

EL SOLENOIDE... ¿ES INFINITO?

IS THE SOLENOID INFINITELY LONG?

**María Luz Franqueiro^{1,2}, Gastón Manestar¹, Eduardo Poggio¹, Gabriel Raffa¹, Mariana Mesaros¹,
Liliana I. Perez^{1,2,3}, Guillermo Santiago^{1,4}**

¹Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, UBA- ²Grupo de Óptica y Visión, Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, UBA- ³CONICET- ⁴Laboratorio Láser, Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, UBA
mmesaro@fi.uba.ar

Habitualmente, en los cursos de Electricidad y Magnetismo, el cálculo del campo magnético generado por una bobina de sección circular es abordado usando muchas pero no especificadas aproximaciones, tanto desde la Ley de Biot y Savart como desde la Ley de Ampère (considerando materiales lineales). En el primer caso se considera un modelo de solenoide finito o infinito como superposición de “muchas” espiras y se usa el resultado del campo generado en el eje para una espira circular por la que circula corriente. De este modelo se obtiene un resultado para la determinación del campo magnético en el eje del solenoide que se supone también válido para todo punto dentro del mismo despreciando efectos de borde. En el segundo, se supone que el solenoide es infinito o que se desprecian efectos de borde y se acepta como “acto de fe” que el campo fuera del solenoide puede considerarse nulo.

En este trabajo, realizado entre docentes y alumnos ya formados, proponemos una manera poco usual de abordar la enseñanza del problema en las clases de Física II de la Facultad de Ingeniería de la UBA y comparar los resultados analíticos con resultados numéricos obtenidos a partir de programas comerciales. También se muestran distintos métodos de resolución, dejando en claro las suposiciones que se hacen para usar cada modelo, y se propone un análisis de las ventajas y desventajas de la enseñanza de cada uno desde el punto de vista didáctico.

Palabras claves: Ley de Biot y Savart, Ley de Ampère, Campo Magnético, Solenoide

In elementary Electricity and Magnetism courses the magnetic field of a solenoid is computed using either the Biot & Savart's Law or the Ampère's Law (considering linear materials), assuming many -but not clearly specified- approximations. In the first case, a finite or infinite solenoid is modeled through the superposition of “a lot” of loops, and the generated magnetic field is computed on the axis using the expression for a single coil. Then the obtained result is assumed valid for every point inside the solenoid, not taking into account edge effects. In the second case, it is supposed that the solenoid is infinite or that edge effects can be neglected, and it is accepted that the magnetic field outside the solenoid vanishes.

In this paper, made by professors and formed students, we propose an unusual way to approach the teaching of the problem that can be used in the Physics II courses at the Engineering School of Buenos Aires University. We compare the analytical expressions with numerical results obtained using commercial software. The different resolution strategies are analyzed, clarifying the assumptions made for each model. Also, the advantages and disadvantages of each of them from a didactic point of view are presented.

Key Words. Biot and Savart's Law, Ampère's Law, Magnetic Field, Solenoid

I. INTRODUCCIÓN

Las dificultades en la enseñanza de Electricidad y Magnetismo en cursos básicos de las Facultades de Ingeniería dependen de muchos factores como, por ejemplo, la cantidad de alumnos en algunas Facultades, la relación alumnos/docente, la disponibilidad de equipamiento y personal técnico adecuado y acorde a la cantidad de alumnos para realizar experiencias de Laboratorio, los escasos o nulos conocimientos de los alumnos sobre estos temas, los frágiles conocimientos previos de matemática elemental (aunque generalmente bastante buenos de Análisis Matemático) y las correlatividades exigidas. Sin embargo, la dificultad más apremiante y difícil de sobrellevar es el poco tiempo disponible para el dictado de la materia. En nuestra Facultad, el tiempo asignado a Electricidad y Magnetismo (desde la Ley de Coulomb a las Ecuaciones de Maxwell y

la Ecuación de Ondas) es de 96 horas reloj en 12 semanas e incluyen los trabajos prácticos de Laboratorio. Es por ello que algunos docentes de la materia nos propusimos “hacer las clases teóricas más prácticas” para lo que nos es imprescindible disponer de apuntes detallados de determinados temas. Por otra parte, el extenso temario nos puede llevar, inevitablemente a enseñar problemas típicos (los “de libro”) sin analizar la necesidad de modelos menos o más simples y la validez de las aproximaciones realizadas en cada uno de ellos para distintas aplicaciones tecnológicas. Son más que conocidas las simples sentencias “despreciable”, “muy chico”, “muy largo”, “infinito”, etc. sin hacer ninguna referencia al patrón de comparación. Algunas afirmaciones más completas son “mucho más largo que ancho” o “a distancias mucho mayores que los tamaños característicos” sin especificar en cuánto cambia el resultado al aplicar un modelo más complejo o menos

complejo. Uno de los objetivos de este trabajo es exponer cuali-cuantitativamente las diferencias entre los resultados obtenidos en la determinación del campo magnético generado por un solenoide en vacío al usar distintos modelos.

Es decir, la realización de este trabajo tuvo en principio un doble propósito. El primero de ellos fue introducir a alumnos avanzados de las Carreras de Ingeniería de la UBA (Ayudantes- alumnos y Colaboradores de la materia Física II) en la profundización de un tema aparentemente muy estudiado y cerrado, habituarse a hacer análisis críticos sobre los que aparece en la Bibliografía y familiarizarse con la búsqueda bibliográfica comparativa. El segundo fue disponer de un sistema que permitiera enseñar las limitaciones de los modelos de solenoide a los estudiantes de la materia sin caer en los lugares comunes o mitos, tales como “mucho menor significa la décima parte”.

Comenzamos determinando el campo magnético generado en todo el espacio por una distribución estrictamente infinita superficial cilíndrica de corriente (aunque esto sea una idealización) sin el uso del potencial vector¹⁻⁴, tema que no corresponde a un curso básico (y que solamente lo estudiarán los alumnos que cursen más adelante Electromagnetismo). Este modelo de solenoide es luego considerado como límite de una distribución finita superficial cilíndrica de corriente y se analizan las influencias de las relaciones no solamente entre el largo y el radio, sino también entre estas cantidades constructivas y el punto de observación. Por último, se analizan las formas típicas de resolución (a través de la Ley de Biot y Savart y de la Ley de Ampere) analizando en detalle las restricciones y suposiciones de las mismas. También se proponen estrategias para superar algunas imprecisiones que aparecen en la Bibliografía.

II. CÁLCULO DEL CAMPO MAGNÉTICO

II.1 Campo generado en todo el espacio por un solenoide modelizado como una distribución superficial de corriente.

A continuación proponemos un método para el cálculo del campo magnético generado por un solenoide que no es habitualmente usado en un curso de Electricidad y Magnetismo. Nos referiremos al mismo, como “Método 1” y modelaremos dicha configuración mediante un cilindro de longitud $2L$, radio R y espesor despreciable por el que circulará una distribución uniforme de corriente eléctrica en la dirección azimutal \vec{K} (Fig.1).

Analizaremos tanto el caso de un solenoide de longitud infinita como el de uno de longitud finita y hallaremos expresiones analíticas para los campos creados por estas configuraciones en todo punto del espacio. Con este modelo, aplicado a un solenoide de longitud infinita, las expresiones de las componentes del campo magnético pueden ser resueltas analíticamente sin mucha dificultad, ya sea a través de programas comerciales de integración analítica (Maple, Mathematica, Mathcad, etc.) o a través de tablas poco

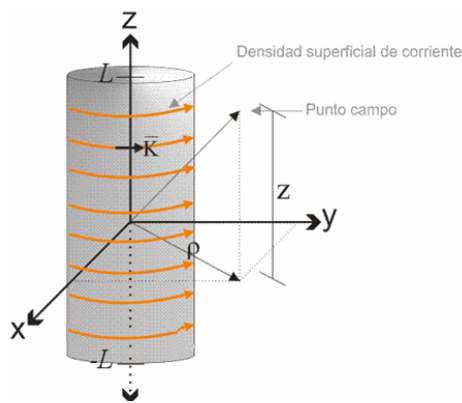


Figura.1: Cilindro de espesor despreciable (superficie cilíndrica) por el que circula corriente eléctrica en la dirección azimutal.

conocidas en el ambiente estudiantil⁵. La única dificultad corresponde a la comprensión de la extensión de la Ley de Biot y Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1)$$

cuando se debe relacionar a la corriente I con la corriente superficial \vec{K} utilizada en este modelo. Sin embargo, de la Fig. 2 resulta sencillo deducir que $\delta I = K \delta\xi$ ^{6,7}, mientras que el elemento de longitud $d\vec{l}'$ en el solenoide se corresponde con $\delta l \varphi$. En consecuencia³

$$I d\vec{l}' = \vec{K} dS' \quad (2)$$

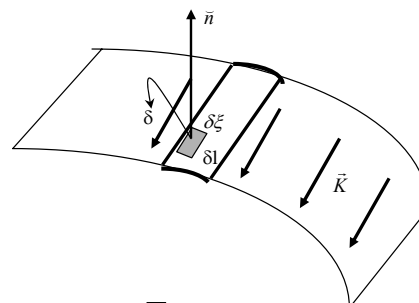


Figura 2. El vector \vec{K} representa la corriente eléctrica que circula por unidad de longitud perpendicular al eje del cilindro.

La expresión de Biot y Savart aplicada a este modelo de corriente superficial resulta

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K} \times (\vec{r} - \vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3)$$

Como calcularemos el campo magnético para cualquier punto del espacio tenemos que el punto campo será $\vec{r} = \rho \cos \varphi \hat{x} + \rho \sin \varphi \hat{y} + z\hat{z}$, mientras que el punto fuente resultará $\vec{r}' = R \cos \varphi' \hat{x} + R \sin \varphi' \hat{y} + z'\hat{z}$. A partir de las ecuaciones anteriores obtenemos las componentes del campo magnético en todo punto del espacio:

$$B_x = \frac{\mu_0 k R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L}^L \frac{(z - z') \cos \varphi' dz'}{[\rho^2 + R^2 + (z - z')^2 - 2\rho R (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')]^{3/2}} \quad (4)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 k R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L}^L \frac{(z-z') \sin \varphi' dz'}{[\rho^2 + R^2 + (z-z')^2 - 2\rho R(\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')]^{3/2}} \quad (5)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 k R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L}^L \frac{(-\rho \cos \varphi \cos \varphi' - \rho \sin \varphi \sin \varphi' + R) dz'}{[\rho^2 + R^2 + (z-z')^2 - 2\rho R(\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')]^{3/2}} \quad (6)$$

Como por la simetría de revolución del problema las componentes x e y deben tener las mismas soluciones, resolveremos estas integrales para el plano xz

$$B_x = \frac{\mu_0 k R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L}^L \frac{(z-z') \cos \varphi' dz'}{[\rho^2 + R^2 + (z-z')^2 - 2\rho R \cos \varphi']^{3/2}} \quad (7)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 k R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L}^L \frac{(-\rho \cos \varphi' + R) dz'}{[\rho^2 + R^2 + (z-z')^2 - 2\rho R \cos \varphi']^{3/2}} \quad (8)$$

La adimensionalización de estas ecuaciones $\rho = \alpha R$, $z = \beta L$ y $z' = \delta L$ permite encontrar expresiones complejas de las componentes de los campos pero que son menos dificultosas en el momento de interpretar los resultados. De esta manera

$$B_x = \frac{\mu_0 K R}{4\pi L} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\cos \varphi'}{\left[\left((1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi') \left(\frac{R}{L} \right)^2 + (1 - \beta)^2 \right)^{1/2} \right]} \quad (9)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 K R}{4\pi L} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{(1 - \beta)(1 - \alpha \cos \varphi')}{\left[\left((1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi') \left(\frac{R}{L} \right)^2 + (1 - \beta)^2 \right)^{1/2} \right]} \quad (10)$$

Estas integrales se pueden resolver a partir de programas comerciales o por tabla. El primer recurso resulta especialmente útil porque los alumnos pueden directamente evaluar los campos en distintos puntos del

espacio. El segundo requiere de un manejo de tablas clásicas de uso poco habitual entre los estudiantes de las carreras de Ciencias. En el caso particular del presente trabajo, realizado con alumnos avanzados, se recurrió al uso de varios de los programas comerciales disponibles. Sin embargo, la resolución para algunos casos particulares requirió del uso de Ref. 1.

Solenoides infinito

De la simple observación del integrando de la ec.(9), se deduce que las componentes x e y del campo magnético son nulas. La componente z resulta

$$B_z = \frac{K \mu_0 \left(-\rho + R + \rho \sqrt{\frac{(-\rho + R)^2}{(\rho + R)^2}} + R \sqrt{\frac{(-\rho + R)^2}{(\rho + R)^2}} \right)}{2 \sqrt{\frac{(-\rho + R)^2}{(\rho + R)^2}} (\rho + R)} \quad (11)$$

que puede reescribirse en forma más sencilla como

$$B_z = \frac{\mu_0 K}{2} \left(\frac{-\rho + R}{|-\rho + R|} + 1 \right) \quad (12)$$

De esta manera se obtiene el conocido resultado (no completamente justificado en los libros de texto como veremos más adelante)

$$B_z = \begin{cases} \mu_0 K & \rho < R \\ 0 & \rho > R \end{cases} \quad (13)$$

$$B_x = B_y = 0 \quad \text{para todo } \rho \quad (14)$$

En la Fig. 3 se representa el campo magnético normalizado para todo valor de z en función de la coordenada radial también normalizada para el caso en que el solenoide es infinito.

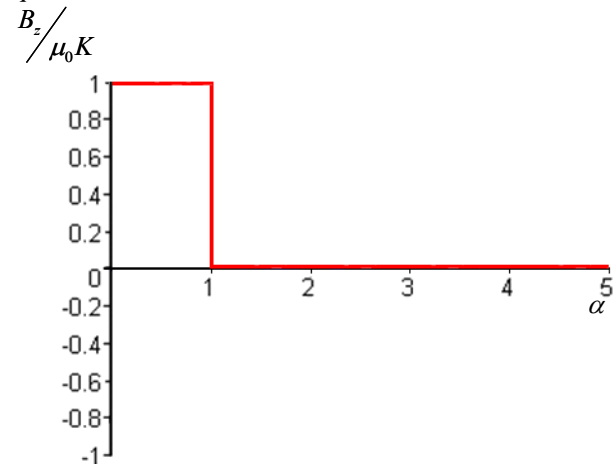


Figura 3: Componente z del campo magnético normalizado para un solenoide matemáticamente infinito en función de la distancia al centro del mismo (normalizada con el radio)

Solenoides finito

La resolución de las ecs. (9) y (10) resulta muy complicada y no corresponde al nivel de los alumnos de la materia. Sin embargo, resultó muy adecuada su evaluación numérica para poder hacer un análisis acerca de qué significa que un solenoide pueda considerarse infinito. Mediante uno de los programas comerciales

disponibles se obtuvo que las componentes del campo magnético en función de los parámetros y los factores de adimensionalización son

$$B_z(\alpha, \beta) = \mu_0 K \frac{1}{4\pi} (f(\alpha, \beta) + g(\alpha, \beta)) \quad (15)$$

$$B_\rho(\alpha, \beta) = \mu_0 K \frac{1}{4\pi} (m(\alpha, \beta) - p(\alpha, \beta)) \quad (16)$$

$$f(\alpha, \beta) = 2 \frac{(1-\beta)}{(1+\alpha)} \sqrt{\frac{1}{(1-\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}} \cdot \left\{ (1+\alpha) \text{EllipticK} \left[2 \sqrt{\frac{\alpha\theta^2}{(1-\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}} \right] + (1-\alpha) \text{EllipticPi} \left[4 \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}, \sqrt{\frac{\alpha\theta^2}{(1-\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}} \right] \right\} \quad (17)$$

$$g(\alpha, \beta) = 2 \frac{(1+\beta)}{(1+\alpha)} \sqrt{\frac{1}{(1+\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}} \cdot \left\{ (1+\alpha) \text{EllipticK} \left[2 \sqrt{\frac{\alpha\theta^2}{(1+\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}} \right] + (1-\alpha) \text{EllipticPi} \left[4 \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}, \sqrt{\frac{\alpha\theta^2}{(1+\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}} \right] \right\} \quad (18)$$

$$m(\alpha, \beta) = 2 \frac{\sqrt{(1-\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}}{\alpha\theta} \cdot \left\{ 2 \left(\sqrt{\frac{\alpha\theta^2}{(1-\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}} - \frac{\alpha\theta^2}{(1-\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2} \right) \cdot \text{EllipticK} \left[2 \sqrt{\frac{\alpha\theta^2}{(1-\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}} \right] - \text{EllipticE} \left[2 \sqrt{\frac{\alpha\theta^2}{(1-\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}} \right] \right\} \quad (19)$$

$$p(\alpha, \beta) = 2 \frac{\sqrt{(1+\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}}{\alpha\theta} \cdot \left\{ 2 \left(\sqrt{\frac{\alpha\theta^2}{(1+\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}} - \frac{\alpha\theta^2}{(1+\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2} \right) \cdot \text{EllipticK} \left[2 \sqrt{\frac{\alpha\theta^2}{(1+\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}} \right] - \text{EllipticE} \left[2 \sqrt{\frac{\alpha\theta^2}{(1+\beta)^2 + \theta^2(1+\alpha)^2}} \right] \right\} \quad (20)$$

donde *EllipticK* y *EllipticPi* son las funciones elípticas de segunda y tercera especie, respectivamente. Al calcular los valores de las componentes del campo magnético para distintas posiciones respecto del centro del solenoide, se encuentran los apartamientos de los valores de las componentes respecto a los valores que corresponden a un solenoide estrictamente infinito. En la Fig.4 se muestran los resultados obtenidos para dos solenoides. Uno es denominado “corto” y el otro “largo”. Es muy interesante observar que en el plano $z=0$ el campo en el solenoide “corto” depende notablemente de la distancia al origen y su valor difiere hasta en un 30% del valor correspondiente al del solenoide “largo”, que a nuestros objetivos resultaría “infinito” (aunque este “infinito” corresponda a una relación largo/radio de 10). También se observa que el campo es menor en el centro que en zonas cercanas al borde lateral del solenoide y que existe campo fuera del solenoide (de una magnitud apreciable). A medida que el punto de observación se aleja del plano $z=0$, ambas componentes del campo comienzan a ser más notorias. Como puede observarse en la Fig.4 d) el valor del campo fuera del solenoide es de alrededor de un 40% del valor en el eje para $z = L/2$ en el solenoide “corto”, mientras que para el “largo” es del orden del 5%. Cuando el punto de observación corresponde a $z = L$ (Fig.4 e) y f)), no se observan diferencias significativas entre ambos solenoides. Ya fuera del solenoide, el campo generado por el solenoide comienza a ser menos significativo. En la Fig. 4g) y h) se grafican las componentes del campo para ambos solenoides cuando $z=1,5L$.

También es posible determinar sin extrema dificultad (aunque solamente lo recomendamos para alumnos avanzados) el valor de las componentes en el eje de la espira. Para ello, reemplazando en las ecs. (15)-(20) el parámetro $\alpha = 0$, se obtiene que

$$B_\rho = 0 \quad (21)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 K}{2} \left[\frac{1+\beta}{\sqrt{(1+\beta)^2 + \theta^2}} - \frac{1-\beta}{\sqrt{(1-\beta)^2 + \theta^2}} \right] \quad (22)$$

expresiones que serán comparadas con las que se obtienen por otros métodos.

II.2 Superposición de espiras

A continuación se describe el cálculo del campo magnético generado por un solenoide de longitud $2L$ y radio R por el que circula una corriente eléctrica de intensidad I . Este método es el que utilizan algunos libros de Electricidad y Magnetismo y permite calcular el campo sólo en puntos pertenecientes al eje del solenoide⁸⁻¹¹. El sistema de referencia escogido para la resolución del problema se esquematiza en la Figura 5.

Este análisis está basado en el campo magnético creado por una espira circular de radio R ubicada en el plano $z = z'$ y por la que circula una corriente lineal I . Es conocido cómo calcular el campo magnético en cualquier punto del espacio \vec{r} considerando que

$$d\vec{l}' = R d\phi' \hat{\phi}' \quad (23)$$

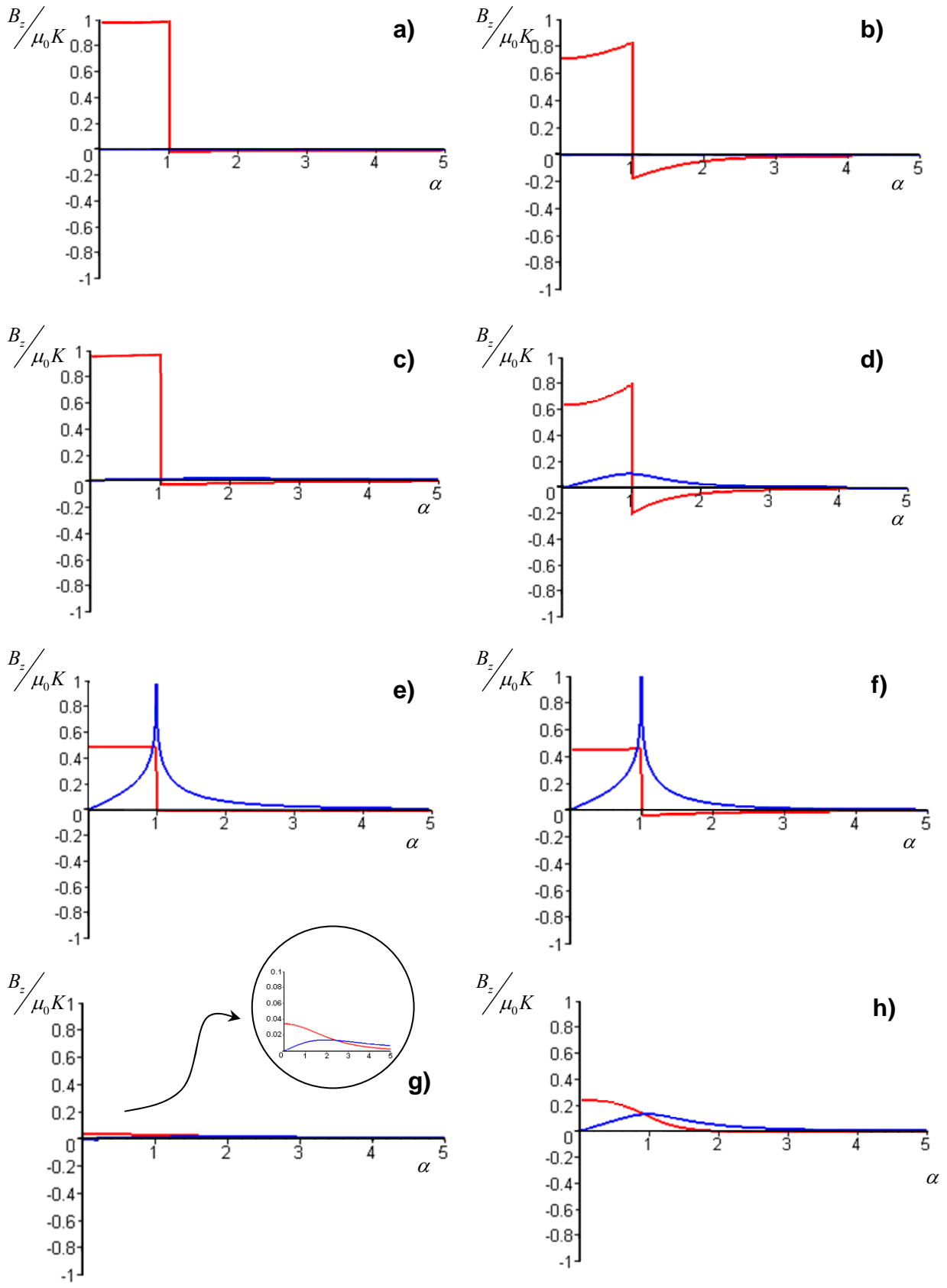


Figura 4: Componentes ρ (en azul) y z (en rojo) del campo generado por 2 distribuciones superficiales de corriente K en e_ρ para un solenoide "largo" con $2L=10R$ (columna izquierda) y un solenoide "corto" con $2L=2R$ (columna derecha). Los gráficos a) y b) corresponden a $z=0$, c) y d) a $z=L/2$, e) y f) a $z=L$ y g) y h) a $z=3/2 L$.

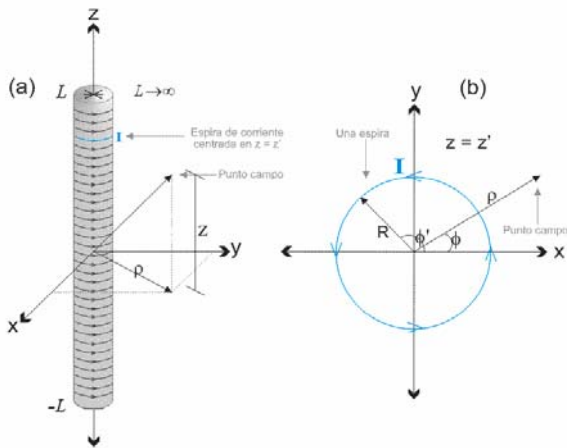


Figura 5: (a) Solenoide infinito por el que circula una corriente I . El eje del mismo coincide con el eje z del sistema cartesiano. Se indica también la posición de un punto genérico del espacio ubicado en $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} = [\rho \cos \phi, \rho \cos \phi, z]$ (b) Vista transversal de una espira de corriente cualquiera centrada en el punto $z = z' \hat{z}$.

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R(z-z') \cos \phi' d\phi'}{[\rho^2 + R^2 + (z-z')^2 - 2R\rho \cos(\phi'-\phi)]^{3/2}} \quad (24)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R(z-z') \sin \phi' d\phi'}{[\rho^2 + R^2 + (z-z')^2 - 2R\rho \cos(\phi'-\phi)]^{3/2}} \quad (25)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[R^2 - R\rho \cos(\phi'-\phi)] d\phi'}{[\rho^2 + R^2 + (z-z')^2 - 2R\rho \cos(\phi'-\phi)]^{3/2}} \quad (26)$$

Como estas expresiones tienen la misma complejidad matemática que la de un solenoide con corriente superficial, en los cursos se analiza cómo es el campo para el eje de la espira ($\rho=0$).

De esta forma vemos que las integrales (24) y (25) se anulan debido a que se integran funciones armónicas en un período completo. Finalmente, sólo “sobrevive” la componente B_z del campo. Cuando $\rho=0$ se obtiene:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\phi'}{[R^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2 2\pi}{[R^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \quad (27)$$

Por lo tanto, el campo magnético sobre todo punto del eje de la espira resulta:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \hat{z} \quad (28)$$

En la aplicación de este método de resolución se hacen varias suposiciones que no siempre quedan claras a la hora de su enseñanza. Las más significativas son:

- Todas las espiras que conforman el solenoide son paralelas, es decir, están contenidas en planos perpendiculares al eje del solenoide.
- Las distancias existentes entre cada par de espiras son de “dimensiones despreciables comparadas con el radio del solenoide”.
- Las espiras se distribuyen uniformemente a lo largo del eje del solenoide. De esta forma, el número de espiras por unidad de longitud se considera constante.

Sin embargo, todos los libros consultados (a excepción de algunos como la Ref.8) hablan del campo generado por un solenoide en el eje pero terminan calculándolo en el punto $(0,0,0)$. Otros hablan, erróneamente, de un diferencial de corriente que circula por un diferencial de espira en la dirección z , es decir, consideran que si el solenoide tiene n espiras por unidad de longitud, un elemento del mismo de longitud dz y “...es equivalente a una simple espira que transporta una corriente $di = nI dz$ ”⁹, donde I es la corriente que circula por cada espira de dicho elemento.

Proponemos aquí una forma que consideramos muy clara de sumar las contribuciones de cada una de las espiras sobre cualquier posición sobre el eje del solenoide

El solenoide (Fig. 5) puede dividirse en pequeñas “rodajas” de espesor $\Delta z'$ (Fig.6). Cada una de éstas contendrá $n\Delta z'$ espiras, siendo n el número de espiras por unidad de longitud.

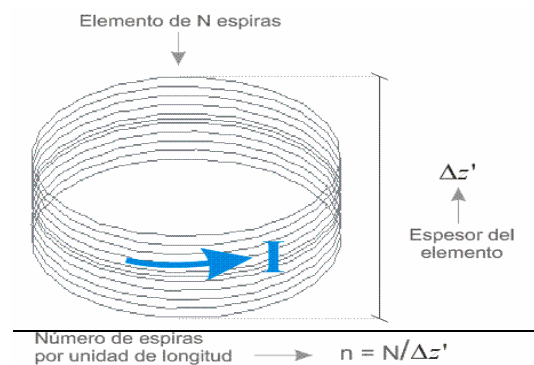


Figura 6: Rodaja de espesor $\Delta z'$ con un número de espiras igual a $N = n\Delta z'$.

Consideramos el intervalo $[-L, L]$ del eje z y tomamos la partición regular del mismo $\{-L = z_0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < \dots < z_N = L\}$. Centramos en cada punto de la partición (excepto en los puntos inicial y final) un pequeño elemento de espiras, como el mostrado en la Fig. 7, de forma tal que el espesor de un elemento cualquiera ubicado en z_i esté contenido en el segmento (z_{i-1}, z_{i+1}) , es decir, $\Delta z_i < |z_{i+1} - z_{i-1}|$ con $i \in [0, N]$. El número total de espiras contenido en cada elemento corresponderá a $N_i = n\Delta z_i$.

Para calcular el campo magnético en todo punto del eje del solenoide, realizaremos la siguiente aproximación: El campo magnético en un punto $\vec{r} = z\hat{z}$ creado por cada

espira perteneciente a un elemento cualquiera de espesor Δz_i es aproximadamente igual.

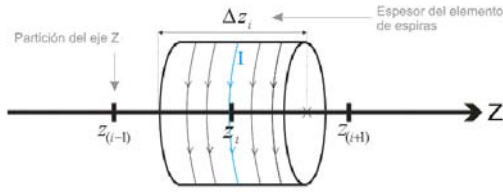


Figura 7: Elemento de espiras de espesor Δz_i centrado en un punto z_i de la partición. El espesor Δz_i está contenido en el intervalo (z_{i-1}, z_{i+1}) .

Por lo tanto, en virtud de la ecuación (28) y de la aproximación mencionada, vemos que cada elemento de espiras ubicado en el punto $\vec{r} = z_i \hat{z}$ producirá, sobre puntos del eje del solenoide, una contribución al campo magnético total dada por:

$$d\vec{B}_i = \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} n \Delta z_i \hat{z} \quad (29)$$

En consecuencia, al superponer los efectos de todos los elementos de espiras se deduce que el campo magnético total resulta aproximadamente:

$$\vec{B}_{(\vec{r}=z\hat{z})} \approx \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} n \Delta z_i \hat{z} \quad (30)$$

Al refinar la partición, la aproximación es cada vez mejor y en el límite, cuando la partición tiende a un número infinito de puntos, resulta exacta. En dicho límite los espesores Δz_i de cada elemento de espiras se transforman en longitudes infinitesimales ($\Delta z_i \rightarrow dz'$) y los puntos z_i donde se centran dichos elementos toman cualquier valor posible del eje z ($z_i \rightarrow z'$).

Por lo tanto, el campo magnético creado por un solenoide (en principio, de longitud $2L$) en todo punto de su eje resulta:

$$\vec{B}(\vec{r} = z\hat{z}) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} n \Delta z_i \hat{z} \quad (31)$$

$$\vec{B}(\vec{r} = z\hat{z}) = \frac{\mu_0 I R^2 n}{2} \int_{-L}^L \frac{dz' \hat{z}}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (32)$$

$$\vec{B}_{(\vec{r}=z\hat{z})} = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{z+L}{\sqrt{(z+L)^2 + R^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2 + R^2}} \right] \hat{z} \quad (33)$$

Si la longitud del solenoide es infinita obtenemos la expresión para el campo magnético generado por un solenoide de longitud infinita y radio R por el que circula una corriente I :

$$\vec{B}(\vec{r} = z\hat{z}) = \mu_0 n I \hat{z} \quad (34)$$

Es muy fácil comprobar la coincidencia entre las ecs. (33) y (34) y las ecs. (13) y (22), respectivamente, si se

hace la correcta relación entre la corriente superficial K y la corriente lineal I correspondiente a N espiras distribuidas en una altura d :

$$NI(2\pi R)\hat{\phi} = K(2\pi R d)\hat{\phi} \Rightarrow K = \frac{N}{d}I = nI \quad (35)$$

II.3 Ley de Ampère

Como es ampliamente conocido, esta ley permite calcular el campo magnético creado por un solenoide de longitud infinita en todo punto del espacio^{1,8,9,12-16}. Para ello se realizan las siguientes suposiciones.

(i) En todo punto interior a un solenoide infinito, el campo magnético es paralelo al eje del mismo. Esto puede ser demostrado en forma cuali-cuantitativa (a nivel de los alumnos de grado) (Apéndice 1).

(ii) En todo punto exterior a un solenoide infinito, el campo magnético es nulo. Su demostración no resulta sencilla a través de la Ley de Biot y Savart¹⁸ por lo que consideramos que el "Método 1" es el más adecuado.

La ley de Ampère establece que la integral de línea del campo magnético a lo largo de un lazo cerrado es igual a una constante multiplicada por la corriente eléctrica que atraviesa la región encerrada por dicho lazo

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds = \mu_0 I_s \quad (36)$$

Para utilizar la ley de Ampère en nuestro problema, observemos la Fig.8.

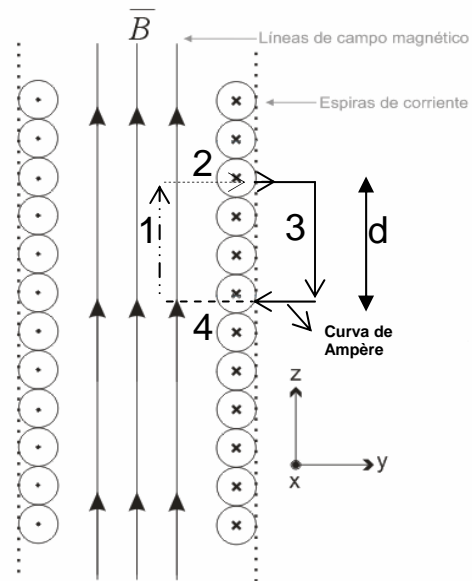


Figura 8: Corte en el plano yz del solenoide infinito. Se observa que las líneas de campo magnético resultan paralelas al eje del solenoide.

En dicha figura se muestra una curva de Ampère dividida en cuatro segmentos. La circulación del campo magnético a través de la curva puede calcularse sumando las integrales de línea a lo largo de cada uno de los cuatro segmentos:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (37)$$

La integral de línea sobre el segmento 2 y 4 son nulas debido a la suposición (i). La integral sobre 3 es nula debido a la superposición (ii)¹⁷.

Por otra parte, el campo magnético vale lo mismo en todo punto del segmento 4. Esto se debe a una simetría de traslación a lo largo del eje del solenoide. Es decir, supongamos que calculamos el campo magnético en el punto $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z_1\hat{z}$ interior al solenoide y luego, lo calculamos en el punto $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z_2\hat{z}$ (también interior al mismo). Como el solenoide es infinito, no existe ninguna razón física para suponer que el campo magnético en ambos puntos deba ser diferente.

Teniendo en cuenta esto último, además de la suposición (i), si llamamos B_0 a la magnitud del campo magnético en todo punto del segmento 4, vemos que:

$$\int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_4 B_0 dl = B_0 \int_4 dl \quad (38)$$

Como se indica en la Fig.8, el segmento 4 recorre una distancia d dentro del solenoide y además, la corriente eléctrica total que atraviesa la superficie concatenada por dicho segmento corresponderá al número de espiras encerradas por la curva, multiplicado por la corriente que transporta cada espira. Por ende, mediante la ley de Ampère obtenemos:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_0 d = \mu_0 n d I \Rightarrow B_0 = \mu_0 n I \quad (39)$$

Finalmente, en virtud de la suposición (i) y según nuestro sistema de referencia, el campo magnético en el interior del solenoide infinito resulta:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 n I \hat{z} \quad (40)$$

Vemos que recuperamos el resultado obtenido en la ec.(34) cuando utilizamos el método de superposición de espiras. Además, debido a que podemos realizar este mismo tipo de análisis para cualquier segmento interno y paralelo al eje del solenoide, se deduce que el resultado (40) es válido para todo punto interior a dicha configuración.

Conclusiones

A partir del interés en que los estudiantes avanzados (Colaboradores o Ayudantes Segundos en la materia Física II de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires) comenzaran a familiarizarse con el estudio profundo (con las herramientas matemáticas comunes a todas las carreras) de un problema aparentemente sencillo, obtuvimos una herramienta que puede ser no solamente utilizada sino también comprendida por los alumnos de la materia.

Se presentaron tres métodos de resolución (que no incluye el conocimiento del potencial vector) con diversas dificultades matemáticas. La profundización acerca de las suposiciones que subyacen en cada uno de los modelos fue una de las consecuencias más importantes de este trabajo: el estudio crítico de los métodos de resolución típicos de los libros de texto. Se encontraron, incluso, algunos pasos cuestionables en varios de ellos lo que

llevó a que los alumnos avanzados buscaran un procedimiento para el cálculo del campo magnético de un solenoide finito por el método de superposición de espiras que, hasta lo que nosotros sabemos, es novedoso. En el caso de la resolución a través de la Ley de Ampere, se puntualizaron algunos procedimientos cuestionables que aparecen, incluso, en muy buenos libros de texto. La resolución analítica modelizando a los solenoides como distribuciones superficiales de corriente en la dirección azimutal permitió darle sustento a algunas de las afirmaciones (a veces correctas y otras veces incorrectas) acerca de la pertinencia del uso del modelo de solenoide infinito o del solenoide finito. En este último caso se compararon los resultados obtenidos en el eje del solenoide con los obtenidos analíticamente con resultados no solo cualitativos sino también cuantitativos.

Los análisis realizados permiten cumplir con el segundo propósito de este trabajo: brindarle a los alumnos de la materia la posibilidad de analizar las diferencias cuantitativas entre los diferentes modelos y dejar bien en claro las suposiciones realizadas. Por último, consideramos que este trabajo otorga a los docentes formados un beneficio adicional: la posibilidad de corregir algunas imprecisiones y/o aclarar puntos oscuros que se encuentran en los libros de texto.

Apéndice 1

Para justificar que en todo punto interior a un solenoide infinito, el campo magnético es paralelo al eje del mismo, analizaremos una configuración formada por tres espiras radio R equidistantes entre sí. Las mismas se encuentran centradas en los puntos $\vec{r}' = L\hat{z}$, $\vec{r}' = 0\hat{z}$ y $\vec{r}' = -L\hat{z}$, respectivamente, y transportan una corriente de intensidad I en sentido antihorario tal como se esquematiza en la Fig. 9.

Pretendemos calcular el campo magnético creado por esta configuración, en todo punto del plano $z=0$. En efecto, en virtud de las ecuaciones (24), (25) y (26) reemplazamos $z=0$ en las mismas y obtenemos que para la espira ubicada en $z=L$

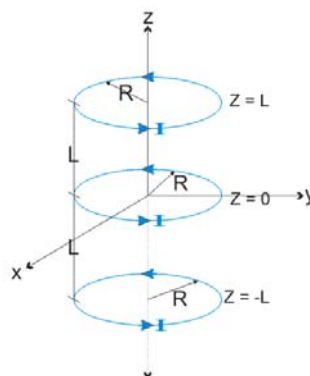


Figura 9: Tres espiras circulares de corriente ubicadas en los planos $z' = L$, $z' = -L$ y $z = 0$ respectivamente. Las mismas poseen radio R y transportan una corriente I .

$$B_x^1 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{RL \cos \varphi' d\varphi'}{[\rho^2 + R^2 + L^2 - 2R\rho \cos(\varphi' - \varphi)]^{3/2}} \quad (A.1)$$

$$B_y^1 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{RL \sin \varphi' d\varphi'}{[\rho^2 + R^2 + L^2 - 2R\rho \cos(\varphi' - \varphi)]^{3/2}} \quad (A.2)$$

$$B_z^1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[R^2 - R\rho \cos(\varphi' - \varphi)] d\varphi'}{[\rho^2 + R^2 + L^2 - 2R\rho \cos(\varphi' - \varphi)]^{3/2}} \quad (A.3)$$

Para la espira ubicada en $z = 0$

$$B_x^2 = 0 \quad (A.4)$$

$$B_y^2 = 0 \quad (A.5)$$

$$B_z^2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[R^2 - R\rho \cos(\varphi' - \varphi)] d\varphi'}{[\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos(\varphi' - \varphi)]^{3/2}} \quad (A.6)$$

Finalmente, para la espira ubicada en $z = -L$

$$B_x^3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{RL \cos \varphi' d\varphi'}{[\rho^2 + R^2 + L^2 - 2R\rho \cos(\varphi' - \varphi)]^{3/2}} \quad (A.7)$$

$$B_y^3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{RL \sin \varphi' d\varphi'}{[\rho^2 + R^2 + L^2 - 2R\rho \cos(\varphi' - \varphi)]^{3/2}} \quad (A.8)$$

$$B_z^3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[R^2 - R\rho \cos(\varphi' - \varphi)] d\varphi'}{[\rho^2 + R^2 + L^2 - 2R\rho \cos(\varphi' - \varphi)]^{3/2}} \quad (A.9)$$

Para obtener la componente x del campo magnético total, sumamos (A.1), (A.4) y (A.7); para la componente y sumamos (A.2), (A.5) y (A.8) y, finalmente, sumamos (A.2), (A.6) y (A.9) para la componente z del campo total. Las componentes x e y resultan nulas y solamente sobrevive la componente z

$$\vec{B}(\vec{r}) = (B_x^1 + B_x^2 + B_x^3) \hat{x} \quad (A.10)$$

Hemos probado que el campo magnético total en el plano $z=0$ generado por esta configuración de espiras posee sólo componente en el versor \hat{z} . Es decir si aumentamos el número de espiras equidistantes obtendremos el mismo resultado, es decir, las contribuciones radiales al campo total se anularán de a pares.

Será posible, entonces, aumentar aún más el número de espiras hasta obtener un solenoide con un número infinito de las mismas y el resultado obtenido será el mismo (el campo magnético resultará paralelo al eje del solenoide). Es más, como el solenoide será infinito, el resultado hallado para el plano $z=0$ será el mismo para cualquier otro plano paralelo a éste. Por lo tanto, la suposición (i) resulta viable.

Referencias

- 1- Feynman, R.; Leighton, R.B.; Sands, M.: *Física, Vol. II. Electromagnetismo y Materia*. México: Addison-Wesley Iberoamericana (1987) 8
- 2- D.Brick; W.Snyder: *External dc Field of a Long Solenoid*, Am. J. Phys. 33, 905 (1965).
- 3- W. Hauser: *On the magnetic induction field of an ideal solenoid*, Am. J. Phys. 53, 616 (1985).
- 4- R. J. Protheroe; D. Koks: *The transient magnetic field outside an infinite solenoid*, Am. J. Phys. 64, 1389 (1996).

5- M. Abramowitz; I. A. Stegun: *Handbook of mathematical functions with Formulas, WGraphs, and Mathematical Tables*. USA: National Bureau of Standards Applied Mathematics Series – 55. (1964).

6- F. Rodríguez Trelles *Temas de Electricidad y Magnetismo*, Buenos Aires EUDEBA (1984)

7- Como puede apreciarse no es necesario definir a la corriente a través de $I = \int_C (\vec{K} \times \vec{n}) \cdot d\vec{\xi}$, lo que simplifica el tratamiento.

8- Purcell, E.M.: *Electricidad y Magnetismo*, Barcelona: Berkeley Physics Course Vol. 2, Ed. Reverté S.A. (1969).

9- Tipler, P.A.: *Física***. Barcelona: Ed. Reverté S.A. (1983).

10- F. Munley: *Magnetic field of a solenoid of arbitrary cross-sectional shape*, Am. J. Phys. 53, 779 (1985).

11- B. Dasgupta: *Magnetic field due to a solenoid*, Am. J. Phys. 52, 258 (1984).

12- Alonso, M.; Finn, E.J.: *Física*, México: Addison-Wesley Iberoamericana (1995).

13- McKelvey, P.; Grotch, H.: *Física para Ciencias e Ingeniería*. Tomo II. México: Ed. Harla. (1981).

14- SEARS; Young; Freedman: *Física Universitaria*: Vol. II, México: Prentice Hall (2004).

12- 14- SERWAY, R.: *Física para Ciencias e Ingeniería*. Vol. 2. México: MCGraw-Hill (2002). Ampere

16- Halliday; Resnick; Krane: *Física Vol.2*. México: Cía. Ed. Continental (1999). Ampere

17- Usualmente la separación de los distintos segmentos no se realiza de esta manera sino considerando otros 4 segmentos: los dos verticales y los dos horizontales aunque la anulación de la circulación no se corresponda con esta división.

18- O. Espinosa; V. Slusarenko: *The magnetic field of an infinite solenoid*, Am. J. Phys. 71, 953 (2003).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo de dos Subsidios UBACYT.