

# DESCRIPCIÓN DE MATERIA OSCURA POR SOLUCIONES EXACTAS DE RELATIVIDAD GENERAL

## DARK MATTER DESCRIPTION BY EXACT SOLUTIONS OF GENERAL RELATIVITY

Emanuel Gallo<sup>a</sup>, Federico Geser y Osvaldo M. Moreschi

*FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba,  
Instituto de Física Enrique Gaviola (IFEG), CONICET,  
Ciudad Universitaria, (5000) Córdoba, Argentina.*

a) egallo@famaf.unc.edu.ar

Recibido: 14/12/12 – Aceptado: 29/07/13

Presentamos una solución a las ecuaciones de Einstein con simetría esférica que representa la masa estimada dinámicamente y ajusta los datos observacionales de los fenómenos de la materia oscura.

*Palabras clave: Materia oscura, relatividad general*

We present a solution of the Einstein equations with spherical symmetry which represents the mass dynamically estimated of dark matter and fit several associated observational data of dark matter phenomena.

*Keywords: Dark matter, general relativity.*

### I Introducción

#### Motivaciones

Es muy común el estudio de la distribución de materia por medio de fenómenos de lentes gravitacionales. Las ecuaciones que se suelen usar para describir las lentes débiles desprecian las componentes espaciales del tensor energía-momento.

En un reciente trabajo[1] hemos encontrado que las expresiones para el ángulo de desviación de una distribución estacionaria y esféricamente simétrica está dada por

$$\alpha(J) = J \int_{-d_l}^{d_{ls}} \left[ \frac{3J^2}{r^2} \left( \frac{m(r)}{r^3} - \frac{4\pi}{3} \rho(r) \right) + 4\pi(\rho(r) + P_r(r)) \right] dy; \quad (1)$$

donde  $r = \sqrt{J^2 + y^2}$ ,  $J$  representa el parámetro de impacto,  $d_l$  la distancia observador-lente y  $d_{ls}$  la distancia entre lente y fuente. En esta expresión  $m(r)$  es la masa de la geometría (como se muestra en la Sección 2),  $\rho(r)$  la densidad de energía de la materia y  $P_r(r)$  es la componente  $T_r^r$  de su tensor momento energía. Se observa entonces, la aparición de un término que toma en cuenta la componente radial del tensor energía-momento.

Motivados por esto, hemos presentado una solución exacta[2] de las ecuaciones de campo para la métrica cuya única componente del tensor energía-momento es  $P_r$ . Hemos mostrado que esta solución puede ser usada para describir las propiedades principales de los fenómenos de materia oscura. Sin

embargo esta solución no tomó en cuenta la materia visible; que está asociada a la materia usual bariónica, ni la estimada dinámicamente.

En esta ocasión, presentamos otra solución exacta de las ecuaciones de campo que sí toma en cuenta la distribución de masa observada estimada dinámicamente.

### II La geometría del espaciotiempo

#### La métrica

Un espaciotiempo estacionario y esféricamente simétrico se puede expresar por el elemento de línea:

$$ds^2 = a(r)dt^2 - b(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2); \quad (2)$$

donde es conveniente definir  $m(r)$  por

$$b(r) = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}}. \quad (3)$$

#### La fuente

El tensor energía-momento se puede expresar por

$$T_{tt} = \rho a(r); \quad (4)$$

$$T_{rr} = \frac{P_r}{\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)}; \quad (5)$$

$$T_{\theta\theta} = P_t r^2; \quad (6)$$

$$T_{\varphi\varphi} = P_t r^2 \sin^2(\theta); \quad (7)$$

donde  $P_r$  es la componente radial y  $P_t$  la tangencial del tensor energía-momento.

### III Solución exacta sin contenido de materia visible

#### La solución sin contenido de masa

La solución presentada en [2] está determinada por las ecuaciones de estado que se pueden expresar por

$$\rho = 0, \quad (8)$$

$$P_t = 0. \quad (9)$$

Las componentes de la métrica son[2]

$$a(r) = \left( \frac{\ln\left(\frac{r}{\mu}\right)}{\ln\left(\frac{r_0}{\mu}\right)} \right)^2, \quad (10)$$

$$m(r) = 0; \quad (11)$$

donde  $\mu$  y  $r_0$  son constantes.

La componente radial del tensor energía-momento es

$$P_r = \frac{1}{4\pi r^2 \ln\left(\frac{r}{\mu}\right)}. \quad (12)$$

La geometría tiene una singularidad de curvatura logarítmica en el radio interno  $r = \mu$ . La métrica alcanza asintóticamente el valor minskowkiano en el radio externo  $r = r_0$ .

Para una discusión de las condiciones de energía ver referencia [2].

#### Masa de la solución

En la física newtoniana existe una noción de masa que es asociada a la descripción de partículas. En relatividad general existe una noción natural de masa total para sistemas aislados.

Si bien no existe una noción universal de masa cuasi-local[3,4] en relatividad general, existen varias definiciones que se pueden aplicar al caso particular de espaciotiempos estacionarios y esféricamente simétricos; todos coinciden en que  $m(r)$  es la medida natural de masa.

Por lo tanto este espaciotiempo **no tiene masa**. En la referencia [2] se discutió el uso de esta

geometría para describir los aspectos fundamentales de los fenómenos asociados a materia oscura.

### IV Solución exacta incluyendo materia observada

#### Métrica correspondiente a distribución isotérmica

Para la descripción de la masa estimada dinámicamente haremos uso de un modelo que ha demostrado ser muy útil y que es la denominada distribución isotérmica; que corresponde a una dependencia de la función masa dada por:

$$m(r) = \frac{M}{r_B} r; \quad (13)$$

donde  $M$  y  $r_B$  son constantes. La correspondiente densidad de materia es divergente en el origen, por lo que normalmente se usa una versión suavizada en el origen.

La componente temporal de la métrica se toma ahora como

$$a(r) = f(r) \left( \frac{\ln\left(\frac{r}{\mu}\right)}{\ln\left(\frac{r_0}{\mu}\right)} \right)^2; \quad (14)$$

donde se busca  $f(r)$  de tal forma que  $P_r$  tenga la misma forma funcional que en la geometría recién presentada. Esto determina que:

$$f(r) = C \left( r \ln^2 \left( \frac{r}{\mu} \right) \right)^p, \quad (15)$$

donde  $p = \frac{2M}{r_B(1 - \frac{2M}{r_B})}$  y  $C$  una constante.

La constante se ajusta de tal forma que  $f(r)$  adopta el valor unitario en el radio  $r$  en que la densidad de materia comienza a ser cero, y por lo tanto  $m$ , para  $r > r^*$ , es constante. Tomando  $r_B = r^*$  se tiene que  $M$  es la masa total del sistema.

En la figura 1 se muestra la gráfica de la función  $f$  en el rango de interés. Se observa que la misma presenta una pequeña variación cerca del valor unitario. Por lo tanto la componente temporal de la métrica es prácticamente la misma que en el caso en que se había despreciado la incidencia de la existencia de masa.

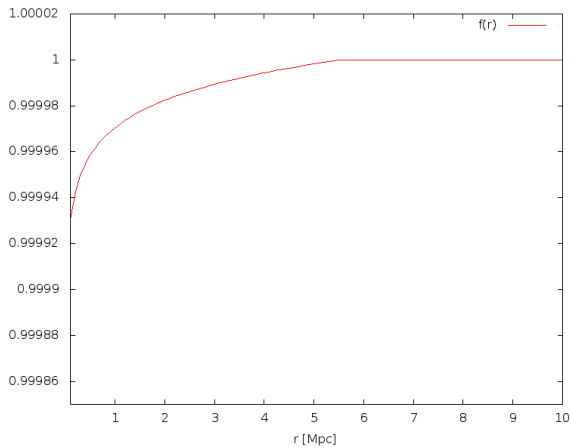


Figura 1: Función  $f(r)$  de la métrica, calculada para el caso del cúmulo de Coma.

Las constantes usadas en la geometría provienen de estimaciones del contenido de materia basado en cálculos dinámicos del trabajo [5].

La figura 2 muestra la dependencia de las componentes del tensor energía-momento como función de la coordenada radial, en unidades de megaparsecs. Se observa que mientras la densidad de materia es comparable a la dependencia de la componente radial; la componente tangencial tiene un valor menor en unos dos órdenes de magnitud.

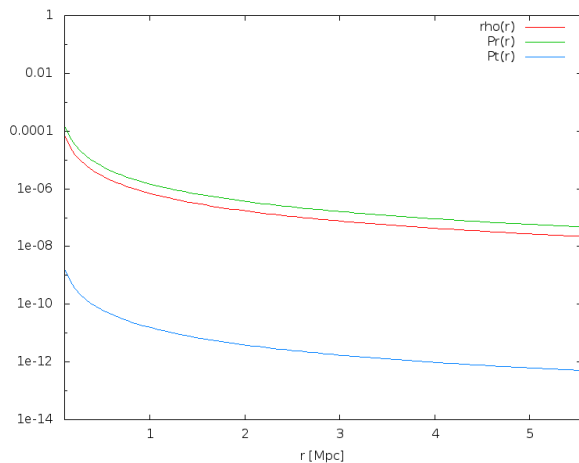


Figura 2: Componentes del tensor energía-momento, calculados para el caso del cúmulo de Coma.

En la teoría newtoniana de la distribución de materia correspondiente al caso isotérmico, la componente espacial del tensor energía-momento está determinado por el valor  $K_p \rho$ ; donde  $K_p$  se determina de la dinámica del sistema, por medio del valor de la velocidad cuadrática media. En la figura 3 se muestra el gráfico comparativo entre  $K_p \rho$  y  $P_t$ ,

observándose que son prácticamente indistinguibles. Debido a que  $P_t$  ha sido calculado por medio de la geometría del espaciotiempo; esto nos dice que esta solución exacta respeta la ecuación de estado calculada para el caso del sistema isotérmico. Por lo tanto se puede entender como un test de consistencia del modelo.

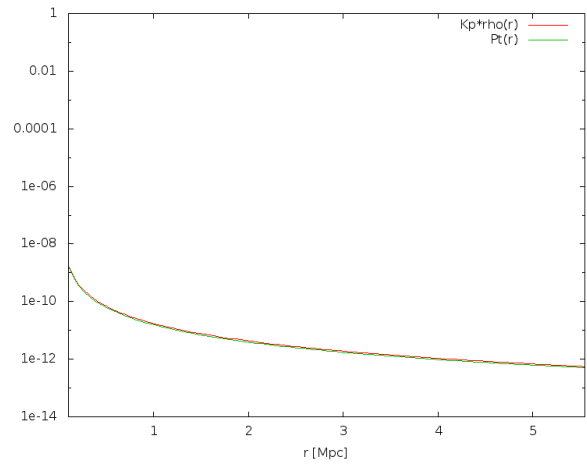


Figura 3: Comparación del cálculo newtoniano de  $P_t$  con el cálculo que viene de la geometría.

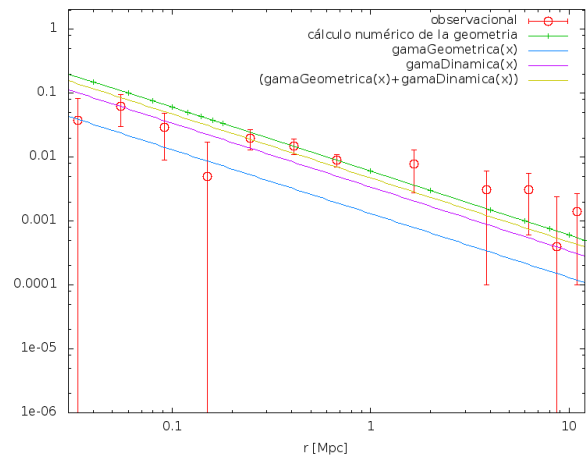


Figura 4: Nuevo ajuste para describir las observaciones de lentes gravitacionales del cúmulo de Coma, compatibles con los estudios dinámicos de galaxias en el mismo. La curva superior muestra el ajuste que esta geometría genera para el caso de las observaciones de lente gravitacional débil; mientras que las dos líneas inferiores muestran las contribuciones por separado. La segunda línea, desde arriba, es la suma de las dos líneas inferiores subsiguientes.

Finalmente, en la figura 4 se muestra cómo esta geometría representa fielmente las observaciones de lente gravitacional débil, aplicada al caso del cúmulo de Coma. La curva superior muestra el ajuste que esta

geometría genera para el caso de las observaciones de lente gravitacional débil para este sistema.

Los datos observacionales provienen de los trabajos [6] y [7].

## V Comentarios finales

En nuestro trabajo anterior, mostramos que los efectos gravitatorios asociados a los fenómenos de materia oscura se pueden manifestar con geometrías sin masa.

Aquí, hemos presentado una solución exacta de las ecuaciones de Einstein de un espaciotiempo estacionario y esféricamente simétrico con la contribución normal de materia, estimada dinámicamente, correspondiente al comúnmente usado perfil un sistema isotérmico, y que describe los aspectos fundamentales de los fenómenos de materia oscura. De esta manera hemos completado el modelo anterior al añadir la contribución de masa a la geometría.

La aparición de una contribución extra a las componentes espaciales del tensor energía-momento, podrían surgir de un buen entendimiento de mecanismos de promedios de tensores en espaciotiempos curvos. Ver contribución de E. Boero.

## Referencias

- [1] Emanuel Gallo and Osvaldo M. Moreschi. Gravitational lens optical scalars in terms of energy-momentum distributions. *Phys. Rev.*, D83:083007, 2011.
- [2] Emanuel Gallo and Osvaldo Moreschi. Peculiar anisotropic stationary spherically symmetric solution of Einstein equations. *Mod.Phys.Lett.*, A27:1250044, 2012.
- [3] Charles W. Misner and David H. Sharp. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse. *Phys.Rev.*, 136:B571–B576, 1964.
- [4] R. Penrose. Quasi-local mass and angular momentum in general relativity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 381:53–63, 1982.
- [5] A. L. Serra and M. J. L. Domínguez Romero. Measuring the dark matter equation of state. *MNRAS Letters*, 415:L74–L77, 2011.
- [6] Raphael Gavazzi et al. A weak lensing study of the Coma cluster. *A&A(Lett.)*, 498:L33–L36, 2009.
- [7] Kubo J.M., Stebbins A., Annis J., Dell’Antonio I.P., Lin H, Khabanian H., and Frieman J.A. The mass of the Coma cluster from weak lensing in the Sloan digital sky survey. *The Astrophysical J.*, 671:1466–1470, 2007.