ISSN: 0327-358X

FORMALISMO CUÁNTICO CANÓNICO PARA LA INTERACCIÓN ELECTROMAGNÉTICA DE PARTÍCULAS COMPUESTAS EN MODELOS DE CAMPOS DE GAUGE NO RELATIVISTAS

CANONICAL QUANTUM FORMALISM FOR THE ELECTROMAGNETIC INTERACTION OF COMPOSITE PARTICLES IN NONRELATIVISTIC GAUGE FIELD MODELS

Manavella E. C.[1,2]
[1]*Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina*
[2]*Instituto de Física Rosario, Universidad Nacional de Rosario, Bv. 27 de Febrero 210 bis, (2000) Rosario, Argentina*
e-mail: manavella@ifir-conicet.gov.ar
Recibido 12/12/2011; aprobado 5/06/2012

Se realiza un análisis comparativo entre tres modelos de partículas compuestas correlacionados. Estos son modelos de campos de gauge $U(1) \times U(1)$ no relativistas clásicos para la interacción electromagnética de dichas partículas en dimensiones (2+1). Los modelos contienen un campo $U(1)$ de Chern-Simons y el campo electromagnético, y describen tanto un sistema de bosones compuestos como uno de fermiones compuestos. Se considera explícitamente el segundo caso. La comparación se establece en base a los resultados obtenidos mediante el formalismo Hamiltoniano de Dirac para sistemas vinculados. Se proponen posibles aplicaciones de dichos resultados.

Palabras claves: Teoría cuántica de campos. Bosones y fermiones compuestos

A comparative analysis between three correlated models of composite particles is made. These are classical nonrelativistic $U(1)\times U(1)$ gauge field models for the electromagnetic interaction of these particles in (2+1) dimensions. The models contain a Chern-Simons $U(1)$ field and the electromagnetic field, and they describe both a composite boson system or a composite fermion one. The second case is considered explicitly. The comparison is performed on the basis of the results obtained by means of the Dirac Hamiltonian formalism for constrained systems. Possible applications of these results are proposed.

Keywords: Quantum field theory. Composite bosons and fermions

I. INTRODUCCIÓN

Como es bien sabido, la teoría de partículas compuestas [1] tiene significativa relevancia en la comprensión del efecto Hall cuántico en sus aspectos entero y fraccionario, y además plena vigencia. Estas partículas pueden ser de dos tipos: bosones compuestos (BC) [2] y fermiones compuestos (FC) [3].

Estamos interesados en estudiar la interacción electromagnética de partículas compuestas en dimensiones (2+1).

Por esto, hemos propuesto y analizado [4-6] tres modelos correlacionados de partículas compuestas. Estos son modelos de campos de gauge $U(1) \times U(1)$ no relativistas clásicos que contienen dos campos de gauge $U(1)$, un campo de Chern-Simons (CS) a_μ [7] y el campo electromagnético A_μ.

En el presente trabajo, realizamos un estudio comparativo desde el punto de vista cuántico canónico entre dichos modelos, considerando los resultados obtenidos en base al formalismo Hamiltoniano de Dirac para sistemas vinculados [8,9].

Por otro lado, planteamos posibles aplicaciones de dichos resultados en los contextos de la teoría cuántica de campos y de la materia condensada.

En un trabajo posterior, llevaremos a cabo un análisis comparativo entre los modelos citados pero en el ámbito de la cuantificación vía integral de camino de Feynman, utilizando los formalismos de Faddeev-Senjanovic [10] y de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST) [9,11].

El trabajo está organizado como sigue: En Sec. II, describimos las densidades Lagrangianas de los modelos. Luego, en Sec. III, comparamos las densidades Hamiltonianas canónicas, los vínculos de segunda y primera clase y las condiciones de fijado de gauge. Más tarde, en Sec. IV, hacemos lo propio con las variables de campo determinadas y los paréntesis de Dirac. Posteriormente, en Sec. V, construimos las álgebras de vínculos y Hamiltoniano de primera clase. Después, en Sec. VI, proponemos aplicaciones de los resultados encontrados. Finalmente, en Sec. VII, damos nuestras conclusiones.

II. DENSIDADES LAGRANGIANAS

El modelo básico que hemos considerado está descripto por la siguiente densidad Lagrangiana singular [4]:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}_{fc}^{em} + \mathcal{L}_{em}, \tag{2.1}$$

donde

$$\mathcal{L}_{fc}^{em} = i\psi^\dagger \mathcal{D}_0\psi + \frac{1}{2m_e}\psi^\dagger \vec{\mathcal{D}}^2\psi - \mu\psi^\dagger\psi + \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{\mu\nu\rho}a_\mu\partial_\nu a_\rho, \tag{2.2a}$$

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{2.2b}$$

En Ecs. (2.2), los índices griegos toman los valores $\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2$.

Empleamos unidades naturales en las cuales $\hbar = c = 1$. La métrica Minkowskiana es $g_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1)$ y $\varepsilon^{012} = \varepsilon^{12} = 1$.

En Ec. (2.2a), la derivada covariante, la cual involucra tanto al campo de gauge $U(1)$ de CS a_μ como al campo electromagnético A_μ, está dada por $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ia_\mu - ieA_\mu$ (tomamos la carga del electrón como $-e$) y además $\vec{\mathcal{D}}^2 = \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2$. El campo de materia ψ es un campo espinorial cargado que describe FC. m_e y μ son la masa efectiva y el potencial químico de los electrones, respectivamente. $\tilde{\phi}$ es la intensidad del tubo de flujo en unidades del cuanto de flujo 2π. (Fijamos el valor de la carga ficticia de cada partícula que interactúa con el campo de gauge ficticio en la unidad.)

En Ec. (2.2b), $F_{\mu\nu}$ es el tensor del campo electromagnético.

Por medio de la expresión de la derivada covariante, reescribimos Ec. (2.2a) como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{fc}^{em} \;=\;& i\frac{\tau+1}{2}\psi^\dagger\partial_0\psi + i\frac{\tau-1}{2}\partial_0\psi^\dagger\psi \\ &+\psi^\dagger\left(a_0 + eA_0\right)\psi + \frac{1}{2m_e}\psi^\dagger\vec{\mathcal{D}}^2\psi \\ &-\mu\psi^\dagger\psi + \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{\mu\nu\rho}a_\mu\partial_\nu a_\rho. \end{aligned}\tag{2.3}$$

En esta ecuación, el término fermiónico cinético está escrito en la forma general a través del parámetro arbitrario τ [9].

Por otro lado, propusimos generalizar este modelo adicionando diferentes términos a la densidad Lagrangiana (2.1).

Así, en Ref. [5], agregamos un término de masa topológica para el campo electromagnético y términos de interacción entre los campos de CS y electromagnético.

De esta manera, consideramos la siguiente densidad Lagrangiana singular, más general que la dada por Ec. (2.1):

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}_{fc}^{em} + \mathcal{L}_{tm} + \mathcal{L}_{int}, \tag{2.4}$$

donde $\mathcal{L}_{fc}^{em}$ está dada por Ec. (2.3) y

$$\mathcal{L}_{tm} = \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{2.5a}$$

$$\mathcal{L}_{int} = \zeta\frac{e}{m_e}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(a_\mu\partial_\nu A_\rho + A_\mu\partial_\nu a_\rho\right) + \eta\frac{e}{m_e}f_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{2.5b}$$

En Ec. (2.5a), el primer término del lado derecho es el término de masa topológica para el campo electromagnético. La masa topológica está dada por $2\pi/\sigma$ y así el flujo magnético real ligado a los electrones es $e\sigma/2\pi$.

En Ec. (2.5b), $\mathcal{L}_{int}$ es la densidad Lagrangiana correspondiente a la interacción entre los campos de gauge y $f_{\mu\nu}$ es el tensor del campo de CS. Además, en dicha ecuación, el término de CS está escrito de manera tal de obtener expresiones simétricas para los momentos canónicamente conjugados correspondientes a los campos de gauge.

Así, encontramos que las ecuaciones correspondientes al caso interactivo puro pueden ser obtenidas directamente de las correspondientes a este último modelo, cancelando los términos con masa topológica. Por el contrario, las ecuaciones correspondientes al caso topológicamente masivo puro no pueden ser encontradas de las correspondientes a dicho modelo cancelando los términos de interacción entre los campos de gauge.

Por esta razón, hemos considerado el caso topológicamente masivo puro [6].

De esta manera, partimos de la siguiente densidad Lagrangiana singular:

$$\mathcal{L}^{(3)} = \mathcal{L}_{fc}^{em} + \mathcal{L}_{tm}, \tag{2.6}$$

donde $\mathcal{L}_{fc}^{em}$ y $\mathcal{L}_{tm}$ están dadas por Ecs. (2.3) y (2.5a), respectivamente.

Por otro lado, notemos que un sistema de BC puede ser tratado en forma similar, la única diferencia es que, en este caso, el campo de materia es un campo escalar cargado.

III. DENSIDADES HAMILTONIANAS CANÓNICAS, VÍNCULOS DE SEGUNDA Y PRIMERA CLASE Y CONDICIONES DE FIJADO DE GAUGE

Para los tres modelos analizados, los momentos canónicamente conjugados a las variables de campo dinámicas independientes $A_{\mathcal{I}} = (a_\mu, A_\nu, \psi_\alpha, \psi_\beta^\dagger)$ son $P^{\mathcal{I}} = (p^\mu, P^\nu, \pi_\alpha^\dagger, \pi_\beta)$, respectivamente. En estas ecuaciones, el índice compuesto $\mathcal{I}$ adquiere valores sobre las componentes de las diferentes variables de campo y los nuevos índices griegos toman los valores $\alpha, \beta = 1, 2$.

Las densidades Hamiltonianas canónicas son:
(a) Para el modelo básico:

$$\mathcal{H}_c^{(1)} = -\frac{1}{2}P^i P_i + \mathcal{F}, \tag{3.1}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= -\frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_0\partial_i a_j + p^i\partial_i a_0 + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + P^i\partial_i A_0 \\ &\quad +\mu\psi^\dagger\psi - \psi^\dagger\left(a_0 + eA_0\right)\psi - \frac{1}{2m_e}\psi^\dagger\vec{\mathcal{D}}^2\psi. \end{aligned}\tag{3.2}$$

En estas ecuaciones, los índices latinos toman los valores $i, j = 1, 2$.
(b) Para el modelo general:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c^{(2)} &= \frac{m_e}{2\eta e}\left(\frac{m_e}{4\eta e}\,p^i + P^i\right)p_i - \frac{\zeta e}{m_e}\varepsilon^{ij}A_0\partial_i a_j \\ &+ \frac{m_e}{2\eta e}\,\varepsilon^{ij}\,a_i\left[\left(\frac{\zeta e}{m_e} + \frac{m_e}{8\pi\tilde{\phi}\eta e}\right)p_j + \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\,P_j\right] \\ &+ \frac{m_e}{8\pi\tilde{\phi}\eta e}\left(\frac{\zeta e}{m_e} + \frac{m_e}{16\pi\tilde{\phi}\eta e}\right)a_i\,a^i + \frac{\zeta}{2\eta}\varepsilon^{ij}A_iP_j \\ &+ \frac{m_e}{4\eta e}\left(\frac{1}{\sigma} + \frac{\zeta}{\eta}\right)\varepsilon^{ij}A_ip_j - \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{ij}A_0\partial_i A_j \\ &+ \frac{m_e}{2\eta e}\left[\frac{\zeta}{8\pi\tilde{\phi}\eta} + \frac{1}{8\pi\tilde{\phi}\sigma} + \left(\frac{\zeta e}{m_e}\right)^2\right]a_i\,A^i \\ &- \frac{\zeta e}{m_e}\varepsilon^{ij}\,a_0\partial_i A_j - \frac{\eta e}{m_e}f_{ij}F^{ij} \\ &+ \frac{\zeta}{4\eta}\left(\frac{1}{\sigma} + \frac{\zeta}{2\eta}\right)A_i\,A^i + \mathcal{F}. \end{aligned}\tag{3.3}$$

(c) Para el modelo topológicamente masivo puro:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c^{(3)} &= -\frac{1}{2}\,P_iP^i - \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{ij}A_0\partial_i A_j - \frac{1}{8\sigma^2}A_i\,A^i \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{ij}A_iP_j\, + \mathcal{F}. \end{aligned}\tag{3.4}$$

Por otro lado, los vínculos de segunda clase son:
(a) Para el modelo básico:

$$\Phi_2^{0i} = p^i - \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}a_j = 0, \tag{3.5a}$$

$$\Omega_\alpha^\dagger = \pi_\alpha^\dagger + i\frac{\tau+1}{2}\psi_\alpha^\dagger = 0, \tag{3.5b}$$

$$\Omega_\alpha = \pi_\alpha - i\frac{\tau-1}{2}\psi_\alpha = 0. \tag{3.5c}$$

(b) Para el modelo general:
Los dados por Ecs. (3.5b,c).
(c) Para el modelo topológicamente masivo puro:
Los dados por Ecs. (3.5).

Asimismo, los vínculos de primera clase son:
(a) Para el modelo básico:

$$\Sigma_1^{(1)} = e\partial_i p^i - \partial_i P^i + \frac{e}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}\partial_i a_j = 0, \tag{3.6a}$$

$$\Sigma_2^{(1)} = \psi^\dagger\pi - \psi\pi^\dagger - \frac{i}{e}\partial_i P^i = 0, \tag{3.6b}$$

$$\Sigma_3^{(1)} = p^0 = 0, \tag{3.6c}$$

$$\Sigma_4^{(1)} = P^0 = 0. \tag{3.6d}$$

(b) Para el modelo general:

$$\begin{aligned}\Sigma_1^{(2)} &= e\left(\frac{1}{4\pi\tilde{\phi}} - \frac{\zeta}{m_e}\right)\varepsilon^{ij}\partial_i a_j + e\partial_i p^i \\ &\quad + \left(\frac{\zeta e^2}{m_e} - \frac{1}{2\sigma}\right)\varepsilon^{ij}\,\partial_i A_j - \partial_i P^i \\ &= 0, \end{aligned}\tag{3.7a}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_2^{(2)} &= \psi^\dagger\pi - \psi\pi^\dagger - \frac{i}{e}\left(\frac{\zeta e}{m_e}\varepsilon^{ij}\,\partial_i a_j \right.\\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{ij}\,\partial_i A_j + \partial_i P^i\right) \\ &= 0 \end{aligned}\tag{3.7b}$$

y los dados por Ecs. (3.6c,d).
(c) Para el modelo topológicamente masivo puro:

$$\begin{aligned}\Sigma_1^{(3)} &= \frac{e}{4\pi\tilde{\phi}}\varepsilon^{ij}\partial_i a_j - \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j + e\partial_i p^i - \partial_i P^i \\ &= 0, \end{aligned}\tag{3.8a}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_2^{(3)} &= \psi^\dagger\pi - \psi\pi^\dagger - \frac{i}{e}\left(\frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{ij}\,\partial_i A_j + \partial_i P^i\right) \\ &= 0 \end{aligned}\tag{3.8b}$$

y los dados por Ecs. (3.6c,d).
Correspondientemente, las condiciones de fijado de gauge elegidas son:
(a) Para el modelo básico:

$$\Theta_1^{(1)} = \partial^i a_i = 0, \tag{3.9a}$$

$$\Theta_2^{(1)} = \partial^i A_i = 0, \tag{3.9b}$$

$$\Theta_3^{(1)} = a_0 = 0, \tag{3.9c}$$

$$\Theta_4^{(1)} = \nabla^2 A_0 - \partial_i P^i = 0. \qquad (3.9d)$$

(b) Para el modelo general:
Las dadas por Ecs. (3.9a,b) y las siguientes:

$$\begin{aligned}\Theta_3^{(2)} &= \nabla^2 \left(A_0 - \frac{2\eta e}{m_e} a_0 \right) - \partial_i P^i \\ &+ \varepsilon^{ij} \left(\frac{\zeta e}{m_e}\, \partial_i a_j + \frac{1}{2\sigma} \partial_i A_j \right) \\ &= 0, \end{aligned} \qquad (3.10a)$$

$$\begin{aligned}\Theta_4^{(2)} &= \nabla^2 A_0 - \frac{m_e}{2\eta e} \left[\varepsilon^{ij} \left(\frac{1}{4\pi\tilde{\phi}} \partial_i a_j + \frac{\zeta e}{m_e} \partial_i A_j \right) \right. \\ &\left. -\partial_i p^i \right] \\ &= 0. \end{aligned} \qquad (3.10b)$$

(c) Para el modelo topológicamente masivo puro:
Las dadas por Ecs. (3.9a-c) y la siguiente:

$$\Theta_4^{(3)} = \nabla^2 A_0 - \partial_i P^i + \frac{1}{2\sigma} \varepsilon^{ij}\, \partial_i A_j = 0. \qquad (3.11)$$

Hemos considerado, para las componentes espaciales de los campos a_μ y A_μ, el gauge de Coulomb mientras que, para las componentes temporales, generalizaciones adecuadas del gauge temporal ($a_0 = A_0 = 0$).

Podemos ver que al anular la masa topológica las magnitudes $\mathcal{H}_c^{(3)}, \Sigma_1^{(3)}, \Sigma_2^{(3)}$ y $\Theta_4^{(3)}$, correspondientes al modelo topológicamente masivo puro, se reducen a las magnitudes $\mathcal{H}_c^{(1)}, \Sigma_1^{(1)}, \Sigma_2^{(1)}$ y $\Theta_4^{(1)}$, correspondientes al modelo básico, respectivamente.

Además, encontramos que las estructuras de vínculos correspondientes a los modelos básico y topológicamente masivo puro son similares, pero no lo son con respecto a la correspondiente al modelo general.

Por otro lado, vemos que los tres modelos analizados poseen cuatro vínculos de primera clase correspondientes al grupo de simetría $U(1) \times U(1)$ de dichos modelos.

IV. VARIABLES DE CAMPO DETERMINADAS Y PARÉNTESIS DE DIRAC

Las variables de campo que quedan determinadas al tomar los vínculos de segunda y primera clase como ecuaciones fuertes son:
(a) Para el modelo básico:

$$p^i = \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}} \varepsilon^{ij} a_j, \qquad (4.1a)$$

$$\pi_\alpha^\dagger = -i \frac{\tau + 1}{2} \psi_\alpha^\dagger, \qquad (4.1b)$$

$$\pi_\alpha = i \frac{\tau - 1}{2} \psi_\alpha, \qquad (4.1c)$$

$$p^0 = 0, \qquad (4.1d)$$

$$P^0 = 0, \qquad (4.1e)$$

$$a_0 = 0, \qquad (4.1f)$$

$$A_0(x) = -\frac{1}{2\pi} \int d^2y \partial_i P^i(y) \ln |\vec{x} - \vec{y}|. \qquad (4.1g)$$

(b) Para el modelo general:
Las correspondientes a Ecs. (4.1b-e) y las siguientes:

$$\begin{aligned} a_0(x) &= -\frac{m_e}{4\pi\eta e} \int d^2y \left[\left(\frac{\zeta e}{m_e} + \frac{m_e}{8\pi\tilde{\phi}\eta e} \right) \varepsilon^{ij} \partial_i a_j \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{\zeta}{\eta} \right) \varepsilon^{ij} \partial_i A_j - \frac{m_e}{2\eta e} \partial_i p^i - \partial_i P^i \right] (y) \\ &\times \ln \mid \vec{x} - \vec{y}|, \end{aligned} \qquad (4.2a)$$

$$\begin{aligned} A_0(x) &= -\frac{m_e}{4\pi\eta e} \int d^2y \left[\varepsilon^{ij} \left(\frac{1}{4\pi\tilde{\phi}} \partial_i a_j + \frac{\zeta e}{m_e} \partial_i A_j \right) \right. \\ &\left. -\partial_i p^i \right] (y) \\ &\times \ln \mid \vec{x} - \vec{y}|. \end{aligned} \qquad (4.2b)$$

(c) Para el modelo topológicamente masivo puro:
Las que figuran en Ecs. (4.1a-f) y la siguiente:

$$A_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int d^2y \left(-\partial_i P^i + \frac{1}{2\sigma} \varepsilon^{ij}\, \partial_i A_j \right) (y) \ln |\vec{x} - \vec{y}|. \qquad (4.3)$$

Además, los paréntesis de Dirac no nulos son:
(a) Para el modelo básico:
campo-campo:

$$[a_1(x), a_2(y)]_-^D = 2\pi\tilde{\phi}\delta(\vec{x} - \vec{y}), \qquad (4.4a)$$

$$\left[\psi_\alpha^\dagger(x), \psi_\beta(y) \right]_+^D = -i\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{x} - \vec{y}), \qquad (4.4b)$$

campo-momento:

$$\left[A_i(x), P^j(y) \right]_-^D = \delta_i^j \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \frac{1}{2\pi} \partial_i^x \partial^{xj} \ln |\vec{x} - \vec{y}|, \qquad (4.4c)$$

donde hemos utilizado la notación $[\ .\ ,\ .\ ]_\mp$ para indicar paréntesis entre variables de Grassmann bosónicas y fermiónicas, respectivamente.

(b) Para el modelo general:
Los dados por Ecs. (4.4b,c) y los siguientes:
campo-momento:

$$\left[a_i(x), p^j(y)\right]_-^D = \delta_i^j \delta(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{1}{2\pi}\partial_i^x \partial^{xj} \ln|\vec{x}-\vec{y}|, \tag{4.5a}$$

momento-momento:

$$\left[p^1(x), p^2(y)\right]_-^D = -\frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}\delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.5b}$$

$$\left[p^i(x), P^j(y)\right]_-^D = -\frac{\zeta e}{m_e}\varepsilon^{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{4.5c}$$

$$\left[P^1(x), P^2(y)\right]_-^D = -\frac{1}{2\sigma}\delta(\vec{x}-\vec{y}). \tag{4.5d}$$

(c) Para el modelo topológicamente masivo puro:
Los dados por Ecs. (4.4a-c) y (4.5d).

Encontramos que al anular la masa topológica las variables de campo determinadas y los paréntesis de Dirac del modelo topológicamente masivo puro se reducen a los correspondientes al modelo básico.

Por otro lado, podemos ver que el espacio de fases reducido está constituido, para los modelos básico y topológicamente masivo puro, por los pares canónicos $\left(A_i, P^i\right)$ y, para el modelo general, por los pares canónicos $\left(a_i, p^i\right)$ y $\left(A_i, P^i\right)$.

V. ÁLGEBRAS DE VÍNCULOS Y HAMILTONIANO DE PRIMERA CLASE

Las densidades Hamiltonianas de primera clase correspondientes a los modelos estudiados tienen la misma forma:

$$\mathcal{H}_0^{(r)} = \mathcal{H}_c^{(r)} + a_0\left(\frac{1}{e}\Sigma_1^{(r)} + i\Sigma_2^{(r)}\right) + ieA_0\Sigma_2^{(r)}, \tag{5.1}$$

donde $r = 1,2,3$ corresponde a los modelos básico, general y topológicamente masivo puro, respectivamente. Así, utilizando esta ecuación, encontramos que:

(a) Para el modelo básico:
De Ecs. (3.1) y (3.6a,b), es

$$\mathcal{H}_0^{(1)} = -\frac{1}{2}P^iP_i + \mathcal{G}, \tag{5.2}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{G} \;=\; & \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \mu\psi^\dagger\psi - \frac{1}{2m_e}\psi^\dagger\vec{\mathcal{D}}^2\psi \\ & + i\left(a_0 + eA_0\right)\left(\psi^\dagger\pi - \psi\pi^\dagger + i\psi^\dagger\psi\right).\end{aligned} \tag{5.3}$$

(b) Para el modelo general:
De Ecs. (3.3) y (3.7a,b), se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0^{(2)} \;=\; & \frac{m_e}{2\eta e}\left(\frac{m_e}{4\eta e}p^i + P^i\right)p_i + \frac{\zeta}{4\eta}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{\zeta}{2\eta}\right)A_i\,A^i \\ & + \frac{m_e}{2\eta e}\varepsilon^{ij}\,a_i\left[\left(\frac{\zeta e}{m_e} + \frac{m_e}{8\pi\tilde{\phi}\eta e}\right)p_j + \frac{1}{4\pi\tilde{\phi}}P_j\right] \\ & + \frac{m_e}{8\pi\tilde{\phi}\eta e}\left(\frac{\zeta e}{m_e} + \frac{m_e}{16\pi\tilde{\phi}\eta e}\right)a_i\,a^i + \frac{\zeta}{2\eta}\varepsilon^{ij}A_iP_j \\ & + \frac{m_e}{2\eta e}\left[\frac{\zeta}{8\pi\tilde{\phi}\eta} + \frac{1}{8\pi\tilde{\phi}\sigma} + \left(\frac{\zeta e}{m_e}\right)^2\right]a_i\,A^i \\ & - \frac{\eta e}{m_e}f_{ij}F^{ij} + \frac{m_e}{4\eta e}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{\zeta}{\eta}\right)\varepsilon^{ij}A_ip_j \\ & + \mathcal{G}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

(c) Para el modelo topológicamente masivo puro:
De Ecs. (3.4) y (3.8a,b), vale

$$\mathcal{H}_0^{(3)} = -\frac{1}{2}P^iP_i - \frac{1}{8\sigma^2}A_i\,A^i - \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{ij}A_iP_j + \mathcal{G}. \tag{5.5}$$

Podemos ver que al anular la masa topológica la densidad Hamiltoniana de primera clase del modelo topológicamente masivo puro se reduce a la correspondiente al modelo básico.

Además, encontramos que, para los modelos analizados, las álgebras de vínculos y Hamiltoniano de primera clase tienen la misma forma:

$$\left[\Sigma_a^{(r)}(x), \Sigma_b^{(r)}(y)\right]_- = C_{ab}^{(r)c}\Sigma_c^{(r)}(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}), \tag{5.6a}$$

$$\left[H_0^{(r)}, \Sigma_a^{(r)}(x)\right]_- = D_a^{(r)b}\Sigma_b^{(r)}(x), \tag{5.6b}$$

donde los coeficientes $C_{ab}^{(r)c}$ y $D_a^{(r)b}$ son todos nulos y $H_0^{(r)} = \int d^2x\,\mathcal{H}_0^{(r)}$ representan las Hamiltonianas de primera clase.

Puesto que las álgebras consideradas son Abelianas, no existe problema de ordenamiento de operadores a nivel cuántico (no se presentan anomalías).

VI. POSIBLES APLICACIONES DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Veamos ahora posibles aplicaciones de los resultados encontrados en Refs. [4-6] en los contextos de la teoría cuántica de campos y de la materia condensada.

A. En el contexto de la teoría cuántica de campos:

Se sabe que, desde hace tiempo, se ha considerado en distintos modelos con invariancias de gauge la adición de términos en altas derivadas en los campos de gauge a las densidades Lagrangianas correspondientes, conservando dichas invariancias. La razón de este procedimiento es que en general dichos términos mejoran el comportamiento ultravioleta de los propagadores de tales campos, pudiéndose eventualmente eliminar la divergencia de ciertos diagramas de Feynman donde dichos propagadores aparecen [12].

De esta manera, encontramos interesante aplicar este procedimiento a los modelos correspondientes a Refs. [4-6].

Los términos en altas derivadas a considerar son:

$$\mathcal{L}_a = k\partial_\rho F_{\mu\nu}\partial^\rho F^{\mu\nu}, \tag{6.1}$$

para los modelos de Refs. [4,6], y

$$\mathcal{L}'_a = k\partial_\rho F_{\mu\nu}\partial^\rho F^{\mu\nu} + k'\partial_\rho f_{\mu\nu}\partial^\rho F^{\mu\nu}, \tag{6.2}$$

para el modelo de Ref. [5]. En estas ecuaciones, k y k' son constantes.

En otro orden de cosas, desarrollaremos los procedimientos de regularización y renormalización de los modelos correspondientes a Refs. [4-6].

B. En el contexto de la materia condensada:

Como es bien sabido, el estudio desde el punto de vista cuántico de sistemas electrónicos en bajas dimensiones, es decir, en planos y cadenas de átomos en lugar de los sólidos tridimensionales usuales, es un tema de enorme interés actual en el campo de la materia condensada. Ello se debe, entre otras cosas, a que estos sistemas presentan características especiales que llevan a fenómenos tales como la superconductividad de alta temperatura crítica y a propiedades magnéticas particulares, con potenciales aplicaciones tecnológicas.

Una forma de estudiar estos sistemas es en base a la teoría cuántica de campos. Otra forma consiste en utilizar la teoría cuántica de muchos cuerpos [13], implementada mediante técnicas analíticas y computacionales.

Como dijimos en la introducción, en Refs. [4-6], hemos propuesto modelos de partículas compuestas y los hemos estudiado en base al primer mecanismo citado recién. Estos modelos constituyen generalizaciones del modelo que Halperin et al. analizaron, en Ref. [14], mediante el segundo mecanismo.

En esta situación, nuestro propósito es estudiar los modelos propuestos en Refs. [4-6] mediante la teoría cuántica de muchos cuerpos, y comparar los resultados obtenidos con los correspondientes a Ref. [14]. En particular, consideraremos magnitudes físicas de interés tales como el calor específico electrónico.

VII. CONCLUSIONES

Se ha presentado un estudio comparativo entre tres modelos de campos de gauge $U(1) \times U(1)$ no relativistas clásicos correlacionados que describen la interacción electromagnética de partículas compuestas en dimensiones (2+1).

La comparación se basó en los resultados encontrados por medio del formalismo Hamiltoniano de Dirac para sistemas vinculados.

Como resultado, se halló que al anular la masa topológica los resultados correspondientes al modelo topológicamente masivo puro se reducen a los correspondientes al modelo básico.

Además, se encontró que las estructuras de vínculos correspondientes a los modelos básico y topológicamente masivo puro son similares, pero no lo son con respecto a la correspondiente al modelo general.

También, se vio que los espacios de fases reducidos correspondientes a los modelos básico y topológicamente masivo puro son iguales, pero distintos del correspondiente al modelo general.

Asimismo, se observó que las densidades Hamiltonianas de primera clase correspondientes a los modelos estudiados tienen la misma forma.

Finalmente, se plantearon posibles aplicaciones de los resultados obtenidos en Refs. [4-6].

El trabajo fue desarrollado considerando explícitamente el caso de FC.

REFERENCIAS

[1] Milovanović M. V. and Papić Z., *Quantum Disordering of a Quantum Hall Superfluid.* XVII Symposium on Condensed Matter Physics - SFKM 2007, Vršac - Serbia; *Phys. Rev. B* **79**, 115319 (2009); Papić Z. and Milovanović M. V., *Phys. Rev. B* **75**, 195304 (2007); Ye J., *Ann. Phys.* **323**, 580 (2008); Möller G., Simon S. H. and Rezayi E. H., *Phys. Rev. B* **79**, 125106 (2009).

[2] Milovanović M. V. and Stanić I., *Phys. Rev. B* **72**, 155306 (2005); Stanić I. and Milovanović M. V., *Phys. Rev. B* **71**, 035329 (2005); Jiang L. and Ye J., *Phys. Rev. B* **74**, 245311 (2006); Ye J., *Phys. Rev. Lett.* **97**, 236803 (2006); Murthy G. and Sachdev S., *Phys. Rev. Lett.* **101**, 226801 (2008).

[3] Jain J. K. and Anderson P. W., *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* **106**, 9131 (2009); Jolad S. and Jain J. K., *Phys. Rev. Lett.* **102,** 116801 (2009); Majumder D., Mandal S. S. and Jain J. K., *Nature Phys.* **5,** 403 (2009); Papić Z., Möller G., Milovanović M. V., Regnault N. and Goerbig M. O., *Phys. Rev. B* **79**, 245325 (2009); Tőke C. and Jain J. K., *Phys. Rev. B* **80**, 205301 (2009).

[4] Manavella E. C., *Int. J. Theor. Phys.* **40**, 1453 (2001).

[5] Manavella E. C. and Addad R. R., *Int. J. Theor. Phys.* **46**, 2868 (2007).

[6] Manavella E. C. and Addad R. R., *Int. J. Theor. Phys.* **48**, 2473 (2009).

[7] Wilczek F., *Phys. Rev. Lett.* **49**, 957 (1982); Arovas D. P., Schrieffer J. R., Wilczek F. and Zee A., *Nucl. Phys. B* **251**, 117 (1985); Zhang S. -C., Hansson T. H. and Kivelson S. A., *Phys. Rev. Lett.* **62**, 82 (1989).

[8] Dirac P. A. M., *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950); *Lectures on Quantum Mechanics.* Yeshiva University

Press, New York (1964).

[9] Sundermeyer K., *Constrained Dynamics.* Springer, Berlin (1982).

[10] Faddeev L. D., *Theor. Math. Phys.* **1**, 1 (1970); Senjanovic P., *Ann. Phys. (N. Y.)* **100**, 227 (1976).

[11] Becchi C., Rouet A. and Stora R., *Phys. Lett. B* **52**, 344 (1974); *Ann. Phys. (N. Y.)* **98**, 287 (1976); Fradkin E. S. and Vilkovisky G. A., *Phys. Lett. B* **55**, 224 (1975); Tyutin I. V., Lebedev preprint FIAN 39, unpublished (1975) (in Russian); Fradkin E. S. and Fradkina T. E., *Phys. Lett. B* **72**, 343 (1978); Marnelius R., *Introduction to the quantization of general gauge theories.* Preprint, Institute of Theoretical Physics, Göteborg (1981); Henneaux M., *Phys. Rep.* **126**, 1 (1985).

[12] Nesterenko V. V., *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, 1673 (1989); Alvarez-Gaumé L., Labastida J. M. F. and Ramallo A. V., *Nucl. Phys. B* **334**, 103 (1990); Avdeev L., Grigoryev G. and Kazakov D., *Nucl. Phys. B* **382**, 561 (1992); Odintsov S. D., *Z. Phys. C* **54**, 531 (1992); Foussats A., Manavella E., Repetto C., Zandron O. P. and Zandron O. S., *Int. J. Theor. Phys.* **34**, 1 (1995); 1037 (1995); *J. Math. Phys.* **37**, 84 (1996); *Specul. Sci. Technol.* **20**, 3 (1997); Benedetti D., Machado P. F. and Saueressig F., *Mod. Phys. Lett. A* **24**, 2233 (2009); Carone C. D., *Phys. Lett. B* **677**, 306 (2009).

[13] Schrieffer J. R., *Theory of Superconductivity.* W. A. Benjamin, Inc., New York (1964); Mahan G. D., *Many-Particle Physics.* 3rd Ed., Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2000).

[14] Halperin B. I., Lee P. A. and Read N., *Phys. Rev. B* **47**, 7312 (1993).