

ANÁLISIS DE ESPECTROS DE TAMAÑOS DE GOTAS DE NUBES MEDIANTE LA DIVERGENCIA DE JENSEN-SHANNON

ANALYSIS OF CLOUD DROPLET SIZE SPECTRA BY JENSEN-SHANNON DIVERGENCE

G. Aguirre Varela^{1,3}, M. Ré^{1,2}, and D. Stoler Flores¹

¹FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba

²CIII, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba.

³IFEG-CONICET, UNC- Córdoba

Recibido:10/10/18; aceptado: 23/07/19

El propósito de este trabajo es emplear la divergencia de Jensen-Shannon para comparar espectros de tamaños de gotas de nubes correspondientes a diferentes condiciones experimentales. Se analizan resultados de mediciones de laboratorio en los que se determinó el diámetro de gotas, producidas mediante un nebulizador ultrasónico, sometidas a diferentes condiciones de movimiento dentro de una “caja de nube”. Se considera en particular la tasa de disipación de energía por turbulencia. A los espectros de gotas se los aproximó mediante el método del kernel de densidad.

Palabras Clave: Nubes, gotas, distribución, divergencia, Jensen-Shannon.

The purpose of this work is to use the divergence of Jensen-Shannon to compare spectra of cloud droplet sizes corresponding to different experimental conditions. Results of laboratory measurements are analyzed in which the diameter of droplets, produced by means of an ultrasonic nebulizer, are determined, subject to different movement conditions within a “cloud box”. The turbulence energy dissipation rate is particularly considered. The droplet spectra were approximated by the density kernel method.

Keywords: cloud, drops, distribution, divergence, Jensen-Shannon.

I. INTRODUCCIÓN

El crecimiento de gotas de nube, su distribución de tamaños y su posterior transformación en gotas de lluvia son fenómenos que no pueden ser explicados solamente mediante el fenómeno de condensación. En el proceso participa, además, el fenómeno de coalescencia; ya que al producirse la colisión de dos gotas de agua con suficiente energía cinética, éstas pueden unirse y terminar formando una sola gota. Este mecanismo de crecimiento es más eficaz cuando las gotas tienen diámetros mayores a los $100\mu\text{m}$. Los procesos involucrados en la formación de gotas en el rango de $20\mu\text{m}$ a $100\mu\text{m}$ de diámetro dentro de una nube que produce lluvia todavía no están completamente entendidos.¹²

Para determinar la distribución de tamaños de gotas de nube se han realizado trabajos experimentales y también estudios teóricos. Observaciones experimentales han mostrado la existencia de un espectro estacionario en algunos tipos de nubes, en particular en los estratos cúmulos. Basados en estos resultados, Xenwen y Zheng en 1994³, Liu y Hallett 1998,⁴ propusieron para el estudio de la distribución de tamaños de gotas, un marco similar al de ensambles de mecánica estadística. Se empleó el principio de Shannon de máxima entropía que establece que un sistema estocástico caracterizado por una variable

aleatoria continua y por algunas restricciones, tiene asociada una distribución de probabilidad de equilibrio, la cual maximiza la entropía. Así, la distribución de tamaños (estados microscópicos) surgiría como solución de maximizar la entropía, sujeta por vínculos macroscópicos (por ejemplo: contenido de agua líquida, número de gotas, etc.).

Siguiendo a Liu y Hallett (1998), Liu y col. en 2002 generalizaron los resultados y determinaron la distribución de tamaños $\rho(x)$, considerando los vínculos⁵:

$$\int \rho(x) dx = 1 \quad (1)$$

$$\int x \rho(x) dx = \frac{X}{N} \quad (2)$$

donde x es la variable considerada para la distribución, relacionada con los procesos físicos del sistema, X es una cantidad que representa a las x por unidad de volumen y N es la concentración total de gotas. Además consideraron la relación:

$$x = aD^b \quad (3)$$

donde D es el diámetro de una gota, a y b son parámetros que están relacionados con los mecanismos físicos que controlan el sistema de gotas. Estos

¹guiava@gmail.com

autores reportaron que la distribución de tamaños se corresponde con una de Weibull:

$$w_g(D) = N_o D^{b-1} \exp(-\alpha D^b) \quad (4)$$

donde $N_o = ab/\beta$, $\alpha = a/\beta$, y $\beta = X/N$. En el caso particular en el que x es la masa de una gota, $b = 3$, X puede ser identificado con el contenido de agua líquida de la nube (LWC) y β con el valor promedio de los diámetros al cubo.

La divergencia de Jensen-Shannon (DJS) es una medida entrópica de distancia entre distribuciones de probabilidad.⁶⁷ Se usa aquí esta propiedad como índice de comparación entre distribuciones. Si las distribuciones de probabilidad son desconocidas y sólo se cuenta con el registro de los valores medidos, es necesario aproximar las distribuciones.

En este trabajo se usa el método del Kernel de densidad, un método no paramétrico, para aproximar las distribuciones de diámetros de gotas de nube generadas en experimentos de laboratorio y obtenidas en diversas condiciones dinámicas. Estas distribuciones se compararon entre sí utilizando la DJS, con el objeto de determinar si era posible asociar diferentes valores de la divergencia con las distintas condiciones dinámicas de las nubes. Por otro lado, se compararon las distribuciones generadas con los datos experimentales con las distribuciones de Weibull propuestas por Liu and Hallett (1998) y por Liu y col (2002).

II. MÉTODO

Divergencia de Jensen-Shannon

La DJS con pesos para dos densidades de probabilidad, $\mu_1(y)$ y $\mu_2(y)$, con y una variable de rango continuo se define por:

$$D[\mu_1, \mu_2] = H \left[\sum_i \pi_i \mu_i(y) \right] - \sum_i \pi_i H[\mu_i(y)] \quad (5)$$

donde

$$H[\mu(y)] = - \int dy \mu(y) \ln[\mu(y)] \quad (6)$$

es la entropía de Gibbs-Shannon de la densidad de probabilidad $\mu_i(y)$ y π_i es el peso que se le ha asignado en el cálculo de la divergencia ($\pi_1 + \pi_2 = 1$). Para realizar el cálculo de la DJS a partir del registro medido se escribió a la DJS de la siguiente forma:

$$D[\mu_1, \mu_2] = \sum_i \pi_i \int_{-\infty}^{\infty} dy \mu_i(y) \ln \left[\frac{\mu_i(y)}{\phi(y)} \right] \quad (7)$$

en donde

$$\phi(y) = \sum_i \pi_i \mu_i(y) \quad (8)$$

Kernel de densidad

La distribución de tamaños de gotas se aproximó usando el método del Kernel de densidad;⁸ esto es, a partir de los valores registrados y_j se construye la distribución aproximada:

$$\tilde{\mu}(y) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n K \left(\frac{y - y_j}{h} \right) \quad (9)$$

donde la suma se extiende a todo el conjunto de valores medidos. La función del kernel $K(y)$ sólo debe satisfacer la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy K(y) = 1 \quad (10)$$

En este trabajo se usó un kernel Gaussiano, con el valor óptimo del parámetro de suavizado informado en la literatura:

$$h \simeq 1,06 s n^{-1/5} \quad (11)$$

siendo s^2 la varianza muestral y n el número de valores del registro.⁹

Aproximación del valor de expectación

Habiendo aproximado las densidades de probabilidad por el método del Kernel, se usaron como pesos en (7) y en (8) los valores:

$$\pi_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2} \quad (12)$$

donde n_1 y n_2 son las cantidades de elementos correspondientes a la muestras que se desea comparar. Así, se puede completar el cálculo y obtener el valor de las integrales.

Reconocemos en estas integrales el valor de expectación

$$\left\langle \ln \left[\frac{\mu_i(y)}{\phi(y)} \right] \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy \mu_i(y) \ln \left[\frac{\mu_i(y)}{\phi(y)} \right] \quad (13)$$

que podemos aproximar por el método de Monte Carlo⁹

$$\left\langle \ln \left[\frac{\mu_i(y)}{\phi(y)} \right] \right\rangle \simeq \frac{1}{n_i} \sum_{j_i=1}^{n_i} \ln \left[\frac{\tilde{\mu}_i(y_{j_i})}{\tilde{\phi}(y_{j_i})} \right] \quad (14)$$

Se debe notar aquí que la suma está restringida a los valores en el subconjunto i .

Finalmente, usando (7), (9), (14), obtenemos

$$\tilde{D}[\mu_1, \mu_2] \simeq \frac{1}{n_T} \sum_i \sum_{j_i=1}^{n_i} \ln \left[\frac{\tilde{\mu}_i(y_{j_i})}{\tilde{\phi}(y_{j_i})} \right] \quad (15)$$

donde $n_T = n_1 + n_2$

III. Análisis de los datos experimentales

Los diámetros medidos, correspondieron a gotas de una nube generada mediante un nebulizador ultrasónico. La nube era contenida dentro de un recinto en el cual alcanzaba un estado pseudo estacionario, con un contenido de agua líquida (LWC) constante, con el que se caracteriza la concentración de nube.¹⁰ La determinación de los diámetros de las gotas se realizó mediante la captura de las mismas dentro de una solución de Formvar®; esto es, se utilizaron réplicas plásticas. El espesor de la película plástica que se usó fue suficientemente grueso como para que las gotas capturadas se sumergieran completamente en la solución permaneciendo esféricas, por lo tanto cuando se hubo solidificado el Formvar (i.e. evaporado el solvente), la huella tuvo la forma y el tamaño de la gota que la produjo.¹¹ En la Figura 1 se muestran microfotografías de réplicas en Formvar®.

A los efectos de cambiar la dinámica de la nube, se utilizaron ventiladores para producir diferentes grados de perturbación dentro del recinto que contenía la nube. Para caracterizar el estado dinámico se determinó la tasa de disipación energética ϵ . Para esto se midió la velocidad del aire en función del tiempo en distintos lugares del recinto que contenía la nube y se determinó su varianza.

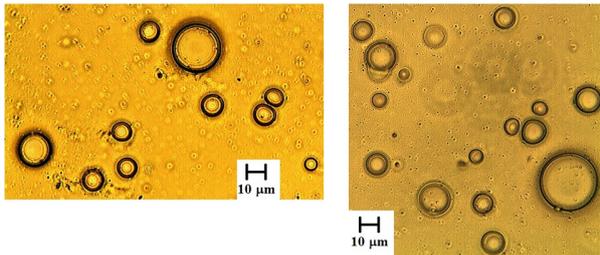


Figura 1: Microfotografías de réplicas de gotas de nube. El espesor de las películas de Formvar® es tal que las gotas capturadas mantienen la forma esférica

IV. Resultados

Se analizaron 16 espectros de nube con LWC entre $0,1 g m^{-3}$ y $1,7 g m^{-3}$. Se trabajó con tres estados dinámicos diferentes, uno con $\epsilon \leq 0,1 cm^2 s^{-3}$, otro con $\epsilon \simeq 4 cm^2 s^{-3}$ y un último con $\epsilon \simeq 40 cm^2 s^{-3}$. En la Tabla 1 se presenta la nomenclatura de los mismos.

Secuencia	hst	ist	jst	lst	tasa de disipación energética
	pst	rst	sst	tst	
$LWC(gm^{-3})$	0,25	0,48	0,88	1,7	$\epsilon \leq 0,1 cm^2 s^{-3}$
Secuencia	hct	ict	jct	lct	tasa de disipación energética
$LWC(gm^{-3})$	0,19	0,47	0,68	1,2	$\epsilon \simeq 4 cm^2 s^{-3}$
Secuencia	pct	rct	sct	tct	tasa de disipación energética
$LWC(gm^{-3})$	0,1	0,17	0,27	0,6	$\epsilon \simeq 40 cm^2 s^{-3}$

Tabla 1: Nomenclatura de espectros.

Comparación entre espectros

Se calcularon los valores de la DJS correspondientes a todas las combinaciones de los espectros tomados de a pares, teniendo en cuenta la simetría de la DJS. Los resultados se presentan en la Figura 2. Las mayores diferencias se encontraron con los datos correspondientes a hct y pct que tienen $LWC = 0,19 gm^{-3}$ y $LWC = 0,1 gm^{-3}$ respectivamente.

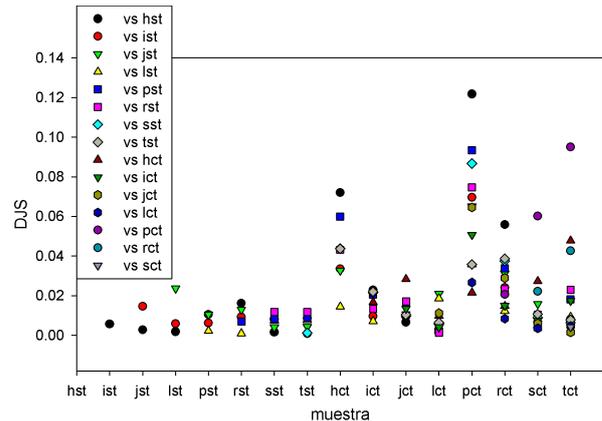


Figura 2: Valores de DJS obtenidos para todas las secuencias tomadas de a pares. Sobre el eje horizontal se nombra la secuencia que se comparó con otra, identificada por el símbolo de color

Comparación entre espectros y distribución de Weibull con exponente 3

Para cada espectro se determinó la distribución de Weibull descrita en (4), considerando que el vínculo es el LWC ; así, x es la masa de una gota y $b = 3$. Luego se calculó la DJS entre esta distribución y la obtenida para el conjunto de datos experimentales mediante la aproximación del Kernel de densidad. En la Tabla 2 se presentan los valores de la DJS correspondientes y los valores $\langle D^3 \rangle = (D_3)^3$

Secuencia	hst	ist	jst	lst	tasa de disipación energética
	pst	rst	sst	tst	
DJS	0,070	0,159	0,331	0,337	$\epsilon \leq 0,1 cm^2 s^{-3}$
	0,075	0,060	0,214	0,217	
$D_3 [\mu m]$	14	16	13	14	
	16	15	13	13	
Secuencia	hct	ict	jct	lct	tasa de disipación energética
DJS	0,043	0,095	0,229	0,353	$\epsilon \simeq 4 cm^2 s^{-3}$
$D_3 [\mu m]$	18	20	14	15	
Secuencia	pct	rct	sct	tct	tasa de disipación energética
DJS	0,072	0,056	0,178	0,123	$\epsilon \simeq 40 cm^2 s^{-3}$
$D_3 [\mu m]$	13	19	15	14	

Tabla 2: DJS entre las aproximaciones obtenidas mediante el Kernel de densidad y la distribución de Weibull con $b = 3$

Comparación entre espectros y distribución de Weibull generalizada

A cada una de las aproximaciones obtenidas mediante el Kernel de densidad se las ajustó mediante la distribución de Weibull generalizada (4) reescrita en la forma:

$$w_g(D) = \beta \frac{D^{\beta-1}}{(D_\beta)^\beta} \exp\left(-\frac{D^\beta}{(D_\beta)^\beta}\right) \quad (16)$$

donde D_β puede ser identificado como un valor promedio de los diámetros a la β , $\langle D^\beta \rangle = (D_\beta)^\beta$

También se calculó la DJS entre esta distribución Weibull y la aproximación del Kernel de densidad para cada uno de los conjuntos de datos. Estos resultados juntos con los valores de D_β se presentan en la *Tabla 3*.

En la *Figura 3* se muestra a modo de ejemplo un histograma, la aproximación obtenida mediante el Kernel de densidad, la distribución de Weibull con $b = 3$ y la Weibull generalizada que mejor ajusta los resultados experimentales, correspondientes a las secuencias jct , rct, tct y lct.

Secuencia	hst pst	ist rst	jst sst	lst tst	tasa de disipación energética
<i>DJS</i>	0,068 0,081	0,163 0,059	0,323 0,209	0,329 0,212	$\epsilon \leq 0,1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$
β	3,58 3,77	3,30 3,77	3,64 3,60	3,77 3,52	
$D_\beta [\mu\text{m}]$	8 8	11 8	8 8	8 8	
Secuencia	hct	ict	jct	lct	tasa de disipación energética
<i>DJS</i>	0,039	0,080	0,229	0,348	$\epsilon \simeq 4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$
β	2,79	2,82	3,12	3,62	
$D_\beta [\mu\text{m}]$	21	17	11	9	
Secuencia	pct	rct	sct	tct	tasa de disipación energética
<i>DJS</i>	0,000	0,048	0,178	0,123	$\epsilon \simeq 40 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$
β	2,60	3,14	3,18	3,23	
$D_\beta [\mu\text{m}]$	29	14	11	10	

Tabla 3: DJS entre las aproximaciones obtenidas mediante el Kernel de densidad y la distribución de Weibull que mejor ajusta los resultados experimentales

V. Discusión y Comentarios

Se puede ver en la *Figura 2* que los valores de la DJS que involucran a las mediciones con $\epsilon \leq 0,1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$ (sin perturbación), son siempre menores que 0,025. En estos resultados no se manifiesta ningún tipo de dependencia con el valor de LWC de las nubes asociadas. Por otro lado se puede observar que cuando se calcula la DJS involucrando mediciones con $\epsilon \simeq 4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$ o con $\epsilon \simeq 40 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$ los valores de de DJS aumentan. Aunque no hay una clara relación con el incremento de perturbación, los mayores valores de DJS corresponden a comparaciones que involucran al menos una medición con $\epsilon \simeq 40 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$.

Como se puede observar en la *Figura 3*, la distribución aproximada obtenida mediante el Kernel de

densidad da una buena descripción de los valores medidos. Por otra parte se puede ver que, las distribuciones de Weibull con $b = 3$, propuestas por Liu y Hallet, no describen satisfactoriamente los datos. Esto también queda evidente cuando se consideran los valores de DJS correspondientes. Por otro lado, no se encontró correlación entre DJS y a los valores de ϵ . Tampoco se observó relación entre los valores D_β y los niveles de perturbación.

En la *Tabla 3* se puede observar que los valores de DJS que involucran mediciones sin perturbación y los valores que involucran mediciones perturbadas son similares. Resulta notable que, la DJS para las mediciones perturbadas (para los dos valores de ϵ) se incrementa con el valor de LWC , indicando que la distribución de Weibull generalizada se diferencia más de los resultados experimentales a medida que crece el LWC , este comportamiento se puede observar en la *Figura 3*. También se puede ver que los valores de D_β son independientes de LWC en las mediciones sin perturbar y que son más chicos que los correspondientes a los casos perturbados; esto indica que las distribuciones correspondientes a los casos perturbados son más asimétricas que las correspondientes a los casos sin perturbar. Además, en los casos perturbados D_β decrece con el LWC . Se puede presumir una pendiente mayor para el caso en el que ϵ es mayor.

Finalmente, como se puede observar en la *Figura 3*, ninguna de las distribuciones de Weibull dan cuenta de la curvatura que tiene la distribución de tamaños entre los $20 \mu\text{m}$ y $25 \mu\text{m}$. En el caso de la distribución de Weibull que mejor ajusta los datos experimentales, se puede observar que en este rango de tamaños tiene siempre valores más chicos que los que se encuentran en las mediciones.

En la *Figura 4* se presentan, en un gráfico log-log, los valores de DJS y el LWC correspondientes a todas las mediciones y a los dos tipos de distribuciones consideradas. También se muestran los ajustes de la forma:

$$DJS = a_o(LWC)^{b_o} \quad (17)$$

para cada uno de los conjuntos de puntos.

Como se puede ver, la correlación entre DJS y LWC está presente para las dos distribuciones. Como se dijo arriba, esto indicaría que el modelo con el que se obtuvo la distribución de Weibull se diferencia más de la situación real a medida que se incrementa el LWC . Esto podría deberse a que en la determinación de las distribuciones no se consideró el efecto de coalescencia, fenómeno que debería incrementarse a mayores concentraciones de gotas. Por lo que, sería razonable suponer que un aumento en la concentración de gotas estaría asociado a un incremento en el número de colisiones entre gotas y por lo tanto podría esperarse un incremento en el efecto de la coalescencia.

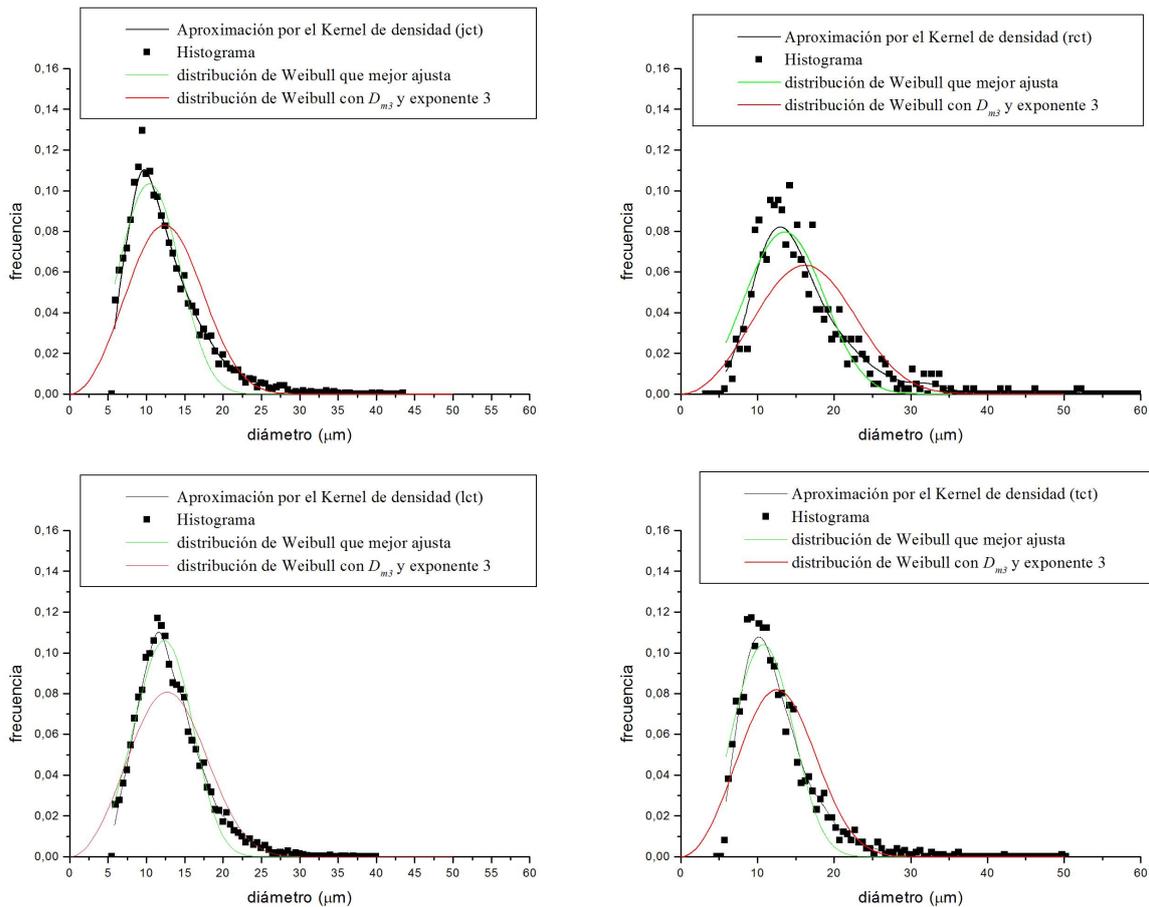


Figura 3: En las figuras se presentan las aproximaciones de las distribuciones de tamaños con: histogramas (puntos negros), Kernel de densidad (línea negra), Weibull con $b = 3$ y $(D_{m3})^3 = \langle D^3 \rangle$ (línea roja) y mejor ajuste con Weibull (línea verde)

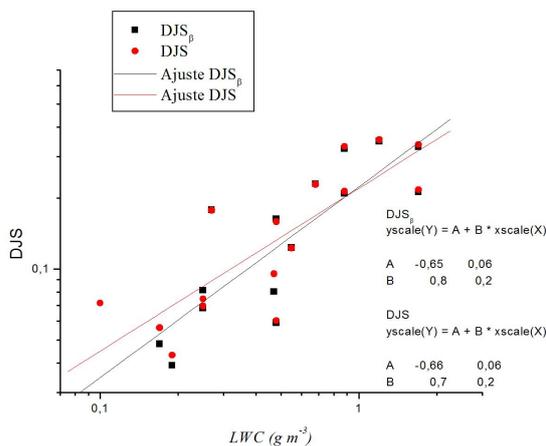


Figura 4: DJS entre la aproximación con el Kernel de densidad y con la distribuciones de Weibull consideradas en este trabajo en función del LWC.

Agradecimientos

Queremos agradecer la colaboración del Sr. José Barcelona en la realización de las mediciones y fotografías. Agradecemos a SeCyT-UNC y a SeCyT-UTN por el

apoyo brindado a este proyecto.

Referencias

1. Yan Xue , Lian-Ping Wang and Wojciech W. Grabowski, *Growth of Cloud Droplets by Turbulent Collision-Coalescence*, Journal of the atmospheric Sciences, vol. 65 , pp. 331-356, 2008.
2. Grabowski, W.W., L.P. Wang, *Growth of Cloud Droplets in a Turbulent Environment*, Annual Review of Fluid Mechanics. vol 45, pp 293-324., 2013.
3. Xuewen Zhang, Guoguang Zheng *A simple droplet spectrum derived from entropy theory*, Atmospheric Research, vol 32, pp 189-193, 1994
4. Yangang Liu and John Hallett, *On Size Distributions of Cloud Droplets Growing by Condensation: A New Conceptual Model*, Journal of the atmospheric Sciences, vol. 55 , pp. 527-536, 1998.
5. Yangang Liu, Peter H. Daum and John Hallett, *A Generalized Systems Theory for the Effect of Varying Fluctuations on Cloud Droplet Size Distributions*, Journal of the atmospheric Sciences, vol. 59 , pp. 2279-2290, 2002.

6. J. Burbea and C.R. Rao, *On the convexity of some divergence measures based on Entropy functions*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 28 , pp. 489-495, 1982.
7. Lin J. *Divergence measures based on the shannon entropy*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol 37, pp 145– 151, 1991.
8. Silverman B. W. , *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall, London 1986.
9. R. Steuer, J Kurths, C. O. Daub, J. Weise and J. Selbig, *The mutual information: Detecting and evaluating dependencies between variables*, Bioinformatics, vol.18, pp. 221-240, 2002.
10. D. Stoler Flores, G. Aguirre Varela, *Estudio experimental del efecto de la turbulencia sobre el espectro de tamaño de gotas de nube*, Anales AFA, vol. 28 Nro.2, pp 56-59, 2017.
11. Mc Cready, P. B and Todd C. J., *Continuous Particles Sampler*, Journal of Applied Meteorology, vol 3, pp 450-460, 1964.