = diag(1,-1)$.

En la Ec. (21), la derivada covariante que involucra al campo electromagnético A_μ se escribe como $\mathscr{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ (tomamos la carga del electrón como $-e$) y también, $\mathscr{D}^2 = \mathscr{D}_1^2$. El campo de materia ψ es un campo espinorial cargado que describe electrones. m y μ son la masa y el potencial químico de los electrones, respectivamente.

Por medio de la expresión de la derivada covariante, reescribimos la Ec. (21) como sigue:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_e^{em} &= i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger \partial_0 \psi + i\frac{\tau-1}{2}\partial_0 \psi^\dagger \psi + e\psi^\dagger A_0 \psi \\ &\quad + \frac{1}{2m}\psi^\dagger \mathscr{D}^2 \psi - \mu \psi^\dagger \psi. \end{aligned} \tag{23}$$

En esta ecuación, el término fermiónico cinético está escrito en la forma general a través del parámetro arbitrario τ [41].

Ahora, por medio del método de FJ extendido, desarrollaremos la cuantificación canónica del modelo y compararemos los resultados encontrados con los correspondientes a la utilización del procedimiento de Dirac en el modelo. Por esto, el punto de partida es escribir la densidad Lagrangiana (20) en la forma de primer orden (1).

Las variables de campo dinámicas independientes son $A_\mu, \psi_\alpha^\dagger$ y ψ_α, donde el nuevo índice griego toma los valores $\alpha = 1,2$. Así, tenemos

$$\mathscr{L}^{(0)} = \dot{A}_1 k_A^1 + \dot{\psi}_\alpha^\dagger k_\alpha + \dot{\psi}_\alpha k_\alpha^\dagger - \mathscr{V}^{(0)}. \tag{24}$$

En esta ecuación, la densidad de potencial simpléctico es

$$\begin{aligned} \mathscr{V}^{(0)} &= -\frac{1}{2}P^1 P_1 - A_0 \partial_1 P^1 - e\psi^\dagger A_0 \psi - \frac{1}{2m}\psi^\dagger \mathscr{D}^2 \psi \\ &\quad + \mu \psi^\dagger \psi \end{aligned} \tag{25}$$

y las componentes de la 1-forma canónica son

$$k_A^1 = P^1, \tag{26}$$

$$k_\alpha = i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha, \tag{27}$$

$$k_\alpha^\dagger = -i\frac{\tau+1}{2}\psi_\alpha^\dagger, \tag{28}$$

$$l_A^0 = 0. \tag{29}$$

Observando la Ec. (26), vemos que es necesario introducir como variable de campo dinámica auxiliar la componente espacial del momento P^μ canónicamente conjugado a A_μ, definido por la Ec. (12), con componente de la 1-forma canónica igual a cero. Además, por medio de la Ec. (29), observamos que A_0 es una variable de campo dinámica singular.

Consecuentemente, las variables de campo dinámicas iniciales son $\Xi^A = \left(A_1, P^1, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\beta, A_0\right)$ y las correspondientes componentes de la 1-forma canónica son $\mathscr{K}_A = (k_A^1, 0, k_\alpha, k_\beta^\dagger, 0)$.

En este caso, la matriz simpléctica singular $\mathscr{M}_{AB}^{(0)}$, dada por la Ec. (6), tiene dimensión 7×7 y la submatriz no singular 6×6 $\bar{\mathscr{M}}_{ab}$ construida en base a las variables de campo dinámicas no singulares, $A_1, P^1, \psi_\alpha^\dagger$ y ψ_β, se escribe

$$\bar{\mathscr{M}}_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\delta_{\alpha\beta} \\ 0 & 0 & -i\delta_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{30}$$

Ahora, buscamos los vínculos asociados con la matriz simpléctica $\mathscr{M}^{(0)}_{AB}$. Así, utilizando las Ecs. (3), (4), (6) y (25), tenemos el vínculo

$$\phi_1 = \partial_1 P^1 + e\psi^\dagger\psi = 0. \tag{31}$$

Por lo tanto, este procedimiento debe ser repetido.

Por esto, debemos construir la densidad Lagrangiana en la primera iteración

$$\mathscr{L}^{(1)} = \dot{A}_1 k^1_A + \dot{\psi}^\dagger_\alpha k_\alpha + \dot{\psi}_\alpha k^\dagger_\alpha + \dot{\xi}^1\phi_1 - \mathscr{V}^{(1)}, \tag{32}$$

donde

$$\mathscr{V}^{(1)} = \mathscr{V}^{(0)}|_{\phi_1=0} = -\frac{1}{2}P^1P_1 - \frac{1}{2m}\psi^\dagger\mathscr{D}^2\psi + \mu\psi^\dagger\psi. \tag{33}$$

El espacio de configuración está ahora establecido por las variables de campo dinámicas $\Xi^A = \left(A_1, P^1, \psi^\dagger_\alpha, \psi_\beta, A_0, \xi^1\right)$, cuyas respectivas componentes de la 1-forma canónica son $\mathscr{K}_A = (k^1_A, 0, k_\alpha, k^\dagger_\beta, 0, \phi_1)$.

Utilizando las Ecs. (8), (9), (10), (11) y (31), calculamos la supermatriz simpléctica extendida 8×8 obtenida en la primera iteración

$$\mathscr{M}^{(1)}_{AB} = \begin{pmatrix} \bar{\mathscr{M}}_{ab} & L \\ N & O \end{pmatrix}, \tag{34}$$

donde L es la supermatriz 6×2

$$L(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \partial^y_1 \\ 0 & e\psi_\alpha(y) \\ 0 & -e\psi^\dagger_\alpha(y) \end{pmatrix}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{35}$$

N es la supermatriz 2×6

$$N(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial^x_1 & -e\psi_\beta(x) & e\psi^\dagger_\beta(x) \end{pmatrix}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{36}$$

y O es la matriz nula 2×2.

Ahora, calculamos los vínculos asociados con la supermatriz simpléctica extendida $\mathscr{M}^{(1)}_{AB}$.

Así, por medio de las Ecs. (3), (4), (33) y (34), encontramos que no existen nuevos vínculos. Consecuentemente, el procedimiento iterativo finaliza.

Ahora, analizamos la regularidad de la supermatriz (34). Con este propósito, debemos reescribirla en la forma estándar, reordenando sus elementos matriciales, y evaluando su superdeterminante [42]. De esta manera, encontramos que este superdeterminante se anula y así $\mathscr{M}^{(1)}_{AB}$ es singular.

En consecuencia, la supermatriz simpléctica obtenida cuando se completa el procedimiento iterativo es singular. Este resultado era de esperar debido a que estamos en presencia de un modelo de gauge.

Ahora, procedemos a completar la estructura de vínculos del modelo. Con este fin, por medio del último conjunto de variables de campo dinámicas considerado y las correspondientes componentes de la 1-forma canónica, utilizando las Ecs. (12), (13), (26), (27), (28), (29), (32) y (33), encontramos que las funciones Υ_A son

$$\Upsilon_A = \left(0, 0, \pi_\alpha - i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha, \pi^\dagger_\beta + i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger_\beta, P^0, -\phi_1\right), \tag{37}$$

donde $\pi_\alpha, \pi^\dagger_\beta$ y P^0 son los momentos canónicamente conjugados a las variables de campo $\psi^\dagger_\alpha, \psi_\beta$ y A_0, respectivamente.

De esta manera, tenemos los vínculos

$$\Upsilon_{1\alpha} = \pi_\alpha - i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha = 0, \tag{38}$$

$$\Upsilon^\dagger_{1\alpha} = \pi^\dagger_\alpha + i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger_\alpha = 0, \tag{39}$$

$$\Upsilon_2 = P^0 = 0 \tag{40}$$

y $\Upsilon_3 = -\phi_1 = 0$.

Ahora, presentamos la estructura de vínculos del modelo obtenida por medio del formalismo de Dirac. Como puede verse, esta estructura de vínculos es la correspondiente a la Ref. [37] luego de eliminar las altas derivadas. Así, en el lenguaje de Dirac, encontramos que los vínculos primarios coinciden con los vínculos (38), (39) y (40), y el vínculo secundario coincide con el vínculo (31).

De esta manera, observamos que el conjunto total de vínculos encontrados por medio del método de FJ extendido coincide con el obtenido en base al método de Dirac. Al aplicar, en este modelo, el formalismo de FJ usual, obtenemos sólo el vínculo secundario (31) y, una vez más, encontramos que los formalismos de FJ usual y de Dirac no son equivalentes.

Es fácil mostrar que el vínculo (40) es de primera clase mientras que los vínculos (31), (38) y (39) son de segunda clase. No obstante, estos últimos no forman un conjunto minimal de vínculos de segunda clase. La razón es que el superdeterminante de la supermatriz cuyos elementos son los paréntesis de Bose-Fermi entre estos vínculos se anula.

Por lo tanto, debe existir al menos una combinación lineal de vínculos de segunda clase que sea independiente del vínculo de primera clase anterior y debe también ser de primera clase. Encontramos que existe sólo una de tales combinaciones, que es la siguiente:

$$\Sigma_1 = \psi^\dagger\Upsilon_1 - \psi\Upsilon^\dagger_1 + \frac{i}{e}\Upsilon_3 = \psi^\dagger\pi - \psi\pi^\dagger - \frac{i}{e}\partial_1 P^1 = 0. \tag{41}$$

Consecuentemente, el vínculo de segunda clase (31) debe ser eliminado y así el conjunto final de vínculos queda:

(i) Los vínculos de primera clase definidos por las funciones Σ_1 y $\Sigma_2 = \Upsilon_2$. Como es bien sabido, estos vínculos están relacionados a las simetrías del grupo de gauge $U(1)$ del modelo.

(ii) Los vínculos de segunda clase definidos por las funciones $\Upsilon_{1\alpha}$ y $\Upsilon^\dagger_{1\alpha}$.

Ahora, buscamos una supermatriz simpléctica final no singular por medio de condiciones de fijado de gauge adecuadas. Teniendo en cuenta que el presente modelo tiene dos vínculos de primera clase, debemos considerar dos de tales condiciones. Como puede verse, un conjunto adecuado de dichas condiciones es el correspondiente a la Ref. [37] luego de eliminar las altas derivadas. Este conjunto viene dado por

$$\Theta_1 = \partial^1 A_1 = 0, \tag{42}$$

$$\Theta_2 = \nabla^2 A_0 - \partial_1 P^1 = 0, \tag{43}$$

donde $\nabla^2 = \partial_1 \partial^1$ es el operador Laplaciano.

Así, consideramos la densidad Lagrangiana en la segunda iteración dada por

$$\mathscr{L}^{(2)} = \dot{A}_1 k_A^1 + \dot{\psi}_\alpha^\dagger k_\alpha + \dot{\psi}_\alpha k_\alpha^\dagger + \dot{\xi}^{\mathscr{I}} \phi_{\mathscr{I}} - \mathscr{V}^{(2)}, \tag{44}$$

donde $\mathscr{I} = 1,2,3, \phi_2 = \Theta_1, \phi_3 = \Theta_2$ y

$$\begin{aligned} \mathscr{V}^{(2)} &= \mathscr{V}^{(1)}|_{\phi_2=\phi_3=0} \\ &= -\frac{1}{2} P^1 P_1 \\ &\quad + \frac{1}{2m} \psi^\dagger \left(\nabla^2 - 2ieA_1 \partial^1 - e^2 A_1 A^1 \right) \psi. \end{aligned} \tag{45}$$

El espacio de configuración está ahora dado por las variables de campo dinámicas $\Xi^A = \left(A_1, P^1, \psi_\alpha^\dagger, \psi_\beta, A_0, \xi^{\mathscr{I}} \right)$, cuyas correspondientes componentes de la 1-forma canónica son $\mathscr{K}_A = (k_A^1, 0, k_\alpha, k_\beta^\dagger, 0, \phi_{\mathscr{I}})$.

Utilizando las Ecs. (8), (9), (10), (11), (31), (42) y (43), encontramos la supermatriz simpléctica extendida 10×10 obtenida en la segunda iteración

$$\mathscr{M}_{AB}^{(2)} = \begin{pmatrix} \bar{\mathscr{M}}_{ab} & P \\ Q & R \end{pmatrix}, \tag{46}$$

donde P es la supermatriz 6×4

$$P(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_1^y & 0 \\ 0 & \partial_1^y & 0 & -\partial_1^y \\ 0 & e\psi_\alpha(y) & 0 & 0 \\ 0 & -e\psi_\alpha^\dagger(y) & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{47}$$

Q es la supermatriz 4×6

$$Q(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_1^x & -e\psi_\beta(x) & e\psi_\beta^\dagger(x) \\ \partial_1^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1^x & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{48}$$

y R es la matriz 4×4

$$R(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \nabla^2 \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{49}$$

Encontramos que la supermatriz $\mathscr{M}_{AB}^{(2)}$ es no singular. Consecuentemente, luego de que se imponen las condiciones de fijado de gauge (42) y (43), obtenemos una supermatriz simpléctica final no singular. Por el contrario, aplicando la condición de fijado de gauge (42) (gauge de Coulomb) en lugar del conjunto completo de condiciones (42) y (43), no encontramos la requerida supermatriz simpléctica final no singular, como era de esperar. Lo mismo ocurre con la condición (43).

Ahora, calculamos los paréntesis de FJ para las variables de campo dinámicas iniciales en el gauge (42) y (43) utilizando la Ec. (19) con la supermatriz simpléctica dada por la Ec. (46).

Así, tenemos que

$$\left(\left[\Xi^A(x), \Xi^B(y) \right]^{FJ} \right) = \begin{pmatrix} S & T \\ U & D \end{pmatrix}, \tag{50}$$

donde S es la matriz 6×6

$$S(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & f(x,y) & 0 & 0 \\ -f(x,y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\alpha\beta}(x,y) \\ 0 & 0 & g_{\alpha\beta}(x,y) & 0 \end{pmatrix}, \tag{51}$$

T es la matriz 6×4

$$T(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_1^y & 0 \\ 0 & \partial_1^y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|, \tag{52}$$

U es la matriz 4×6

$$U(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_1^x & 0 & 0 \\ \partial_1^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \tag{53}$$

y D es la matriz 4×4

$$D(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|. \tag{54}$$

En la Ec. (51), $f(x,y) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \frac{1}{2}\nabla^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ y $g_{\alpha\beta}(x,y) = -i\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$.

De esta manera, utilizando las Ecs. (50), (51), (52), (53) y (54) obtenemos los paréntesis de FJ no nulos en el gauge

(42) y (43)
campo-campo:

$$[\psi^\dagger_\alpha(x),\psi_\beta(y)]^{FJ}_+ = [\psi_\beta(y),\psi^\dagger_\alpha(x)]^{FJ}_+ = -i\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad (55)$$

campo-momento:

$$\begin{aligned} \left[A_1(x),P^1(y)\right]^{FJ}_- &= -\left[P^1(y),A_1(x)\right]^{FJ}_- \\ &= \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\frac{1}{2}\nabla^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, \end{aligned} \quad (56)$$

donde la notación $[\ .\ ,\ .\ ]_\mp$ indica paréntesis entre variables de Grassmann bosónicas y fermiónicas, respectivamente.

Así, encontramos que los paréntesis de FJ no nulos, dados por las Ecs. (55) y (56), coinciden con los correspondientes paréntesis de Dirac no nulos, dados en la Ref. [37].

Es importante señalar que notamos que los desarrollos algebraicos necesarios para obtener los vínculos y los paréntesis generalizados por medio del formalismo de FJ extendido son más reducidos que los correspondientes al método de Dirac.

Retomando el procedimiento de cuantificación, debemos imponer los paréntesis de FJ. Consecuentemente, utilizando las Ecs. (38), (39), (40) y (43), encontramos que las siguientes variables de campo quedan determinadas:

$$\pi_\alpha = i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha, \quad (57)$$

$$\pi^\dagger_\alpha = -i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger_\alpha, \quad (58)$$

$$P^0 = 0, \quad (59)$$

$$A_0(x) = -\frac{1}{2}\int d^1y\partial_1 P^1(y)|\mathbf{x}-\mathbf{y}|. \quad (60)$$

De esta manera, la dinámica del modelo clásico queda completamente especificada.

Finalmente, se realiza la cuantificación canónica reemplazando los paréntesis de FJ entre variables de campo por los conmutadores o anticonmutadores a igual tiempo entre operadores de campo de acuerdo con la regla usual [2].

IV. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Las principales derivaciones de la Ref. [36] han sido reescritas.

Luego, en base a dichas derivaciones, fue realizada la cuantificación canónica de FJ extendida de la electrodinámica no relativista en 1+1 dimensiones, y los resultados obtenidos fueron comparados con los encontrados utilizando el formalismo de Dirac. De esta manera, vimos que los formalismos de FJ extendido y de Dirac proveen los mismos vínculos y paréntesis generalizados, sugiriendo así la equivalencia entre estos formalismos, al menos para el presente modelo. Por el contrario, en este caso, encontramos que los formalismos de FJ usual y de Dirac no son equivalentes.

Por otro lado, encontramos que el formalismo de FJ extendido es más económico que el de Dirac con respecto al cálculo tanto de los vínculos como de los paréntesis generalizados.

En futuros trabajos, aplicaremos el formalismo de FJ extendido a dos modelos de campos de gauge, uno (3+1)-dimensional y otro en altas derivadas.

REFERENCIAS

[1] P. A. M. Dirac. Generalized Hamiltonian dynamics. Canad. J. Math. **2,** 129-148 (1950).

[2] P. A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University Press, New York, 1964).

[3] L. Faddeev y R. Jackiw. Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems. Phys. Rev. Lett. **60,** 1692-1694 (1988).

[4] M. E. V. Costa y H. O. Girotti. Comment on “Self-dual fields as charge-density solitons”. Phys. Rev. Lett. **60,** 1771 (1988).

[5] J. Govaerts. Hamiltonian reduction of first-order actions. Int. J. Mod. Phys. A **5,** 3625-3640 (1990).

[6] J. Barcelos-Neto y C. Wotzasek. Symplectic quantization of constrained systems. Mod. Phys. Lett. A **7,** 1737-1747 (1992).

[7] J. Barcelos-Neto y C. Wotzasek. Faddeev-Jackiw quantization and constraints. Int. J. Mod. Phys. A **7,** 4981-5003 (1992).

[8] H. Montani y C. Wotzasek. Faddeev-Jackiw quantization of non-Abelian systems. Mod. Phys. Lett. A **8,** 3387-3396 (1993).

[9] A. Foussats, C. Repetto, O. P. Zandron y O. S. Zandron. Nonlinear sigma model in the Faddeev-Jackiw quantization formalism. Int. J. Theor. Phys. **36,** 2923-2935 (1997).

[10] C. P. Natividade, A. de Souza Dutra y H. Boschi-Filho. Symmetry transform in Faddeev-Jackiw quantization of dual models. Phys. Rev. D **59,** 065016 (1999).

[11] L. Liao e Y.-C. Huang. Faddeev-Jackiw quantization of the gauge invariant self-dual fields relative to string theory. High Energy Phys. Nucl. Phys. **30,** 191-195 (2006).

[12] L. Liao e Y.-C. Huang. Path integral quantization corresponding to Faddeev-Jackiw canonical quantization. Phys. Rev. D **75,** 025025 (2007).

[13] J.-L. Yang e Y.-C. Huang. Improved Faddeev-Jackiw quantization of the electromagnetic field and Lagrange multiplier fields. Chin. Phys. C **32,** 788-792 (2008).

[14] Y.-C. Huang y J.-L. Yang. Modified Faddeev–Jackiw quantization of massive non-Abelian Yang–Mills fields and Lagrange multiplier fields. Phys. Lett. B **668,** 438-441 (2008).

[15] Y.-C. Huang y L.-X. Yi. Faddeev–Jackiw and the improved methods in quantization of the superconductive system. Ann. Phys. **325,** 2140-2152 (2010).

[16] E. M. C. Abreu, A. C. R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, R. C. N. Silva y C. Wotzasek. Obtaining non-Abelian field theories via the Faddeev–Jackiw symplectic formalism. Phys. Lett. A **374,** 3603-3607 (2010).

[17] R. Bufalo y B. M. Pimentel. Higher-derivative non-Abelian gauge fields via the Faddeev–Jackiw formalism. Eur. Phys. J. C **74,** 2993 (2014).

[18] D. J. Toms. Faddeev-Jackiw quantization and the path integral. Phys. Rev. D **92,** 105026 (2015).

[19] C. Prescod-Weinstein y E. Bertschinger. An extension of the Faddeev–Jackiw technique to fields in curved spacetimes. Class. Quantum Grav. **32,** 075011 (2015).

[20] A. Escalante y O. Rodríguez Tzompantzi. Dirac's and generalized Faddeev–Jackiw brackets for Einstein's theory in the $G \longrightarrow 0$ limit. Ann. Phys. **364,** 136-147 (2016).

[21] A. Escalante y P. Cavildo Sánchez. Faddeev–Jackiw quantization of four dimensional BF theory. Ann. Phys. **374,** 375-394 (2016).

[22] A. Escalante y O. Rodríguez-Tzompantzi. On the Faddeev–Jackiw symplectic framework for topologically massive gravity. Eur. Phys. J. C **76,** 577 (2016).

[23] A. C. R. Mendes, F. I. Takakura, E. M. C. Abreu y J. A. Neto. Faddeev-Jackiw analysis for the charged compressible fluid in a higher-derivative electromagnetic field background. Europhys. Lett. **116,** 20004 (2016).

[24] R. Cartas-Fuentevilla, A. Escalante y A. Herrera-Aguilar. Symplectic analysis of three-dimensional Abelian topological gravity. Eur. Phys. J. Plus **132,** 63 (2017).

[25] A. Escalante y H. O. Ochoa-Gutiérrez. Canonical and symplectic analysis for three dimensional gravity without dynamics. Ann. Phys. **378,** 396-406 (2017).

[26] O. Rodríguez-Tzompantzi y A. Escalante. Gauge symmetry and constraints structure for topologically massive AdS gravity: a symplectic viewpoint. Eur. Phys. J. C **78,** 369 (2018).

[27] A. Escalante y P. Cavildo-Sánchez. Symplectic approach of three-dimensional Palatini theory plus a Chern-Simons term. Adv. Math. Phys. **2018,** 3474760 (2018).

[28] A. Escalante y C. Medel-Portugal. Faddeev–Jackiw quantization of topological invariants: Euler and Pontryagin classes. Ann. Phys. **391,** 27-46 (2018).

[29] A. Foussats y O. S. Zandron. About the supersymmetric extension of the symplectic Faddeev - Jackiw quantization formalism. J. Phys. A: Math. Gen. **30,** L513-L517 (1997).

[30] A. Foussats, C. Repetto, O. P. Zandron y O. S. Zandron. Faddeev-Jackiw quantization method in conformal three-dimensional supergravity. Int. J. Theor. Phys. **36,** 55-65 (1997).

[31] A. Foussats, C. Repetto, O. P. Zandron y O. S. Zandron. Faddeev-Jackiw method versus canonical exterior formalism in quantum $(1+1)$ supergravity. Class. Quantum Grav. **14,** 269-284 (1997).

[32] A. Foussats, C. Repetto, O. P. Zandron y O. S. Zandron. Supersymmetric anyons in the Faddeev–Jackiw quantization picture. Ann. Phys. **268,** 225-245 (1998).

[33] E. C. Manavella, C. E. Repetto y O. P. Zandron. Path integral and BRST quantization in a pure supersymmetric anyon model. Int. J. Theor. Phys. **38,** 1837-1849 (1999).

[34] Y.-C. Huang, L. Liao y X.-G. Lee. Faddeev–Jackiw canonical path integral quantization for a general scenario, its proper vertices and generating functionals. Eur. Phys. J. C **60,** 481-487 (2009).

[35] S. Dengiz. Faddeev–Jackiw Hamiltonian reduction for free and gauged Rarita–Schwinger theories. Eur. Phys. J. C **76,** 566 (2016).

[36] E. C. Manavella. Faddeev-Jackiw formalism for constrained systems with Grassmann dynamical field variables. Int. J. Mod. Phys. A **27,** 1250145 (2012).

[37] E. C. Manavella. Quantum field formalism for the higher-derivative nonrelativistic electrodynamics in 1+1 dimensions. Int. J. Mod. Phys. A **34,** 1950050 (2019).

[38] E. C. Manavella. Composite particles within the Faddeev–Jackiw framework. Nonequivalence between the Dirac and Faddeev–Jackiw formalisms. Int. J. Mod. Phys. A **29,** 1450076 (2014).

[39] R. Casalbuoni. On the quantization of systems with anticommuting variables. Nuovo Cimento A **33,** 115-125 (1976).

[40] R. Casalbuoni. The classical mechanics for bose-fermi systems. Nuovo Cimento A **33,** 389-431 (1976).

[41] K. Sundermeyer. *Constrained Dynamics* (Springer, Berlin, 1982).

[42] B. S. DeWitt. *Supermanifolds* (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).