

# Dos hipótesis ocultas en las desigualdades de Bell

## Two hidden hypothesis in the Bell's inequalities.

Alejandro A. Hnilo<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> Centro de Investigaciones en Láseres y Aplicaciones CEILAP (UNIDEF-CITEDEF-CONICET)  
Juan Bautista de La Salle 4397 – (B1603ALO) Villa Martelli – Prov. Buenos Aires – Argentina

Recibido: 25/04/2016; aceptado: 24/08/2016

Hace poco se cumplieron 50 años del famoso trabajo original de J.S.Bell que mostró la incompatibilidad entre las predicciones de la Mecánica Cuántica (QM), para la correlación entre mediciones realizadas sobre un par de partículas entrelazadas distantes, y las ideas intuitivas de Localidad y Realismo (LR). Los experimentos realizados hasta ahora muestran que dicha correlación es mayor que la aparentemente permitida por LR. Sin embargo, en la deducción de las desigualdades de Bell hay dos hipótesis no evidentes, adicionales a LR: una es que las integrales en el espacio de las variables ocultas son “apropiadas” (en el sentido de Riemann o Lebesgue); la otra es similar a la hipótesis ergódica. Ambas hipótesis dejan de cumplirse en algunos sistemas complejos. Por lo tanto, los resultados experimentales pueden interpretarse tanto como la refutación de LR en la Naturaleza o, por el contrario, como la evidencia de una dinámica subyacente, caótica y no-ergódica. En este trabajo se discute el origen y significado de esas hipótesis adicionales.

*Palabras clave: Desigualdades de Bell, Fundamentación de Mecánica Cuántica.*

Recently, the famous original paper by J.S.Bell's reached the 50 anniversary of its publication. In that paper, the contradiction of the predictions of Quantum Mechanics (QM) with the intuitive ideas of Locality and Realism (LR) was demonstrated, for the correlation between the measurements performed on a pair of remote entangled particles. The experiments performed until now show that that correlation is higher than allowed by LR. However, there are two non-evident hypotheses, additional to LR, in the derivation of the Bell's inequalities: the first one is that “proper” integrals (in the Riemann's or Lebesgue's sense) in the space of the hidden variables exist; the second one is similar to the ergodic hypothesis. Both hypotheses are not valid in some complex systems. Therefore, the experimental results can be interpreted as a refutation of the validity of LR in the Nature or, else, as the evidence of the existence of an underlying dynamics, which would be chaotic and non-ergodic. In this paper, the origin and meaning of the additional hypotheses is discussed.

*Keywords: Bell's inequalities, Quantum Mechanics Foundations.*

### I. INTRODUCCIÓN

La controversia entre la Mecánica Cuántica (QM) y las ideas intuitivas de Localidad (hablando mal y pronto: que el resultado de una medición no depende de lo que ocurra fuera de su cono de luz del pasado) y Realismo (que las propiedades del mundo físico no dependen de que se las esté midiendo) es uno de los temas sin resolver más importantes y resistentes de toda la historia de la Física. Las desigualdades de Bell (DB) permiten llevar la controversia desde el plano de la discusión filosófica al de los experimentos. Si las observaciones demuestran que las DB se violan en la Naturaleza, entonces es necesario abandonar Localidad y Realismo (LR) como postura básica para explicar el mundo. Este es un paso no trivial, pues LR se supone válido no solamente en la vida cotidiana, sino también en toda la práctica científica (exceptuando QM). En el caso contrario, entonces hay que reescribir al menos parte de la QM, lo que también podría tener consecuencias importantes.

La controversia se ve actualizada por la reciente publicación<sup>1,5</sup> de los resultados de una serie de experimentos *loophole-free* (en pocas palabras: libres de imperfecciones experimentales) que declaran haber verificado la violación de las DB. Es pues pertinente recordar cuáles son las hipótesis que permiten deducir y usar las DB, para no equivocarse sobre el significado de esos resultados. Como se verá, hay al menos dos hipótesis adicionales a LR, que son necesarias para deducir y usar las DB. Estos resultados no son nuevos. Lo que aquí es nuevo, en todo caso, es el presentarlos juntos, y la interpretación física que propongo para su origen.

En el siguiente Capítulo se repasa la deducción de la desigualdad de Clauser-Horne-Shimony y Holt (CHSH)<sup>6</sup> para facilitar la comprensión del origen de las hipótesis adicionales. En el Capítulo II se discuten dichas hipótesis. En el III se explica cómo están relacionadas, y por qué sugieren la existencia de una dinámica compleja

---

\*ahnilo@citedef.gob.ar

subyacente, que podría ser el origen de las correlaciones observadas sin necesidad de violar LR.

### Deducción simple de la desigualdad CHSH.

Sea el experimento esquematizado en la Figura 1. La fuente emite un estado entrelazado de dos fotones (o bifotón). Se mide la correlación  $E(\alpha, \beta)$ , que es función de las orientaciones  $\{\alpha, \beta\}$  de los polarizadores :

$$E(\alpha, \beta) = \frac{[C^{++} + C^{--}] - [C^{+-} + C^{-+}]}{C^{++} + C^{--} + C^{+-} + C^{-+}} \bigg|_{\alpha, \beta} \quad (1)$$

donde los  $C^{ij}$  indican ( $i, j = +, -$ ) el número de coincidencias observadas en los respectivos detectores.

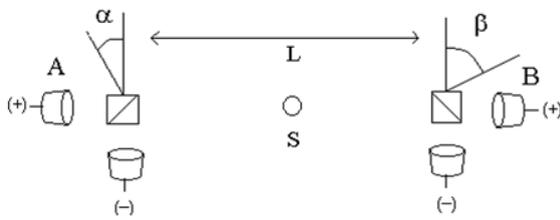


Figura 1: La fuente S emite dos fotones entrelazados hacia estaciones separadas una distancia L, donde se mide si son detectados en las salidas “transmitido” (+) o “reflejado” (-) de polarizadores orientados según ángulos  $\alpha, \beta$ .

Para la deducción de la desigualdad CHSH, se supone que el observable que corresponde a una detección depende de los ángulos y de una cierta variable oculta  $\lambda$ , y que lo que ocurre en la estación A(B) es independiente de lo que ocurre en B(A), es decir:  $AB(\alpha, \beta, \lambda) \equiv A(\alpha, \lambda) \times B(\beta, \lambda)$ , donde  $A, B = \pm 1$ :

$$AB(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{\{[C^{++} + C^{--}] - [C^{+-} + C^{-+}]\}}{\{[C^{++} + C^{--}] + [C^{+-} + C^{-+}]\}} \bigg|_{\alpha, \beta, \lambda} \quad (2)$$

la correlación medible es un promedio sobre el espacio de las variables ocultas, que tienen distribución  $\rho(\lambda)$ :

$$E(\alpha, \beta) = \int d\lambda. \rho(\lambda). AB(\alpha, \beta, \lambda) \quad (3)$$

donde  $\int d\lambda. \rho(\lambda) = 1$ ,  $0 \leq \rho(\lambda) \leq 1$ . Para distintas orientaciones de los ángulos  $\{\alpha, \beta\}$  y  $\{\alpha', \beta'\}$ :

$$\begin{aligned} E(\alpha, \beta) - E(\alpha', \beta') &= \\ &= \int d\lambda. \rho(\lambda). AB(\alpha, \beta, \lambda) - \int d\lambda. \rho(\lambda). AB(\alpha', \beta', \lambda) = \\ &= \int d\lambda. \rho(\lambda). [AB(\alpha, \beta, \lambda) - AB(\alpha', \beta', \lambda)] \end{aligned} \quad (4)$$

Se suma y resta el término  $[AB(\alpha, \beta, \lambda). AB(\alpha', \beta', \lambda). AB(\alpha, \beta', \lambda). AB(\alpha', \beta, \lambda)]$  dentro de la integral, se reordena y aplica módulo (ojo:  $1 \pm AB \geq 0$ ):

$$\begin{aligned} |E(\alpha, \beta) - E(\alpha', \beta')| &\leq \int d\lambda. \rho(\lambda). [1 \pm AB(\alpha', \beta', \lambda)] + \\ &+ \int d\lambda. \rho(\lambda). [1 \pm AB(\alpha, \beta, \lambda)] = \\ &= 2 \pm [E(\alpha', \beta') + E(\alpha, \beta)] \end{aligned} \quad (5)$$

y se tiene la desigualdad CHSH:

$$S_{\text{CHSH}} \equiv |E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta')| + |E(\alpha', \beta') + E(\alpha', \beta)| \leq 2 \quad (6)$$

Para el estado  $|\phi^+\rangle = (1/\sqrt{2})\{ |x_a, x_b\rangle + |y_a, y_b\rangle \}$  y eligiendo  $\{0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8\} = \{\alpha, \beta, \alpha', \beta'\}$  la predicción QM es  $S_{\text{CHSH}} = 2\sqrt{2}$ , que viola (6).

## II. LAS HIPOTESIS ADICIONALES.

### Primera hipótesis adicional.

Hay una manera simple de reproducir las predicciones de QM para el experimento de la Fig.1 sin violar LR. Supongamos que las probabilidades de detección  $P_A(\alpha, \lambda)$  y  $P_B(\beta, \lambda)$  para  $|\phi^+\rangle$  cumplen:

$$P_A(\alpha, \lambda) = \cos^2(\alpha - \lambda); P_B(\beta, \lambda) = \frac{1}{2} \delta(\beta - \lambda) \quad (7)$$

y que la probabilidad de coincidencia  $P_{AB}(\alpha, \beta, \lambda) = P_A(\alpha, \lambda) \times P_B(\beta, \lambda)$  (= Localidad). Luego:

$$P_{AB}(\alpha, \beta) = \int d\lambda. \rho(\lambda). P_{AB}(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta) \quad (8)$$

que es exactamente la predicción QM. La objeción que uno ve inmediatamente a este contraejemplo es que la delta de Dirac “diverge” en el origen, y por lo tanto  $P_B(\beta, \lambda)$  no puede ser considerada una distribución de probabilidad ni cumple las hipótesis que llevan a deducir las DB. Pero, J.F. Geurdes ha propuesto la definición de una Delta de Dirac alternativa<sup>7</sup>:

$$\delta_{\text{ALT}}(x) = \lim_{(N \rightarrow \infty)} \exp\{-Nx - \exp(-Nx)/N\} \quad (9)$$

que cumple todas las propiedades de la Delta de Dirac tradicional sin hacerse nunca mayor que 1. Por lo tanto, la razón por la que el contraejemplo debe ser rechazado *no es* que  $\delta(x)$  diverge, sino que la integral que la contiene en (8) no es una integral “apropiada” en el sentido de Riemann o Lebesgue. En pocas palabras: que no es el límite de una suma de las áreas bajo una curva. Nótese que (9) cumple los axiomas de Kolmogorov incluyendo, al igual que la Delta de Dirac, la sigma-aditividad, y que no se está usando valores extendidos de las probabilidades<sup>8</sup>.

La primera de las hipótesis adicionales en la deducción de las desigualdades de Bell es pues: *las integrales sobre el espacio de las variables ocultas deben ser “apropiadas”*. Si no se impusiera esta condición, el contraejemplo descrito sería una solución trivial a la controversia entre QM y LR. Como se verá, este resultado no es una frivolidad matemática sino que tiene consecuencias con significado físico.

### Segunda hipótesis adicional.

Todas las mediciones reales ocurren sucesivamente, en el tiempo. Así, la medición de (p.ej.) la correlación  $E(\alpha, \beta)$  es la integral:

$$E(\alpha, \beta) = (1/\Delta T) \int_{\theta}^{\theta+\Delta T} dt. \rho(t). AB(\alpha, \beta, t) \quad (10)$$

que representa el proceso de fijar el polarizador  $A=\alpha$  y el  $B=\beta$  durante el tiempo  $[\theta, \theta+\Delta t]$ , sumar el número de coincidencias en cada salida de los detectores, y calcular  $E(\alpha, \beta)$  según (1). Suponiendo que las orientaciones de los polarizadores son independientes de los valores de las variables ocultas (no-contextualidad<sup>6</sup>) la distribución de los tiempos de medición entre las diferentes orientaciones de los polarizadores es irrelevante. Tomando por simplicidad la distribución de la parte superior de la Figura 2, hay un problema evidente al calcular la desigualdad CHSH. Por ejemplo, al medir en la práctica:

$$\begin{aligned} E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta') &= \\ &= (1/\Delta T) \int_{T/4}^{T/2} dt. \rho(t). AB(\alpha, \beta, t) - \\ &- (1/\Delta T) \int_0^{T/4} dt. \rho(t). AB(\alpha, \beta', t) \neq \\ &\neq (1/T) \int_0^T dt. \rho(t). [AB(\alpha, \beta, t) - AB(\alpha, \beta', t)] \quad (11) \end{aligned}$$

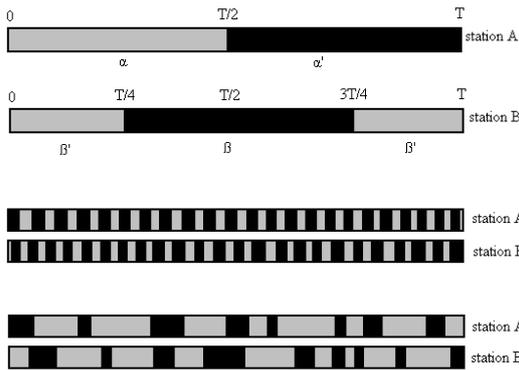


Figura 2: diferentes distribuciones posibles de los tiempos de medición entre las orientaciones de los ángulos de los polarizadores en la Fig.1. Arriba: la más usual (caso estático). Medio: cuasi-periódica. Abajo: aleatoria, como en las Referencias 3 a 5. Si se supone válida no-contextualidad, todas son equivalentes.

El lado derecho de la igualdad en (11) es lo que de verdad se mide, mientras que la integral en el último renglón es la que lleva a la desigualdad de CHSH. Nótese que las integrales tienen dominios distintos, lo que rompe la cadena lógica en la deducción de la desigualdad. Los valores medidos pueden violar CHSH o no, pero en este momento esa violación no implica nada sobre la validez del LR en la Naturaleza. Para restablecer la cadena lógica, es necesario agregar alguna suposición que permita relacionar los dos miembros de la desigualdad. La solución más simple es extender las integrales en (11) sobre el tiempo total de medición  $[0, T]$ . Al hacer esto, aparecen correlaciones definidas para condiciones que no ocurrieron, es decir, valores contrafactuales. Esto no es un problema a esta altura

pues Realismo, o la legitimidad de discutir sobre procesos que podrían haber ocurrido (pero no ocurrieron), o *counterfactual definiteness*, ya se supuso válido desde el principio en la deducción de las DB. Lo que pasa es que ahora el último renglón en (11) es una igualdad, pero con la forma:

$$\begin{aligned} E(\alpha, \beta) + \underline{E(\alpha, \beta)} - E(\alpha, \beta') - \underline{E(\alpha, \beta')} &= \\ &= (1/\Delta T) \int_0^T dt. \rho(t). [AB(\alpha, \beta, t) - AB(\alpha, \beta', t)] \quad (12) \end{aligned}$$

donde los términos subrayados son la suma de las tres integrales contrafactuales (véase Fig.2):

$$\begin{aligned} \underline{E(\alpha, \beta)} &= (1/\Delta T) \int_0^{T/4} dt. \rho(t). AB(\alpha, \beta, t) + \\ &+ (1/\Delta T) \int_{T/2}^{3T/4} dt. \rho(t). AB(\alpha, \beta, t) + (1/\Delta T) \int_{3T/4}^T dt. \rho(t). AB(\alpha, \beta, t) \\ \underline{E(\alpha, \beta')} &= (1/\Delta T) \int_{T/4}^{T/2} dt. \rho(t). AB(\alpha, \beta', t) + \\ &+ (1/\Delta T) \int_{T/2}^{3T/4} dt. \rho(t). AB(\alpha, \beta', t) + (1/\Delta T) \int_{3T/4}^T dt. \rho(t). AB(\alpha, \beta', t) \quad (14) \end{aligned}$$

Por ejemplo, el factor  $\underline{AB(\alpha, \beta, t)}$  indica el resultado de una medición realizada durante el intervalo de tiempo  $[0, T/4]$ , cuando en realidad fue  $B \neq \beta$ . Por definición:

$$\begin{aligned} (1/\Delta T) \int_0^{T/4} dt. \rho(t). \underline{AB(\alpha, \beta, t)} &= \{(+1)[C^{++} + C^{-}] + \\ &(-1)[C^{-+} + C^{+-}]\} / \{C^{++} + C^{-} + C^{-+} + C^{+-}\} \Big|_{\alpha, \beta, 0 < t < T/4} \quad (15) \end{aligned}$$

que toma un valor desconocido, porque todos los  $C^{ij}=0$  (se tiene una indeterminación “cero sobre cero”). No obstante, *counterfactual definiteness* me asegura que la expresión (15) sí toma algún valor (aunque yo no lo conozca). El resultado final es:

$$\begin{aligned} |E(\alpha, \beta) + \underline{E(\alpha, \beta)} - E(\alpha, \beta') - \underline{E(\alpha, \beta')}| &+ |E(\alpha', \beta') + \\ &+ \underline{E(\alpha', \beta')} + E(\alpha', \beta) + \underline{E(\alpha', \beta)}| \leq 8 \quad (16) \end{aligned}$$

es ésta la desigualdad tipo-CHSH que se deduce si lo único que se supone válido es LR.

Para dar valores numéricos a los términos contrafactuales (subrayados) de manera consistente, debo definir un “mundo posible”<sup>9</sup>. Esta definición implica inevitablemente una suposición adicional a LR.

Definir un “mundo posible” suena misterioso, pero en realidad sólo se trata de agregar información faltante. Por ejemplo, supongamos que cuando bajo al bar y encuentro a mi amiga Alicia (Figura 3), digo que el resultado de medir la variable  $A \equiv$  “encuentro a Alicia en el bar” es 1, y 0 cuando no la encuentro. Después de muchas visitas al bar, mido  $\langle A \rangle = 0.3$ . Ahora, consideremos la pregunta “¿cuánto vale  $\langle A \rangle$  cuando no

voy al bar?”. Dentro de la postura positivista de la QM esta pregunta no tiene sentido, y tampoco respuesta. Si se supone en cambio que Alicia y el bar tienen una existencia bien definida aún cuando no voy al bar (en pocas palabras: si se supone Realismo, o *counterfactual definiteness* válidos), el valor de  $\langle A \rangle$  sí tiene un valor bien definido, digamos,  $q$ . Hasta este punto no se ha hecho ninguna hipótesis adicional a LR. Pero, *el valor de  $q$  es desconocido con la información disponible*. Se precisa información sobre las costumbres de Alicia y lo que pasa en el bar cuando yo no voy. Es decir: hace falta definir un “mundo posible” (definir *cómo* es el mundo cuando no lo observo) para asignar un valor numérico a  $q$ . Es *esta* definición, *inevitable* para calcular (16), la que implica una hipótesis adicional a LR.

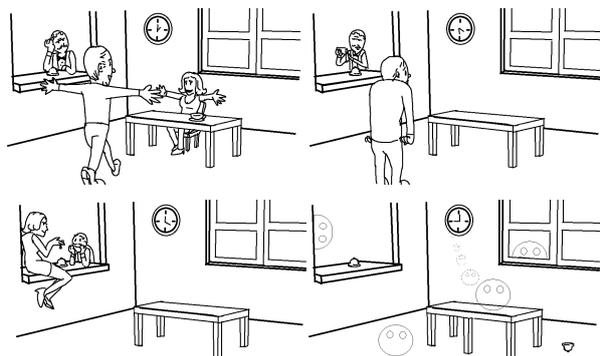


Figura 3, acerca de los mundos posibles: supongamos que cuando voy al bar y encuentro a mi amiga Alicia el resultado de medir  $A \equiv$  “encuentro a Alicia en el bar” es 1, y 0 cuando no. Después de muchas visitas, mido  $\langle A \rangle$ . Ahora: “cuánto vale  $\langle A \rangle$  cuando no voy al bar?” Si se supone que Alicia y el bar siempre tienen existencia bien definida ( $\approx$  Realismo) entonces  $\langle A \rangle$  tiene un cierto valor  $q$ . Pero, el valor de  $q$  todavía es desconocido. Hace falta saber lo que pasa en el bar y con Alicia cuando no los estoy observando. Es decir: debo definir un “mundo posible” (cómo es el mundo cuando no lo observo) para poder asignar un valor a  $q$ .

Veamos algunos mundos posibles:

#1) Las probabilidades (observables en CHSH) factuales y contrafactuales son iguales.

Es decir,  $\underline{AB}(\alpha, \beta, t) = AB(\alpha, \beta, t')$ . En este mundo posible las DB se recuperan inmediatamente. En el ejemplo del bar, significa que, cada día, Alicia habría estado en el bar, o no, independientemente de si yo hubiera ido, o no. Sin embargo, como la igualdad supuesta vale para todos los valores de  $t$  y  $t'$ , los factores  $AB(\alpha, \beta, t)$  pasan a ser independientes del tiempo. En las integrales extendidas el tiempo juega, *formalmente*, el rol de la variable oculta, así que al suponer este mundo posible se está suponiendo que no hay variables ocultas (o, mejor dicho, que éstas no sirven para nada). Esta situación no es satisfactoria: uno está *suponiendo* lo que en todo caso querría *demostrar*. Además, la inferencia lógica pasa a ser:

LR + no hay variables ocultas  $\Rightarrow$  las DB son válidas.

Por lo tanto, si se supone válido este mundo posible, la violación experimental de las DB puede usarse *en apoyo* de la existencia de las variables ocultas, lo que es el opuesto a la interpretación usual.

#2) Las promedios temporales de las probabilidades (valores de expectación en CHSH) factuales y contrafactuales son iguales.

Esta es, en mi opinión, una alternativa menos restrictiva y más interesante que #1 para recuperar las DB. En el ejemplo de Fig.3, significa que  $q = \langle A \rangle = 0.3$ . Llamo *Dinámica Homogénea* (HDA) a esta hipótesis o mundo posible. Creo que esta es la suposición que se hace (inadvertidamente) cuando se introducen valores medidos de las correlaciones dentro de las expresiones de las DB.

#3) Las probabilidades (valores de expectación en CHSH) contrafactuales son cero.

Esta es la respuesta “intuitiva” a la indeterminación “cero sobre cero” en (15). Si todos los contrafactuales son cero entonces también todos los  $\underline{E} = 0$  y de (16):

$$|E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta')| + |E(\alpha', \beta') + E(\alpha', \beta)| \leq 8 \quad (17)$$

La QM predice  $S_{\text{CHSH}} = 2\sqrt{2} < 8$ , así que QM *no* viola la desigualdad en este mundo posible.

#4) Contrafactuales “estilo QM”.

Un cierto polarizador orientado según  $\alpha$  o según  $\alpha'$  son situaciones distinguibles en la manera clásica de pensar. Siguiendo la manera de pensar en QM, se puede suponer que un polarizador orientado según  $\alpha$  tiene una probabilidad  $\cos^2(\alpha - \alpha')$  de comportarse como si estuviera orientado según  $\alpha'$ . Sería así posible medir con dos orientaciones diferentes *al mismo tiempo*, con una cierta probabilidad para cada alternativa. Suponiendo pues un mundo posible en el que el observable A es:

$$A(\alpha', t) = \cos^2(\alpha - \alpha') \times A(\alpha', t') = \frac{1}{2} A(\alpha', t') \quad (18)$$

para los valores de  $\alpha$  y  $\alpha'$  usuales en CHSH, y lo mismo para los demás, luego  $\underline{E}(\alpha, \beta) = 5/4 \times E(\alpha, \beta)$  (recuérdese que uno de los términos contrafactuales es “doble”) y:

$$(9/4) |E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta')| + (9/4) |E(\alpha', \beta') + E(\alpha', \beta)| \leq 8 \quad (19)$$

Luego  $S_{\text{CHSH}} \leq 32/9 \approx 3.55$ , así que QM *no* viola la desigualdad *tampoco* en este mundo posible.

#5) La dinámica subyacente es ergódica.

Es decir, que los promedios temporales (*time average*) son iguales a los promedios sobre las variables dinámicas (*ensemble average*, aquí, las variables ocultas). Como este último es único, entonces todos los promedios temporales (factuales o contrafactuales) son iguales entre sí, y se recupera CHSH.

En resumen: dependiendo del mundo posible elegido las predicciones de la QM pueden violar las DB, o no. La hipótesis adicional de la elección de un mundo posible es pues un tema crucial.

De los muchos mundos posibles, el #2 o Dinámica Homogénea (HDA) me parece el más razonable para recuperar la forma usual de las DB. Aquí cada uno de los términos contrafactuales es igual al factual, así que:

$$E(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = 3 \times E(\alpha, \beta) \quad (20)$$

y se recupera CHSH. Nótese que (20) es la condición más general que permite recuperar CHSH, y que es más general que HDA, pues los tres términos contrafactuales en (13), que definen  $E(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ , podrían sumar tres veces el factual sin ser, necesariamente, iguales al factual cada uno de ellos, tal como se supone en HDA.

Por su parte, la hipótesis ergódica es más restrictiva que HDA, pues significa no sólo que los promedios temporales factuales y contrafactuales son iguales entre sí, sino que además son iguales al promedio sobre las variables ocultas. V. Buonomano fue el primero que notó que la hipótesis ergódica estaba implícita en el uso de las DB<sup>10</sup>. Las diferentes implicaciones lógicas discutidas están representadas en la Figura 4.

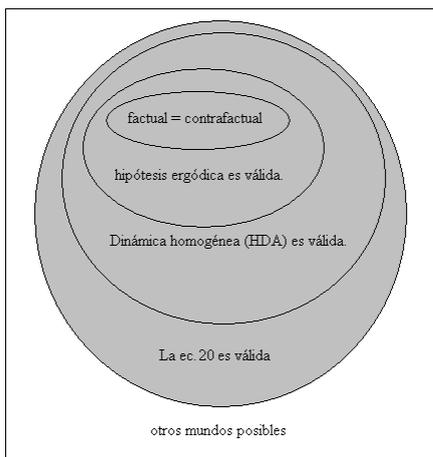


Figura 4: Relación entre las hipótesis que definen diferentes "mundos posibles". P.ej.: en un mundo donde la hipótesis ergódica es válida, se cumple la HDA y la ec.20. En este mismo mundo, la igualdad entre los resultados factuales y los contrafactuales puede cumplirse, o no. Todas las hipótesis en gris permiten recuperar las DB usuales. En los "otros mundos posibles" no hay relación lógica entre la observación de la violación de las DB y la validez del LR en la Naturaleza.

La HDA significa que el promedio de una variable dinámica cualquiera obtenido sobre un intervalo  $[t_1, t_1+T]$  (digamos, cuando está siendo observada) es el mismo que el obtenido sobre cualquier otro intervalo  $[t_2, t_2+T]$  (digamos, cuando *no* está siendo observada) suponiendo, por supuesto, que T es lo bastante largo. En este punto surge una pregunta natural: ¿existe algún proceso físicamente razonable que viole HDA? En la Referencia 11 se presenta un ejemplo de un modelo LR que, en ciertas condiciones, viola la HDA y las DB. Este modelo no fue diseñado para sobrevivir a todos los

experimentos realizados hasta ahora para demostrar la violación de las DB en la Naturaleza (de hecho, no lo hace) sino sólo a explorar las condiciones en que la HDA puede ser violada, y sus consecuencias. Según el valor que toma un cierto parámetro, la evolución del sistema es más o menos "compleja" (ver el siguiente Capítulo). Se encuentra que para violar HDA la evolución debe ser compleja, pero no "demasiado compleja". Además, se alcanza una conclusión importante: violar HDA *es una condición necesaria, pero no suficiente*, para violar las DB sin violar LR.

### III. SIGNIFICADO DE LAS HIPOTESIS ADICIONALES – CONCLUSIONES.

He mostrado que la violación experimental de las DB implica la no validez del LR en la Naturaleza sólo si se cumplen (al menos) dos hipótesis adicionales:

- (1) La integrabilidad "propiamente dicha" en el espacio de las variables ocultas; y
- (2) La hipótesis ergódica, la HDA o alguna del área gris en la Fig.4.

Estas no son las únicas hipótesis adicionales a LR que son necesarias para deducir las DB. Una interesante discusión sistemática de las hipótesis adicionales puede encontrarse en la Referencia 12. Lo que quiero señalar aquí es que las dos hipótesis mencionadas arriba dejan de cumplirse en algunos "sistemas complejos", tal como se ejemplifica en la Referencia 11. La definición de *sistema complejo* está siempre en discusión. Una podría ser: "Es un sistema cuyo comportamiento general es difícil de formular, a pesar de que se posee información casi completa sobre sus componentes constitutivas y la interacción entre éstas"<sup>13</sup>.

Supongamos entonces que la detección (o no) de un fotón después de un polarizador esté regida por una dinámica caótica. La descripción del fotón evolucionaría, en el espacio de fases, dentro de un atractor extraño (o sea: de dimensión fractal). El fotón sería detectado si ingresara en cierta región de ese atractor. Entonces, para calcular la probabilidad de detección en la práctica (en la que no se conoce los detalles de la evolución), debería hacerse una integral sobre esa parte del atractor. Pero, en general, es imposible hacer una integral "propiamente dicha" sobre una variedad fractal, violando así la hipótesis (1). Además, una dinámica caótica puede violar la hipótesis ergódica (2), ya que el sistema no visita de manera uniforme el espacio de fases (ni siquiera un subconjunto de él determinado, por ejemplo, por la conservación de la energía).

Así, la violación de las DB observada (la que, personalmente, considero verificada más allá de una duda razonable<sup>14</sup>) es todavía consistente con la existencia de una dinámica compleja subyacente en el espacio de las variables ocultas, la que podría (o no) respetar LR. La conclusión inmediata es que resulta conveniente que los futuros experimentos sobre la controversia QM vs LR se dirijan a medir la dinámica, es decir, a recoger la variación temporal de variables

relevantes (como el contraste de las curvas de interferencia o la eficiencia de detección), más que a medir magnitudes estadísticas como las DB o el p-value. De ese modo, y en condiciones apropiadas, se podría detectar o refutar la presencia de una evolución compleja o no-ergódica. Esta es una dirección de la actividad diferente a la que se ha seguido mayormente hasta ahora, en la que el énfasis ha estado en verificar la violación de las DB en condiciones experimentales cada vez más estrictas. La nueva dirección propuesta no sólo es potencialmente fructífera y está poco explorada sino que, además, es mucho más sencilla de implementar en la práctica<sup>15</sup>.

#### REFERENCIAS.

- 1- M.Giustina *et al.*, Nature **497**, p.227 (2013).
- 2- B.Christensen *et al.*, Phys.Rev.Lett **111** 130406 (2013).
- 3- M.Giustina *et al.*, Phys.Rev.Lett. **115**, 250401 (2015), también en arXiv:1511.03190 (2015).

- 4- L.K.Shalm *et al.*, Phys.Rev.Lett. **115**, 250402 (2015), también en arXiv:1511.03189 (2015).
- 5- B.Hensen *et al.*, Nature **526** p.682 (2015).
- 6- J.Clauser y A.Shimony, Rep.Prog.Phys. **41** p.1881 (1978).
- 7- J.F.Geurdes, arXiv:0112036 (2001).
- 8- W.Muckenheim *et al.*, Phys.Rep. **133** p.337 (1986).
- 9- B.d'Espagnat, Phys.Rep.**110**, p.201 (1984).
- 10- V.Buonomano, Annales del'I.H.P.Sect.A,**29** p.379 (1978).
- 11- A.Hnilo, arXiv:1402.6177 (2014).
- 12- R.Tumulka, arXiv:1501.04168 (2015).
- 13- F.T.Arecchi y A.Farini, "Lexicon of Complexity", Studio Editoriale Fiorentino Ed., Florencia (1996).
- 14- A.Hnilo, arXiv:1607.04177 (2016).
- 15- A.Hnilo y M.Agüero, arXiv:1507.01766 (2015).

#### AGRADECIMIENTOS.

Este trabajo recibió apoyo del subsidio PIP11-077 CONICET.