ISSN (EN LINEA): 1850 - 1158

Modelo dinámico para estrategia de búsqueda intermitente

Miguel A. Ré

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria - (5010) - Córdoba - Argentina
Facultad Regional Córdoba
Universidad Tecnológica Nacional
Maestro López esq. Cruz Roja Argentina - (5010) Córdoba - Argentina
e-mail: re@famaf.unc.edu.ar

El problema de la búsqueda de un objetivo surge en distintos contextos de investigación. De particular interés resulta la evaluación de la eficiencia de las posibles estrategias de búsqueda a seguir, considerando por ejemplo el tiempo empleado en la detección del objetivo. Una estrategia de búsqueda que ha despertado interés es la denominada estrategia intermitente: los buscadores alternan entre un modo de desplazamiento lento y uno rápido. A partir de un modelo de caminata aleatoria de tiempo discreto se ha encontrado que la estrategia intermintente da una mayor eficiencia considerando el tiempo de detección. Se presenta en esta comunicación una extensión del modelo de caminata aleatoria a tiempo continuo, buscando una mejor aproximación a los procesos reales. Se propone así un modelo en el que un conjunto de buscadores distribuídos en una red unidimensional realizan una caminata aleatoria de tiempo continuo. Los buscadores no poseen información previa acerca de la ubicación de un único objetivo fijo en una posición en la red. Los buscadores pueden alternar entre dos modos de desplazamiento: uno rápido con transiciones a sitios a una distancia de L sitios de red y uno lento con transiciones a primeros vecinos. Las transiciones entre los modos de desplazamiento están reguladas por una dinámica dicotómica. La detección del blanco se produce cuando un buscador arriba a la posición del objetivo.

The problem of searching a target emerges in diverse research contexts. Of particular interest is the evaluation of the efficiency of possible alternative strategies for searching, considering for instance the time needed to find the target. The so called intermittent strategy has been proposed recently as an optimizing strategy as regards of the finding time. In this proposal searchers alternate between a slow and a fast displacement mode. The model has been originally formulated as a discrete time random walk. We present in this communication an extension to a continuous time random walk model, looking for a better approximation to real processes. It is proposed in this way a model in which a set of walkers distributed on a one dimensional lattice make a continuous time random walk. Searchers have no previous information about the only target location on the lattice. Searchers can alternate between two modes of displacement: a fast mode, with transitions to sites a distance of L times the lattice parameter, and a slow mode with transitions to first neighbours. The transitions between these modes of displacement is regulated by an independent dynamics. The target is detected when one of the walkers reaches its position in the lattice.

Pacs N^0 87.23.-n, 05.40.-a

1 Introducción

Diversos problemas que surgen en la vida cotidiana o en el ámbito científico pueden plantearse como un proceso de búsqueda$^{(1-5)}$. En muchos de estos problemas el tiempo de encuentro es una magnitud crítica, ya sea porque el buscador tiene un tiempo finito de acción o porque el objetivo está disponible durante un intervalo de tiempo acotado. Por lo tanto, suponiendo que existe un único objetivo o un conjunto de objetivos distribuídos en el espacio resulta de interés analizar las distintas estrategias que pueden desplegarse para optimizar el tiempo de detección.

Así por ejemplo se han considerado estrategias del tipo vuelos de Lévy o, a partir de observaciones de desplazamientos de animales forrajeros, se han considerado estrategias de búsqueda denominadas intermitentes. En este último grupo el buscador alterna entre un estado de desplazamiento rápido, sin posibilidad de detección y un estado de desplazamiento lento con capacidad de detección.

En un estudio reciente[6] se ha encontrado que una estrategia de búsqueda intermitente en un modelo de Caminata Aleatoria de Tiempo Discreto (DTRW) sobre una red, con un único objetivo oculto en la red, permite optimizar el tiempo de hallazgo. En el modelo propuesto un conjunto de buscadores se desplazan sobre una red unidimensional infinita en la que está oculto un único objetivo. Cada buscador alterna entre desplazamientos largos de longitud L sitios de red y desplazamientos cortos a primeros vecinos. La elección del largo del salto se da con probabilidad α para saltos a primeros vecinos y con probabilidad $1-\alpha$ para largo L. La detección del objetivo se da cuando el buscador llega a la posición que ocupa el objetivo. Los buscadores no poseen información previa sobre la posición del blanco. El problema resulta asimilable a uno de reacción mediado por difusión con tasa de reacción infinita (reacción perfecta) y el tiempo de detección corresponde al tiempo del primer pasaje por la posición del blanco.

Sin embargo podemos pensar que modelos de tiempo continuo darán una mejor aproximación al proceso real dado en la naturaleza. Por esta razón presentamos en esta comunicación una extensión posible del modelo intermitente a caminatas aleatorias de tiempo continuo (CTRW), evaluándose la optimización del tiempo de encuentro. Proponemos aquí un modelo dinámico en el que cada buscador alterna entre un estado de desplazamiento rápido y uno lento. Las transiciones están reguladas por una dinámica independiente. En el estado lento los desplazamientos del caminante son de largo 1 (medido en sitios de red) en tanto que en el modo rápido los saltos serán de largo L.

En la sección siguiente damos una descripción más detallada del modelo en consideración. A continuación se recuperan algunos resultados de la teoría CTRW con particular atención al problema en consideración. Se calcula así la probabilidad de supervivencia para el objetivo en presencia de un conjunto de buscadores distribuídos originalmente en la red. En la sección 4 determinamos además los valores para el modelo particular formulado, evaluando la eficiencia de detección en función de la frecuencia de transiciones.

2 Modelo CTRW para estrategia intermitente

Para evaluar la optimización del tiempo de encuentro del objetivo siguiendo una estrategia intermitente en un modelo de tiempo continuo se propone un modelo de CTRW multiestado sobre una red unidimensional. Los sitios de red se identifican por una coordenada entera s (la posición en la red estará dada por $x = as$, con a el parámetro de red).

Suponemos que en un sitio de red arbitrario, identificado como s_1, se encuentra el objetivo de búsqueda. Se supone además una distribución inicial de un conjunto de buscadores sobre la red con una concentración $c_0(s)$, con la única restricción de que inicialmente

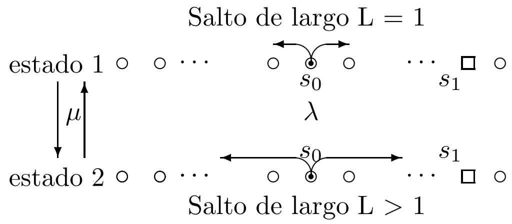

Figura 1: Esquema de transiciones para la estrategia intermitente en el modelo CTRW multiestado. Al cambiar de posición en el estado 1 el caminante da un salto de largo 1 o un salto de largo L si está en el estado 2. La tasa de transiciones entre estados es μ.

ningún buscador ocupe la posición s_1 ($c_0(s_1) = 0$), ya que de lo contrario la detección se habría producido antes de comenzar el proceso.

Cada buscador realiza una caminata aleatoria de tiempo continuo multiestado independiente de la que realizan los demás. Los buscadores desconocen a *priori* la ubicación del objetivo, reflejado en el modelo CTRW por la ausencia de todo sesgo que oriente el desplazamiento. La estrategia de búsqueda que siguen se denomina intermitente y está regida por la siguiente regla: en cada instante de transición el caminante puede efectuar un salto de largo 1 o L sitios de red según sea el estado de desplazamiento en que se encuentre, con una tasa de transiciones λ. El cambio de estado se produce con una tasa de transiciones μ y responde a una estadística independiente de la dinámica de transiciones.

La detección del blanco por parte de alguno de los buscadores se produce en el instante de encuentro: cuando el caminante alcanza la posición s_1. De esta manera el problema planteado resulta equivalente a un problema de atrapamiento o reacción mediado por difusión[7,8] y la distribución de probabilidades para el tiempo de detección por un caminante resulta coincidente con la densidad de probabilidad para el tiempo del primer pasaje por s_1. Este esquema suele denominarse de atrapamiento perfecto, por contraposición al modelo imperfecto en el que los reactivos (buscador y objetivo en nuestro caso) pueden separarse luego de un encuentro fallido sin que la reacción (detección) se produzca[9].

La eficiencia de la estrategia de búsqueda se evalúa a partir del tiempo de detección del blanco por alguno de los buscadores inicialmente presentes en la red. A tal fin se calcula la probabilidad de que el blanco no haya sido detectado al tiempo t y su dependencia con el valor de μ/λ. Esta magnitud corresponde a la probabilidad de supervivencia (SP) en[10]. El cálculo se repite para distintos valores del parámetro L.

3 Algunos resultados de la teoría CTRW

Consideremos una caminante que efectúa una CTRW multiestado sobre una red. En cada estado interno el caminante tiene distintas propiedades difusivas.

Supongamos ahora que en $t = 0$ el caminante llega a la posición s' con estado interno i. Denotamos por $p_i\left(s - s'\right)\lambda e^{-\lambda t}$ a la densidad de probabilidad para el tiempo de transiciones del sitio s' al sitio s, de manera tal que $p_i\left(s - s'\right)\lambda e^{-\lambda t}\,dt$ es la probabilidad de que el caminante en la posición s' haga una transición a s entre t y $t+dt$, supuesto que no ha cambiado de estado interno. A su vez la probabilidad de que el caminante conserve el estado i un tiempo t supuesto que no se ha desplazado en la red es $e^{-\mu t}$, y la probabilidad de que cambie de estado entre t y $t + dt$ supuesto que no cambió de posición es $\mu e^{-\mu t}dt$. Suponemos además que los procesos de cambio de estado y desplazamiento en la red son estadísticamente independientes. Consideramos en primer lugar una caminata multiestado homogénea sobre la red. Podemos modelar la caminata multiestado como una caminata aleatoria en un espacio $\Omega = s \otimes i$: el espacio producto directo de la red y el de estados internos.

Para describir esta caminata definimos la matriz de transiciones con elementos en la diagonal (correspondiente a un desplazamiento en la red con estado i)

$$H_{i,i}^{(0)}\left(s - s';t\right) = p_i\left(s - s'\right)\lambda e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{1}$$

y elementos fuera de la diagonal (correspondiente a un cambio de estado con el caminante en una posición fija)

$$H_{i,j}^{(0)}\left(s - s';t\right) = \mu e^{-(\lambda+\mu)t}\delta_{x,x'} \tag{2}$$

No consideramos transiciones simultáneas en posición y estado por ser de segundo orden en dt.

Notamos que estamos suponiendo una caminata homogénea, expresado por la dependencia sólo del largo del salto en p_i.

Consideramos ahora un caminante que comienza su caminata con una transición a (s_0, i_0) en $t = 0$. Aún cuando esta suposición corresponde a una condición inicial particular, dado que estamos interesados en el comportamiento a tiempos relativamente largos, comparados con el tiempo medio entre cambios de posición, el efecto de la condición inicial asumida no será significativo[9]. Expresamos la probabilidad de que el caminante llegue a la posición (s, i) en el espacio Ω entre t y $t + dt$ por $G_{i,i_0}^{(0)}(s;t|s_0)\,dt$. Esta transición puede darse a través de uno de dos eventos mutuamente excluyentes: por un cambio de estado con el caminante en la posición s o por una transición desde alguna posición s' con el caminante en el estado i. La densidad de probabilidad para el tiempo de arribo a la posición (s, i) debe cumplir con la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} G_{i,i_0}^{(0)}(s;t|s_0) &= \delta_{s,s_0}\delta_{i,i_0}\delta\left(t - 0^-\right) + \\ &+ \sum_{s',j} H_{i,j}^{(0)}\left(s - s';t\right) \star G_{j,i_0}^{(0)}\left(s';t|s_0\right) \end{aligned} \tag{3}$$

donde el símbolo $\star$ representa el producto de convolución : $f(t) \star g(t) = \int_0^t dt\, f\left(t - t'\right) g\left(t'\right)$. El primer término toma en cuenta la primer transición en $t = 0$ al estado inicial en tanto que el segundo considera la transición general desde un estado $\left(s', j\right)$ al estado (s, i).

Tomando transformada de Fourier espacial y transformada de Laplace temporal podemos resolver la ecuación para obtener

$$\hat{G}_{i,i_0}^{(0)}(k;u|s_0) = e^{iks_0}\frac{u+\mu+\lambda}{f_1 f_2 - \mu^2}\begin{bmatrix} f_2 & \mu \\ \mu & f_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

con las definiciones $f_i = u + \mu + \lambda\left[1 - \hat{p}_i(k)\right]$

De aquí en más denotamos la transformada de Fourier espacial y/o Laplace temporal de una función por el símbolo ˆ y la sustitución de argumentos $s \to k$ y $t \to u$. En la solución en la representación de Fourier encontrada en (4) reconocemos que la densidad de probabilidad de arribo será función de la separación entre los sitios: $G_{i,i_0}^{(0)}(s - s_0;t)$

Incluímos ahora una condición de atrapamiento en la posición s_1: la ubicación del blanco. La condición de atrapamiento significa que cuando un caminante llega a la posición s_1 ya no vuelve a la red y termina su trayectoria. De esta forma el tiempo de arribo a la posición s_1 es el tiempo del primer arribo y por lo tanto coincidirá con el tiempo de detección, de acuerdo al modelo formulado en la sección 2.

La condición de atrapamiento se incluye en el modelo igualando a cero los elementos de la matriz de transiciones desde s_1

$$H_{i,j}(s - s_1;t) = 0 \tag{5}$$

estableciendo de esta forma que ninguna trayectoria puede comenzar en s_1. Para los demás sitios de la red mantenemos la matriz definida en (1) y (2).

Para el problema con atrapamiento denotamos la densidad de probabilidad para el tiempo de arribo a (s, i) por $G_{i,i_0}(s;t \mid s_0)$ con un significado similar al del caso homogéneo. Esta densidad debe satisfacer la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} G_{i,i_0}(s;t|s_0) &= \delta_{s,s_0}\delta_{i,i_0}\delta\left(t - 0^-\right) + \\ &+ \sum_{s' \neq s_1, j} H_{i,j}^{(0)}\left(s - s';t\right) \star G_{j,i_0}\left(s';t|s_0\right) \end{aligned} \tag{6}$$

con $s_0 \neq s_1$, dado que hemos supuesto que inicialmente no hay caminantes en la posición del blanco.

Podemos expresar la solución de esta ecuación en términos de la solución del problema homogéneo dada por la antitransformada en Fourier de la expresión (4). A tal fin transformamos en Laplace en la variable temporal la relación de recurrencia (6) y calculamos $\sum_{j,s'}\hat{G}_{i,j}^{(0)}\left(s;u \mid s'\right)\hat{G}_{j,i_0}\left(s';u \mid s_0\right)$. Haciendo uso de la relación de recurrencia (3) obtenemos la ecuación

$$\hat{G}_{i,i_0}\left(s;u\mid s_0\right)=\hat{G}^{(0)}\left(s;u\mid s_0\right)- \\ -\sum_j[\hat{G}^{(0)}_{i,j}\left(s;u\mid s_1\right)-\delta_{s,s_1}\delta_{i,j}]\hat{G}_{j,i_0}\left(s_1;u\mid s_0\right) \tag{7}$$

Evaluando la expresión en $s=s_1$ obtenemos la solución

$$\hat{G}_{i,i_0}\left(s_1;u\mid s_0\right)=\sum_j[\hat{G}^{(0)}\left(s_1;u\mid s_1\right)]^{-1}_{i,j}\hat{G}^{(0)}_{j,i_0}\left(s_1;u\mid s_0\right) \tag{8}$$

válida para $s_0\neq s_1$, como fue supuesto. La densidad encontrada en (8) es la densidad de probabilidad para el tiempo de la primer visita a s_1 en la representación de Laplace. Reconocemos en esta expresión una generalización del resultado de Siegert[11].

4 Probabilidad de supervivencia y tasa de reacción

Suponemos una probabilidad $P_{i_0}\left(s_0\right)$ para la posición y estado inicial del caminante. La densidad de probabilidad para el tiempo de detección del blanco estará dada por la convolución espacial con la densidad condicional calculada en (8) resultando

$$A\left(t\right)=\sum_{i,i_o,s_0}G_{i,i_0}\left(s_1;t\mid s_0\right)P_{i_0}\left(s_0\right) \tag{9}$$

Por lo tanto, siguiendo a Bendler y Shlesinger[10], la probabilidad de que el caminante no haya detectado el objetivo al tiempo t, promediando sobre la posición y estado inicial será

$$\Phi_1\left(t\right)=1-\int_0^t dt^{'}\,A\left(t^{'}\right) \tag{10}$$

Supongamos ahora N caminantes independientes distribuídos inicialmente en la red con una concentración inicial $c_{i_0}\left(s_0\right)=NP_{i_0}\left(s_0\right)$. La probabilidad de que ninguno de ellos haya detectado el blanco al tiempo t será

$$\Phi_N\left(t\right)=\left[1-\int_0^t dt^{'}\sum_{i,i_o,s_0}G_{i,i_0}\left(s_1;t^{'}\mid s_0\right)\frac{c_{i_0}\left(s_0\right)}{N}\right]^N \tag{11}$$

donde hemos sustituído la expresión (9) y usado la relación entre la concentración y la distribución inicial de probabilidad. Tomando el límite $N\to\infty$ obtenemos

$$\Phi\left(t\right)=\exp\left[-\int_0^t dt^{'}\sum_{i,i_o,s_0}G_{i,i_0}\left(s_1;t^{'}\mid s_0\right)c_{i_0}\left(s_0\right)\right] \tag{12}$$

$\Phi\left(t\right)$ es la probabilidad de supervivencia y puede interpretarse como la fracción de buscadores que no han detectado el blanco al tiempo t: $N\left(t\right)=N\Phi\left(t\right)$. El integrando en el exponente corresponde a su vez a la tasa de reacción del sistema y puede interpretarse como la fracción de buscadores del total remanente al tiempo t que detectan el objetivo entre t y $t+dt$

$$K\left(t\right)=\frac{1}{\Phi\left(t\right)}\frac{d\Phi\left(t\right)}{dt} \tag{13}$$

Suponemos de aquí en más que la concentración inicial de caminantes es la de equilibrio para la caminata *i.e.* una concentración uniforme (salvo por la ausencia de caminantes en s_1 en $t=0$) ya que hemos supuesto una caminata homogénea y dado que los caminantes se desplazan independientemente unos de otros. También suponemos que la probabilidad para el estado inicial corresponde al estado de equilibrio del proceso dicotómico. Dado que estamos suponiendo que la tasa de transición es la misma para ambos estados ésta será $1/2$ en cada estado. Por lo tanto

$$c_{i_0}\left(s\right)=c_0\frac{1}{2}[\delta_{i_0,1}+\delta_{i_0,2}] \tag{14}$$

Para el problema en consideración, pasando a la representación de Laplace, sustituyendo el resultado (8) en el exponente de (12) y usando que la solución para el problema homogéneo es función de la separación s_1-s_0 obtenemos

$$\hat{K}\left(u\right)=c_0\left[\frac{1}{2}\sum_{i,l,i_0}[\hat{G}^{(0)}\left(s_1;u\mid s_1\right)]^{-1}_{i,l}\times \right. \\ \left. \times\hat{G}^{(0)}_{l,i_0}\left(k=0;u\mid s_0\right)-1\right] \tag{15}$$

Sólo queda por determinar en esta expresión la matriz $\hat{G}\left(0;u\right)$ que podemos expresar formalmente

$$\hat{G}\left(0;u\right)=\left(u+\mu+\lambda\right)\begin{bmatrix} g_L\left(u\right) & g_0\left(u\right) \\ g_0\left(u\right) & g_1\left(u\right)\end{bmatrix} \tag{16}$$

con las definiciones

$$\begin{aligned} g_0\left(u\right)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mu}{D\left(k\right)}dk \\ g_1\left(u\right)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_1}{D\left(k\right)}dk \\ g_L\left(u\right)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_2}{D\left(k\right)}dk \\ D\left(k\right)&=f_1f_2-\mu^2 \end{aligned} \tag{17}$$

y las funciones f_i son las definidas en (4).

En términos de estas funciones la tasa de reacción queda expresada por

$$K\left(u\right)=\frac{c_0}{u}\left[\frac{g_1\left(u\right)+g_L\left(u\right)-2g_0\left(u\right)}{g_1\left(u\right)g_L\left(u\right)-g_0^2\left(u\right)}-1\right] \tag{18}$$

Quedan por determinar los elementos de la matriz en (16) definidos en (17). Para ello es necesario dar el modelo particular de desplazamiento en cada estado. Consideramos un modelo particular para el modelo intermitente.

4.1 Modelo intermitente separable

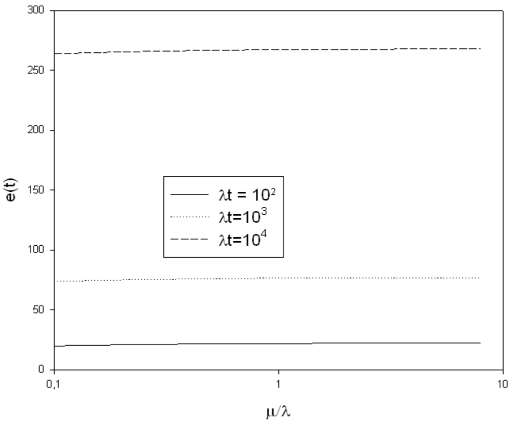

Figura 2: Dependencia del exponente en la probabilidad de supervivencia en función del cociente μ/λ (cociente entre tasa de cambios de estado y tasa de saltos en la red) para distintos valores de t en unidades del tiempo medio entre saltos.

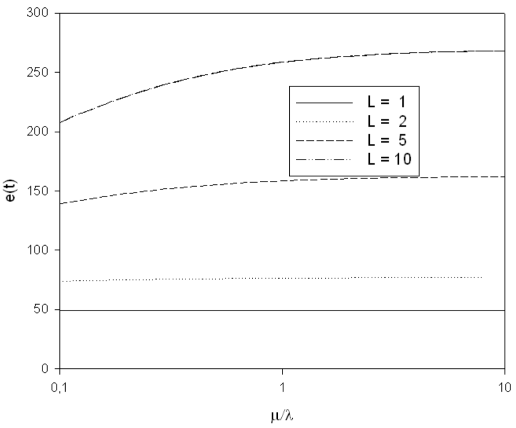

Figura 3: Dependencia del exponente en la probabilidad de supervivencia en función de μ/λ (cociente entre tasa de cambios de estado y tasa de saltos en la red) para distintos valores del largo de salto en el modo L (modo de desplazamiento rápido).

Consideramos aquí los resultados particulares para el modelo intermitente. Proponemos la probabilidad para el largo de salto

$$p_i\left(s - s'\right) = \frac{1}{2}[\delta_{s,s'-L_i} + \delta_{s,s'+L_i}] \qquad (19)$$

con $L_i = 1$ para $i = 1$ y L_i arbitrario para $i = L$. Para esta elección $p_i(k) = \cos(kL_i)$. Sustituyendo esta expresión en las funciones f_i definidas en (4) y las mismas a su vez en la definición de los elementos de matriz en (16) obtenemos finalmente la expresión para la transformada de Laplace de la tasa de reacción. El cálculo de las integrales se efectúa numéricamente. Finalmente los valores obtenidos para los elementos de matriz se substituyen en (18) y se antitransforma en Laplace para obtener el exponente en la probabilidad de supervivencia.

La inversión en Fourier se efectuó mediante integración numérica de Simpson y la inversión en Laplace mediante el algoritmo LAPIN. Los resultados obtenidos se ilustran en las figuras, como función del cociente μ/λ: el cociente entre la tasa de transición entre estados y la tasa de saltos.

5 Conclusiones

Se ha propuesto un modelo dinámico de búsqueda con estrategia intermitente para tiempo continuo. Las partículas efectúan saltos de largo 1 o L sitios de red según sea su estado interno.

Usando el esquema de reacciones mediadas por difusión se ha calculado el exponente en la probabilidad de no detección (probabilidad de supervivencia) al tiempo t en función del cociente μ/λ, ilustrada en la figura.

Encontramos que para distintos tiempos, con $L = 2$, la probabilidad de supervivencia decae sin una dependencia marcada del cociente. Por el contrario la dependencia con el cociente se hace más notoria cuando el largo de saltos aumenta.

Agradecimientos: al Dr. Domingo P. Prato por sus esclarecedores comentarios y a SeCyT-UNC por la financiación a este proyecto.

Referencias

[1] Stephens P. W. y Krebs J. R., "Foraging Theory", Princeton University Press (1986).

[2] Klafter J, Shlesinger M. y Zumofen G., Phys. Today **49**, 33 (1996).

[3] Viswanathan G. M. *et al.*, Nature **401**, 911 (1999).

[4] Bartumeus F. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 109902 (2002).

[5] Benichou O. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94**, 98101 (2005).

[6] Oshanin G. *et al.*, cond. mat. v1 0609641 (2006).

[7] Hänggi P. *et al.*, Rev. of Mod. Phys. **62**, 251 (1990).

[8] Weiss G. H., "Aspects and applications of the random walk", North Holland Press, Amsterdam (994).

[9] Ré M. y Budde C., Phys. Rev. E **61**, 1110 (2000).

[10] Bendler J. T. y Shlesinger M. F., in "The wonderful world of stochastics", Eds. M. F. Shlesinger y G. H. Weiss, Elsevier Science Publishers, B. V. (1985).

[11] Siegert A. J. F., Phys. Rev. **81**, 617 (1951).