

# Flujos viscogravitatorios planos divergentes: formación y evolución de valles

Julio Gratton<sup>1,2,\*</sup> y Carlos Alberto Perazzo<sup>3,2,\*\*</sup>

<sup>1</sup>INFIP-CONICET, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
UBA, Ciudad Universitaria, Pab. I, 1428 Buenos Aires.

<sup>2</sup>Investigador del CONICET.

<sup>3</sup>Universidad Favaloro, Solís 453, 1078 Buenos Aires.

(Dated: 4 de octubre de 2007)

Consideramos una capa líquida delgada, inicialmente uniforme, que descansa sobre un sustrato horizontal y plano dividido en dos partes, que para  $t > 0$  se alejan la una de la otra con una velocidad constante. Este movimiento divergente arrastra el líquido de modo de producir una depresión. En este trabajo investigamos la evolución temporal de la depresión y otras características del flujo. Encontramos diferentes regímenes autosemejantes que describen el fenómeno en el entorno del instante inicial, en el entorno del momento en que el líquido se divide en dos porciones separadas por una región seca, y para tiempos muy largos.

We consider a thin liquid layer initially uniform, that rests on a horizontal plane substrate divided in two parts, that for  $t > 0$  are pulled apart with constant velocity. This divergent motion drags along the liquid and a depression is formed. Here we investigate the temporal evolution of the depression as well as other properties of the flow. We find different self similar regimes that describe the phenomenon close to its beginning, near the moment when the fluid divides in two parts separated by a dry region, and for very large times.

## I. INTRODUCCIÓN

En otro trabajo<sup>1</sup> estudiamos la formación de crestas en flujos gravitatorios planos convergentes. De manera parecida es posible estudiar la formación de valles cuando el flujo es divergente. Nuestro modelo consiste de una capa fluida inicialmente uniforme que descansa sobre un sustrato horizontal y plano dividido en dos partes, que para  $t > 0$  se alejan la una de la otra. Este movimiento divergente de los sustratos arrastra el líquido de modo de producir una depresión (ver figura 1). Aquí estudiamos la evolución del flujo y mostramos que existen tres regímenes autosemejantes que se alcanzan en diferentes dominios espacio temporales. Estos regímenes y sus correspondientes leyes de escala se pueden obtener analíticamente.

## II. ECUACIONES BÁSICAS

Debido a la simetría del problema representado en la figura 1 basta considerar el semiplano  $X > 0$ . Sea por lo tanto una capa líquida uniforme semiinfinita cuyo espesor es  $H_0$ , que reposa sobre una superficie rígida horizontal. Para tomar en cuenta la simetría del problema podemos imaginar que en  $X = 0$  hay una pared vertical impermeable sobre la cual el líquido no se adhiere. Supondremos

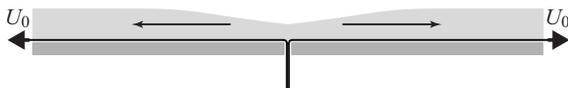


Figura 1: Formación de un valle debido al movimiento divergente del sustrato.

que en  $T = 0$  el sustrato en  $X > 0$  comienza a moverse con velocidad constante  $U_0 > 0$  de modo que en las inmediaciones de la pared se forma una depresión de la superficie libre del líquido. Supondremos que el flujo es lento y dominado por la viscosidad de manera que se puede emplear la aproximación de lubricación (despreciamos la capilaridad). Sea  $H \equiv H(X, T)$  el espesor de la capa líquida y  $U \equiv U(X, T)$  la velocidad horizontal promediada verticalmente. La condición de contorno en  $X \rightarrow \infty$  es  $H(\infty, T) = H_0$ . Supondremos además que  $U(0, T) = 0$ . Igual que en<sup>1</sup> definimos las variables adimensionales  $u, h, x, t$  por medio de

$$U = |U_0|u, \quad H = H_0h,$$

$$X = \frac{g}{3\nu} \frac{H_0^3}{|U_0|} x, \quad T = \frac{g}{3\nu} \frac{H_0^3}{U_0^2} t,$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\nu$  es la viscosidad cinemática. La ecuación de evolución y las condiciones inicial y de contorno son entonces:

$$h_t = -h_x + (h^3 h_x)_x, \quad (1)$$

$$h(x, 0) = 1, \quad h(\infty, t) = 1, \quad h^2 h_x|_{x=0} = 1.$$

La conservación de la masa da  $\frac{d}{dt} \int_0^\infty (h - 1) dx = -1$ .

## III. SOLUCIONES NUMÉRICAS

El problema (1) no tiene en general una solución en forma cerrada, por lo que se debe resolver numéricamente. Algunos resultados se muestran en la figura 2. Se puede observar que cerca de la pared  $h$  disminuye rápidamente,

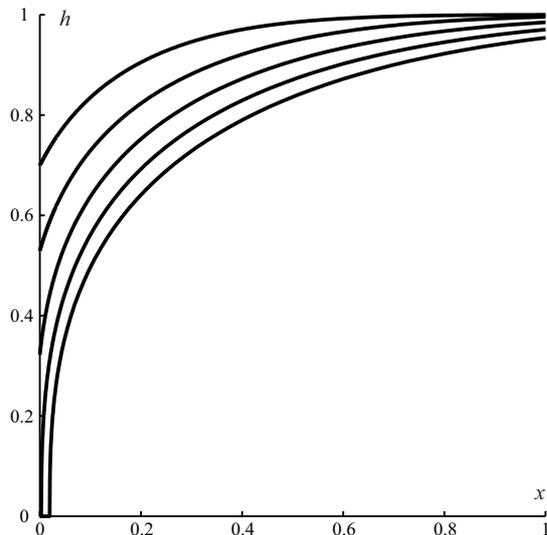


Figura 2: Perfiles numéricos para  $t=0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25$ .

y que existe un valor de  $t$  que llamaremos  $t_s$ , para el cual  $h(0, t_s) = 0$ . Para  $t > t_s$  el líquido no está más en contacto con la pared, por lo que la condición de contorno en la pared es ahora  $h(0, t) = 0$  y como se ve en el último perfil de la figura 2 la corriente tiene un frente en  $x_f(t)$  de modo que  $h(x, t > t_s) = 0$  para  $0 < x < x_f(t)$ . De nuestros resultados numéricos obtenemos  $t_s = 0.1786$ .

#### IV. COMPORTAMIENTO PARA $t \ll t_s$

Para  $t$  pequeño, cuando  $h$  es próximo a 1, podemos escribir  $h = 1 - z$  con  $z \ll 1$  y linealizar la (1), que se reduce entonces a

$$z_t = -z_x + z_{xx}, \quad z_x|_{x=0} = -1. \quad (2)$$

Este problema admite una solución cerrada no autosemejante del mismo tipo que la obtenida en<sup>1</sup> para la formación de crestas, que por brevedad no vamos a escribir. Dicha solución tiende a la autosemejanza para  $t \rightarrow 0$ . En este límite  $z \rightarrow z_s$ , donde

$$z_s = 2\sqrt{t} \left[ \frac{e^{-\psi^2}}{\sqrt{\pi}} - \psi \operatorname{erfc}(\psi) \right], \quad (3)$$

con  $\psi = x/2\sqrt{t}$  y  $\operatorname{erfc}(\psi)$  es la función error complementaria, igual que lo que se obtuvo para la formación de crestas. Es fácil mostrar que en este régimen autosemejante la profundidad del valle es  $z_s(0, t) = 2\sqrt{t/\pi}$  y su ancho aumenta como  $\sqrt{t}$ .

#### V. COMPORTAMIENTO PARA $t \approx t_s$

A medida que el valle se hace más profundo la solución deja de ser autosemejante. Sin embargo cuando se aproxima el instante  $t_s$  en que el fluido se separa de la pared

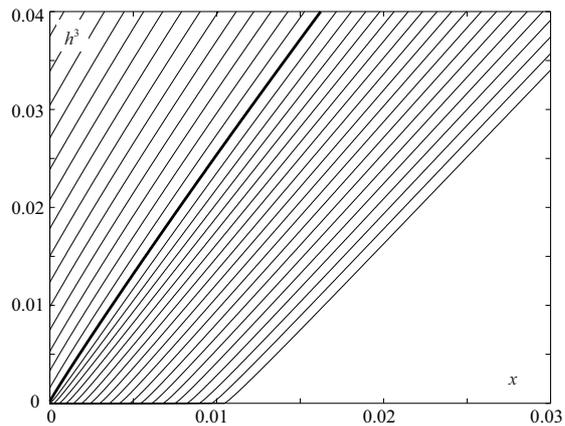


Figura 3: Perfiles cerca de la pared, para instantes equiespaciados anteriores y posteriores a  $t_s$ .

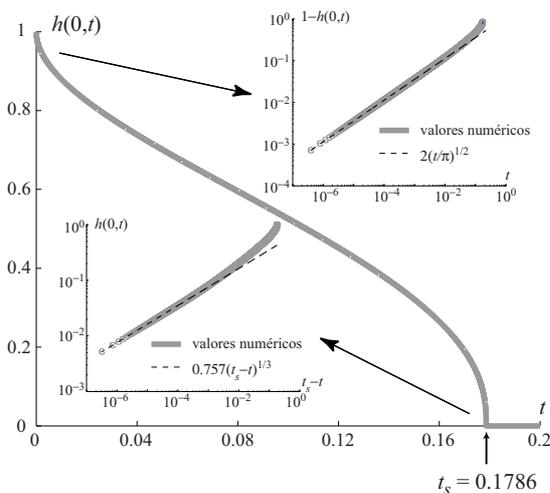


Figura 4: Altura en la pared y sus leyes de escala para  $t \ll t_s$  y para  $t \approx t_s$ .

se alcanza un nuevo régimen autosemejante en el dominio  $|t'| \ll 1$  ( $t' \equiv t - t_s$ ),  $x \ll 1$  en el cual  $H_0$  no puede ser escala de  $H$  dado que  $H \ll H_0$ . Se puede mostrar que en este dominio la asíntótica tiene la forma  $h = t'^{1/3} f(x/t')$ . Estas características se pueden observar en las figuras 3 y 4.

#### VI. COMPORTAMIENTO PARA $t \gg t_s$

Para  $t$  muy grande,  $h$  tiende a la solución correspondiente a la ruptura de un dique que embalsa un líquido viscoso<sup>2</sup>, vista por un observador que se desplaza con velocidad  $-U_0$ . Dicha solución es autosemejante y en ese referencial tiene la forma  $h = f(x'/\sqrt{t})$ , donde  $x' = x - U_0 t$ . En la figura 5 se puede observar la forma de esta solución.

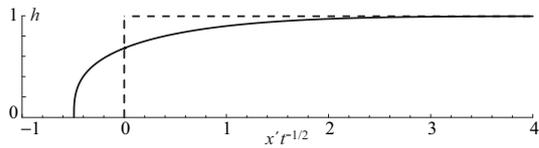


Figura 5: Solución autosemejante para  $t \gg t_s$ .

## VII. CONCLUSIONES

El proceso de formación de valles consta de dos etapas. En la primera se produce una depresión cuya parte más profunda termina en un diedro. Cuando la arista del diedro llega al substrato, el fluido se divide en dos partes separadas por una región seca. En la segunda etapa el ancho de la región seca crece con el tiempo. Es posible reconocer en el fenómeno tres regímenes autosemejantes:

- En la primera etapa, si  $t \ll t_s$ , el perfil está dado

por (3) y tanto la profundidad como el ancho del valle escalan como  $t^{1/2}$ .

- En el entorno de la transición entre las dos etapas, cuando  $t \approx t_s$  (es decir  $t' \approx 0$ ) y cerca de la pared, la altura de la corriente escala como  $t'^{1/3}$ , mientras que el ancho del valle escala como  $t'$ .
- En la segunda etapa, cuando  $t \gg t_s$ , la solución tiende a la correspondiente a la ruptura de un dique.

## Agradecimientos

Agradecemos los subsidios PIP 5377 del CONICET, X031 de la Universidad de Buenos Aires y PICTR 2002-00094 de la ANPCYT.

---

\* Correo electrónico: [jgratton@tinfiplfp.uba.ar](mailto:jgratton@tinfiplfp.uba.ar)

\*\* Correo electrónico: [perazzo@favaloro.edu.ar](mailto:perazzo@favaloro.edu.ar)

<sup>1</sup> J. Gratton y C.A. Perazzo, *Flujos viscosgravitatorios planos convergentes: formación y evolución de crestas*, *Anales*

*AFA*, este volumen.

<sup>2</sup> J. Gratton y F. Minotti, *J. Fluid Mech.* **210**, 155–182, 1990.