

# CÁLCULO DINÁMICO DE FRECUENCIAS DE OSCILACIONES RADIALES EN ESTRELLAS DE NEUTRONES

## DYNAMIC CALCULATION OF RADIAL OSCILLATION FREQUENCIES ON NEUTRON STARS

S. MORALES <sup>a,b\*</sup>, D. SEVILLA <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura – Universidad Nacional de Rosario.  
Av. Pellegrini 250 – (S2000BTP) Rosario – Santa Fe – Argentina

<sup>b</sup> Instituto de Física Rosario (CONICET-UNR)  
Bv. 27 de febrero 210 bis – (S2000EZF) Rosario – Santa Fe – Argentina

Recibido: 20/11/2013; aceptado: 21/08/2014

En este trabajo se estudian las frecuencias de los modos normales de oscilación de estrellas colapsadas, suponiendo simetría esférica. Para ello se realizan simulaciones de la dinámica de una estrella colapsada cuya materia es descrita por la ecuación de estado de Bethe-Johnson I. Mediante un código numérico se integran las ecuaciones diferenciales de la hidrodinámica en Relatividad General, incorporando un filtro numérico con el fin de estabilizar el método. Para obtener las frecuencias de resonancia, se fuerza una variación de presión de frecuencia determinada en el centro de la estrella, y se calcula la amplitud final de la variación de velocidad en la superficie de la estrella para el régimen estacionario. Los resultados se comparan con los obtenidos al simular el sistema libre, analizando el espectro de frecuencias por el método de Fourier. Finalmente, se calculan la frecuencia fundamental y los siguientes 3 armónicos superiores para estrellas colapsadas de entre 0.8 y 1.8 masas solares.

*Palabras clave: estrellas compactas, oscilaciones radiales, métodos numéricos.*

In this work the frequencies of the normal modes of oscillation of collapsed stars, assuming spherical symmetry, are found. For this, we simulate the dynamics of a collapsed star whose matter is described by the Bethe-Johnson's equation of state. The differential equations of General Relativistic Hydrodynamics are integrated using a numerical code with a non-linear filter to stabilize it. In order to obtain the resonance frequencies, a pressure variation in the star center of a given frequency is forced. The amplitude of the velocity variation on the surface of the star is calculated. The results are compared with those obtained by simulating the free system and analyzing the frequency spectrum with the Fourier's method. Finally, the fundamental frequency and the next three harmonics are calculated for collapsed stars from 0.8 and 1.8 solar masses.

*Keywords: compact stars, radial oscillations, numerical methods.*

### I. INTRODUCCIÓN

El estudio de las oscilaciones radiales de objetos compactos como posible explicación de las QPOs en LMBX ha tomado un nuevo impulso en los últimos años<sup>1</sup>. Este modelo es alternativo al que supone a las órbitas keplerianas de partículas del disco de acreción como fuente de las QPOs<sup>2</sup>. La medición de las frecuencias de oscilaciones radiales de una estrella colapsada proporcionaría importante información acerca de la ecuación de estado de la materia que la compone, ya que las frecuencias de resonancia no sólo dependerían de la relación entre la masa y el radio de la estrella, sino también en su estructura interior.

El análisis de las frecuencias naturales de oscilación de los cuerpos es un tema muy estudiado dentro de la rama de la física matemática<sup>3</sup>. En teoría, para obtener estas frecuencias, es necesario resolver una ecuación de

autovalores que, en la práctica, debe simplificarse imponiendo ciertas simetrías al problema y, usualmente, considerarse sólo oscilaciones de pequeña amplitud. Dichas ecuaciones deben ser resueltas mediante métodos numéricos que eventualmente pueden influenciar a las soluciones<sup>4</sup>. En ocasiones, cálculos de frecuencias de oscilaciones realizados por distintos autores muestran diferencias, algunas veces significativas<sup>5</sup>. En este contexto, el cálculo de frecuencias de oscilación de un objeto compacto a través de un abordaje diferente resulta ventajoso, ya que permite contrastar y eventualmente validar resultados obtenidos por otros métodos.

En este trabajo se presenta un método para calcular las frecuencias de oscilación de estrellas colapsadas a través de cálculos dinámicos. En este método, la evolución de la estrella se simula de acuerdo con las ecuaciones de la hidrodinámica en Relatividad General.

---

\* morales@ifir-conicet.gov.ar

Para hallar las frecuencias de resonancia, se fuerza una pequeña variación armónica de frecuencia determinada en la presión en el centro de la estrella, y se calcula la amplitud de las oscilaciones resultantes. De esta forma, se obtienen gráficos de frecuencia vs amplitud. Por último, a fin de mostrar que los resultados obtenidos para oscilaciones forzadas son también válidos para oscilaciones libres, éstos se comparan con los que se obtienen del análisis de Fourier de un sistema sin forzar y con condiciones iniciales arbitrarias. Es importante destacar que, más allá de la simetría esférica inicialmente impuesta al problema, en este abordaje no existe la necesidad de realizar aproximaciones adicionales con objeto de simplificar el problema, por lo que en teoría debería ser posible observar ciertos efectos no lineales que en otros métodos resultan descartados.

## II. MÉTODOS

### Modelo teórico y método numérico

Suponiendo una métrica con simetría esférica y un sistema de referencia Lagrangiano, las ecuaciones de la hidrodinámica y gravitación en Relatividad General resultan<sup>6</sup>

$$e^{-\varphi} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mu} (4\pi r^2 u) \quad (1)$$

$$e^{-\varphi} \frac{\partial u}{\partial t} = -4\pi r^2 \left( \frac{p}{r} + \frac{\Gamma}{h} \frac{\partial p}{\partial \mu} \right) \frac{m}{r^2} \quad (2)$$

$$e^{-\varphi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{p}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mu} (4\pi r^2 u) \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \Gamma \tau \quad (4)$$

$$\Gamma^2 = 1 + u^2 - \frac{2m}{r} \quad (5)$$

$$h \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\tau \frac{\partial p}{\partial \mu} \quad (6)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -p \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) \quad (7)$$

$$h = 1 + \varepsilon + \tau p \quad (8)$$

donde  $t$  es la coordenada tiempo,  $\mu$  es la coordenada espacial (masa bariónica),  $r$  es el radio de la esfera,  $m$  es la masa gravitacional,  $u$  es la velocidad radial del fluido,  $p$  es la presión del fluido,  $\tau$  es la inversa de la densidad bariónica,  $\varepsilon$  es la densidad de energía interna específica,  $h$  es la entalpía,  $\Gamma$  es el factor gamma de Relatividad General y  $\varphi$  es el logaritmo del tensor métrico  $g_{00}$ .

Como ecuación de estado para la materia se considera la ecuación de Bethe-Johnson I<sup>7</sup>

$$P = 364 n_B^{2.54} \quad (9)$$

$$E = 939 n_B + 236 n_B^{2.54} \quad (10)$$

donde  $P$  y  $E$  están dados en  $\text{MeV fm}^{-3}$  y  $n_B$  en  $\text{fm}^{-3}$ .

Se divide a la estrella en  $N$  zonas concéntricas de igual masa bariónica, con el fin de obtener ecuaciones algebraicas que vinculan los valores de las variables físicas para cada una de las zonas con las de las zonas vecinas utilizando el método de diferencias finitas centradas<sup>6</sup>, por lo que el método resulta de orden 2 tanto

para la coordenada espacial como para la temporal. De esta forma, a partir de las ecuaciones (1-8) y (9), se obtiene un sistema de 9  $N$  ecuaciones algebraicas no lineales que deben resolverse para cada paso de tiempo. Dicho sistema se resuelve con el método Newton-Raphson, que permite hallar soluciones de sistemas de ecuaciones no lineales de forma iterativa resolviendo en cada iteración un sistema de ecuaciones lineales, lo que se hace utilizando el método LU<sup>4</sup>. Dado que el método numérico utilizado es de bajo orden, tiene el efecto negativo de presentar oscilaciones espurias que tienden a crecer en cada paso de tiempo. A fin de evitar este problema, se incluye un filtro no lineal<sup>8</sup> que elimina de las soluciones las ondulaciones con longitudes de onda del orden del mallado. El efecto de estabilización es similar al que se logra al incluir viscosidad numérica.

Como condiciones iniciales se tomaron las correspondientes a la solución estática, resolviendo las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff<sup>9</sup> con el método numérico RK4<sup>4</sup>. Cuando se forzaron oscilaciones, a la presión central se la hizo variar armónicamente en el tiempo un 1% respecto a su valor de equilibrio. Al realizar simulaciones con el sistema libre, la presión central fue resuelta simultáneamente con las demás variables, pero se consideró una velocidad inicial para el sistema de  $-0.1 c$ .

### Simulaciones y análisis de frecuencias

Se realizaron simulaciones de la evolución de estrellas de diferentes masas, considerando 200 y 1000 capas de igual masa. Se simuló hasta 5 ms con diferentes pasos de tiempo regulares, con el fin de comprobar la no influencia de la viscosidad numérica sobre las frecuencias propias del sistema. Se utilizaron pasos de 1.23, 2.46, 4.92 y 9.85 ms. Las figuras 1 y 2 muestran ejemplos de resultados de simulaciones para sistemas forzado y libre.

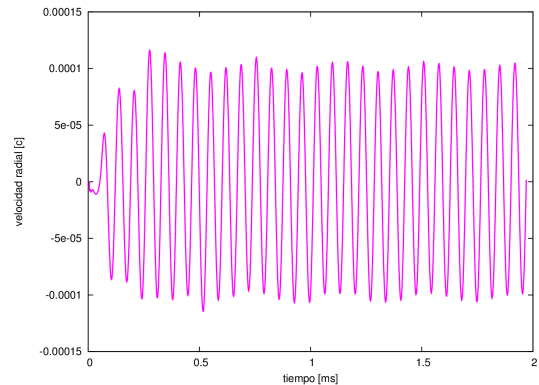


Figura 1. Evolución de la velocidad de la superficie de la estrella en función del tiempo, para un sistema forzado. La masa de la estrella es  $1.47 M_{\odot}$ . La presión central se hizo variar armónicamente un 1% respecto a su valor de equilibrio con frecuencia 14 KHz.

Para los casos de simulaciones de sistemas forzados, se determinaron las amplitudes de las oscilaciones de la velocidad radial de la superficie de la estrella en función de la frecuencia. La figura 3 muestra un ejemplo, donde se pueden observar los picos correspondientes a las frecuencias de resonancia. Para los casos de

simulaciones de sistemas libres, se realizaron análisis mediante la transformación discreta de Fourier (DFT) de la evolución temporal de la velocidad de la superficie de las estrella, utilizando la función *Fourier* del software Mathematica<sup>10</sup>. La figura 4 muestra el resultado para la simulación de la figura 2, que corresponde al mismo valor de masa utilizado en la figura 3. Como se puede apreciar, en ambos casos se observan picos para las mismas frecuencias, siendo mucho más notorios para la curva de amplitud vs frecuencia (figura 3) que para el periodograma obtenido por medio de la transformada discreta de Fourier (figura 4).

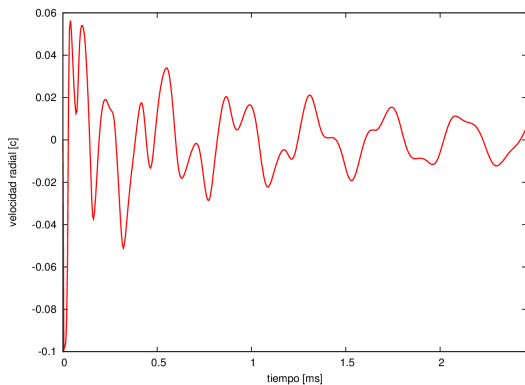


Figura 2. Evolución de la velocidad de la superficie de la estrella en función del tiempo, para un sistema libre. La masa de la estrella es  $1.47 M_{\odot}$ . Como condición inicial se tomó una velocidad radial de  $-0.1 c$ .

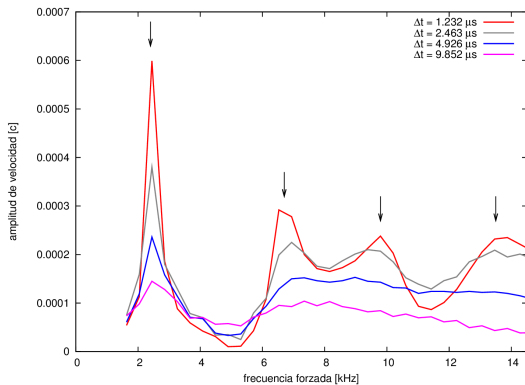


Figura 3. Amplitud de las oscilaciones de velocidad para la superficie de la estrella, para una estrella de  $1.47 M_{\odot}$ . Se presentan curvas para 4 diferentes pasos de tiempo, comprobándose que, a menor paso de tiempo, más definidos resultan las resonancias.

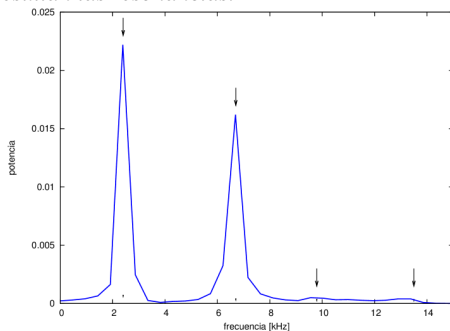


Figura 4. Periodograma de la evolución temporal de la velocidad radial de la superficie de una estrella (ver figura 2), obtenido con DFT. Se corresponde con el caso presentado en la figura 3. Los picos de las resonancias se dan a las mismas frecuencias, pero resultan menos evidentes.

## Resultados y discusión

En la figura 5 se resumen los resultados de las 4 primeras frecuencias de resonancia en función de la masa de la estrella. A aproximadamente  $1.8 M_{\odot}$  las curvas se cortan. Este límite se corresponde con la masa máxima de estabilidad de una estrella de neutrones tipo Bethe-Johnson I respecto a oscilaciones radiales. A partir de dicho valor, cualquier perturbación inicia el colapso de la estrella hacia agujero negro.

Cabe destacar que los valores obtenidos para las resonancias en función de la masa son cercanos a los presentados por Kokkotas y Ruoff para una estrella tipo Bethe-Johnson I, aunque en algunos casos muestran cierta discrepancia. Para la frecuencia fundamental ambos coinciden, para el primer armónico la diferencia es del 4%, y para el segundo de 7%, siendo siempre más altos los valores obtenidos en este trabajo. Dicha diferencia es debida a que en el presente trabajo no se consideró una corteza para la estrella, lo que en promedio endurece la ecuación de estado, elevando las frecuencias de resonancia. Esta diferencia es mayor para frecuencias altas, donde la relación entre la longitud de onda y el espesor de la corteza es más significativa.

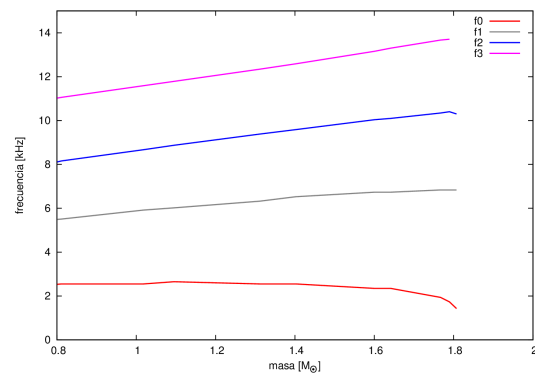


Figura 5. Frecuencias de resonancia para los primeros armónicos, en función de la masa de la estrella.

## III. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un método para el cálculo de las frecuencias propias de oscilación radial de estrellas compactas, en el cual se simula la evolución dinámica de la estrella. A diferencia de los métodos usuales, en los que se resuelve una ecuación de autovalores, este método no tiene la necesidad de hacer aproximaciones como considerar pequeñas oscilaciones, por lo que podría describir ciertos efectos no lineales descartados por otros métodos. Como ejemplo de aplicación, se consideraron estrellas compactas descritas por la ecuación de estado de Bethe-Johnson, y se obtuvieron gráficos de la dependencia de las 4 primeras frecuencias de resonancia con la masa de la estrella. Los resultados mostraron ser compatibles con los publicados por Kokkotas y Ruoff, salvo pequeñas discrepancias para los armónicos superiores atribuibles a que en este trabajo no se consideró corteza.

#### IV. REFERENCIAS

- 1- Gabler M et al. Physical Review D 80 (2009)
- 2- Kaaret P et al. ApJ, 480, L27 (1997)
- 3- Tikhonov AN & Samarskij AA “Ecuaciones de la Física Matemática”. Editorial Mir, Moscú (1972)
- 4- Press WH et al. “Numerical Recipes in C”, Second Edition. Cambridge University Press, Cambridge (2002)
- 5- Kokkotas K and Ruoff J. A&A 366, 565-572 (2000)
- 6- Yamada S. ApJ 475 (1997)
- 7- Bethe H & Johnson M. Nuclear Physics A 230, 1 (1974)
- 8- Engquist B et al. Mathematics of Computation 52 (1989)
- 9- Weinberg S. “Gravitation and Cosmology”. John Wiley & Sons, New York (1972)
- 10- Wolfram Research, Inc., Mathematica 9.0 (2012)