ISSN (EN LINEA): 1850 - 1158

Estrategia de búsqueda intermitente para modelos de tiempo continuo

Miguel A. Ré

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria - (5010) - Córdoba - Argentina
e-mail: re@famaf.unc.edu.ar

Diversos problemas de la vida cotidiana o de carácter científico pueden asociarse a la búsqueda de un objetivo o de un conjunto de objetivos. En este contexto resulta de interés la evaluación de la eficiencia de las distintas estrategias de búsqueda, considerando por ejemplo el tiempo necesario para el encuentro. En estudios recientes se ha encontrado que una estrategia intermitente en un modelo de caminata aleatoria de tiempo discreto, en el que el caminante alterna entre un desplazamiento lento y uno rápido con probabilidades α y 1-α respectivamente, permite optimizar el tiempo de encuentro. Sin embargo en muchas situaciones un modelo de tiempo continuo permite una mejor aproximacin a los procesos reales. Por esta razón resulta de interés evaluar si las estrategias óptimas mantienen este carácter en los modelos de tiempo continuo. En esta comunicación se analiza la mencionada extensión a tiempo continuo y se evalúa la posibilidad de optimización del tiempo de encuentro mediante la estrategia intermitente. El modelo considerado corresponde a un conjunto de buscadores que realizan una caminata aleatoria de tiempo continuo sobre una red infinita en la que se encuentra un único objetivo. Los buscadores no disponen de información previa acerca de la ubicación del objetivo y pueden hacer transiciones a primeros vecinos o a sitios a una distancia L.

Diverse problems in everyday life or in scientifc realm may be stated as a search problem. In these problems it is of interest the evaluation of search efficiency by considering the time that takes the searcher to find the target. It has been recently reported that a so called intermittent strategy for a discrete time random walk model optimizes the time to locate the target. In the intermittent strategy, the searcher alternates between a slow and a fast displacement with probabilities α and $1-\alpha$ respectively. However a continuous time random walk model should give a better aproximation to real processes. In this way it would be of interest to evaluate if the extension of discrete time models to continuous time models are still optimal strategies. In this communication it is presented an extension to continuous time of the intermittent strategy model. The model consists of a set of searchers that make a continuous time random walk over an infinite lattice where there is an unique target. There is no previous information for the searchers about the target location. The walkers can make a transition to first neighbours or to lattice sites a distance L apart.

Pacs N^0 87.23.-n, 05.40.-a

1 Introducción

Diversos problemas que surgen en la vida cotidiana o en el ámbito científico pueden plantearse como un proceso de búsqueda$^{(1-5)}$. En muchos de estos problems el tiempo de encuentro es una magnitud crítica, ya sea prorque el buscador tiene un tiempo finito de acción o porque el objetivo está disponible durante un intervalo de tiempo acotado. Por lo tanto, suponiendo que existe un único objetivo o un conjunto de objetivos distribuídos en el espacio resulta de interés analizar las distintas estrategias que pueden desplegarse para optimizar el tiempo de detección.

Así por ejemplo se han considerado estrategias del tipo vuelos de Lévy o, a partir de observaciones de desplazamientos de animales forrajeros, se han considerado estrategias de búsqueda denominadas intermitentes. En este último grupo el buscador alterna entre un estado de desplazamiento rápido, sin posibilidad de detección y un estado de desplazamiento lento con capacidad de detección.

En un estudio reciente$^{(6)}$ se ha considerado una estrategia de búsqueda intermitente en un modelo de Caminata Aleatoria de Tiempo Discreto (DTRW) sobre una red, con un único objetivo oculto en la red. El buscador alterna entre desplazamientos largos de longitud L sitios de red y desplazamientos cortos a primeros vecinos. La elección del largo del salto se da con probabilidad α para saltos a primeros vecinos y con probabilidad $1-\alpha$ para largo L. La detección del objetivo se da cuando el buscador llega a la posición que ocupa el objetivo. El problema resulta asimilable a uno de reacción mediado por difusión con tasa de reacción infinita (reacción perfecta) y el tiempo de detección corresponde al tiempo del primer pasaje por la posición del blanco. El modelo en discusión se ilustra esquemáticamente en la figura 1.

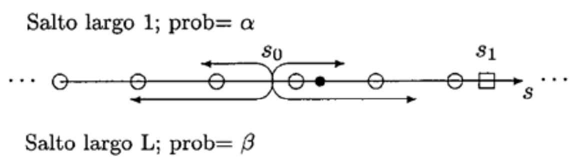

Figura 1: Esquema de transiciones para la estrategia intermitente en el modelo CTRW. Al cambiar de posición el caminante da un salto de largo 1 con probabilidad α o un salto de largo L con probabilidad $\beta = 1-\alpha$.

Sin embargo podemos pensar que un modelo de tiempo continuo dará una mejor aproximación al proceso real dado en la naturaleza. En última instancia el proceso a tiempo discreto puede reobtenerse considerando una densidad de tiempo de pausa deltiforme en el modelo de caminata aleatoria. Por esta razón presentamos en esta comunicación una extensión posible del modelo intermitente a caminatas aleatorias de tiempo continuo (CTRW). Mantendremos la suposición de salto de largo 1 (medido en sitios de red) con probabilidad α y salto de largo L con probabilidad $1-\alpha$.

En la sección siguiente damos una descripción más detallada del modelo en consideración. A continuación se recuperan algunos resultados de la teoría CTRW con particular atención al problema en consideración. Se calcula así la probabilidad de supervivencia para el objetivo en presencia de un conjunto de buscadores distribuídos irginalmente en la red. En la sección 4 determinamos los valorees para el modelo particular formulado, evaluando la eficiencia de detección en función del parámetro α.

2 Modelo CTRW para estrategia intermitente

Para evaluar la optimización del tiempo de encuentro del objetivo siguiendo una estrategia intermitente en un modelo de tiempo continuo se propone un modelo de CTRW sobre una red unidimensional. Los sitios de red se identifican por una coordenada entera s (la posición en la red estará dada por $x = as$, con a el parámetro de red).

Suponemos que en un sitio de red arbitrario, identificado como s_1, se encuentra el objetivo de búsqueda. Se supone además una distribución inicial de un conjunto de buscadores sobre la red con una concentración $c_0(s)$, con la única restricción de que inicialmente ningún buscador ocupe la posición s_1 ($c_0(s_1)$, ya que de lo contrario la detección se habría producido antes de comenzar el proceso.

Cada buscador realiza una caminata aleatoria de tiempo continuo independiente de la que realizan los demás. Los buscadores desconocen a *priori* la ubicación del objetivo, reflejado en el modelo CTRW por la ausencia de todo sesgo que oriente el desplazamiento. La estrategia de búsqueda que siguen se denomina intermitente y está regida por la siguiente regla: en cada instante de transición el caminante puede efectuar un salto de largo 1 o L sitios de red con probabilidad α y $\beta = 1-\alpha$, respectivamente.

La detección del blanco por parte de alguno de los buscadores se produce en el instante de encuentro: cuando el caminante alcanza la posición s_1. De esta manera el problema planteado resulta equivalente a un problema de atrapamiento o reacción mediado por difusión[7,8] y la distribución de probabilidades para el tiempo de detección por un caminante resulta coincidente con la densidad de probabilidad para el tiempo del primer pasaje por s_1. Este esquema suele denominarse de atrapamiento perfecto, por contraposición al modelo imperfecto en que los reactivos (buscador y objetivo en nuestro caso) pueden separarse luego de un encuentro fallido sin que la reacción (detección) se produzca[9].

La eficiencia de la estrategia de búsqueda se evalúa a partir del tiempo de detección del blanco por alguno de los buscadores inicialmente presentes en la red. A tal fin se calcula la probabilidad de que el blanco no haya sido detectado al tiempo t y su dependencia con el valor de α. Esta magnitud corresponde a la probabilidad de supervivencia (SP) en[10].

Para los cálculos a efectuar consideramos $L = 2$, que permite una resolución analítica manteniendo la esencia del modelo.

3 Algunos resultados de la teoría CTRW

Consideremos una caminante que efectúa una CTRW sobre la red. Denotamos por $\psi\left(s-s';t\right)$ a la densidad de probabilidad para el tiempo de transiciones, de manera tal que $\psi\left(s-s';t\right)dt$ es la probabilidad de que el caminante en la posición s' haga una transición a s entre t y $t+dt$. A partir de esta densidad definimos la densidad de probabilidad para el tiempo de espera total en un sitio (WTD)

$$\psi(t) = \sum_s \psi\left(s-s';t\right) \tag{1}$$

siendo $\psi(t)\,dt$ la probabilidad de que el caminante abandone el sitio que ocupa entre t y $t+dt$. Definimos también la probabilidad para el tiempo de permanencia en un sitio (SJP)

$$\Psi(t) = 1 - \int_0^{\infty} dt' \, \psi\left(t'\right) \tag{2}$$

Notamos que estamos suponiendo una caminata homogénea, expresado por la dependencia sólo del largo del salto en ψ.

Supongamos que el caminante comienza su caminata con una transición a s_0 en $t = 0$. Esta suposición corresponde a una condición inicial particular. Sin embargo, dado que estamos interesados en el comportamiento a tiempos relativamente largos, comparados con el tiempo medio entre transiciones, el efecto de esta particular elección no será significativo [9]. Expresamos la probabilidad de que el caminante llegue a la posición s entre t y $t + dt$ por $G(s;t|s_0)\,dt$, donde la densidad de probabilidad para el tiempo de arribo a la posición s debe cumplir con la relación de recurrencia

$$G(s;t|s_0) = \delta_{s,s_0}\delta\left(t - 0^+\right) + \\ + \int_0^t dt' \sum_{s'} \psi\left(s - s'; t - t'\right) G\left(s'; t|s_0\right) \tag{3}$$

que surge de la siguiente condición: el caminante llega a s entre t y $t+dt$ mediante una transición desde algún sitio s'. Suponemos que la llegada a s' se dio entre t' y $t' + dt'$ ($t' < t$ y que por lo tanto permanece en s' un tiempo $t - t'$. El primer término toma en cuenta la contribución de la transición inicial cuando $s = s_0$ Tomando transformada de Fourier espacial y transformada de Laplace temporal podemos resolver la ecuación para obtener

$$\hat{G}(k;u|s_0) = \frac{e^{iks_0}}{1 - \hat{\psi}(k;u)} \tag{4}$$

De aquí en más denotamos la transformada de Fourier espacial y Laplace temporal de una función por el símbolo ^ y la sustitución de argumentos $s \to k$ y $t \to u$.

La probabilidad $P(s;t|s_0)$ de encontrar al caminante que arranca en s_0 en la posición s al tiempo t, puede expresarse en función de la densidad G a través del producto de convolución

$$P(s,t \mid s_0) = \int_0^t dt' \psi\left(t - t'\right) G\left(s, t' \mid s_0\right) \tag{5}$$

que corresponde a la probabilidad de que el caminante llegue a s entre t' y $t' + dt'$ y permanezca en el sitio al menos hasta el tiempo t. Pasando a la representación de Fourier-Laplace obtenemos

$$\hat{P}(k;u|s_0) = \frac{\Psi(u)\, e^{iks_0}}{1 - \psi(k;u)} \tag{6}$$

Para los problemas de atrapamiento resulta de gran importancia la densidad de probabilidad para el tiempo de la primer visita al sitio s (FPTD) denotada por $F(s,t \mid s_0)$ de manera tal que la probabilidad de que el primer arribo del caminante a s sea entre t y $t+dt$ es $F(s,t \mid s_0)\,dt$. Esta densidad está relacionada a $P(s,t \mid s_0)$ a través del producto de convolución

$$P(s;t|s_0) = \delta_{s,s_0}\Psi(t) + \\ + \int_0^t r\, dt'\, P\left(s; t - t'|s\right) F\left(s; t'|s_0\right) \tag{7}$$

que establece que la probabilidad de encontrar al caminante en s al tiempo t está dada por la probabilidad de que llegue al sitio por primera vez en un instante $t' < t$ y luego vuelva a encontrarse en ese sitio cuando haya transcurrido un tiempo $t - t'$. Debe agregarse además la contribución de las realizaciones en las que el caminante no se desplaza cuando $s = s_0$.

Resolvemos la ecuación tomando transformada de Fourier y Laplace obteniendo

$$F(s;u|s_0) = \frac{P(s;u|s_0) - \Psi(u)\,\delta_{s,s_0}}{P(s;u|s)} \tag{8}$$

Notamos que en el numerador están descontadas las contribuciones a P de aquellas realizaciones en las que el caminante permanece en la posición inicial sin hacer transiciones. Así, para $s = s_0$ da la densidad de probabilidad para el tiempo del primer retorno al origen. De todas maneras esta elección no tendrá efecto en nuestro tratamiento dado que hemos supuesto $c_0(s_1) = 0$.

3.1 Probabilidad de supervivencia y tasa de reacción

Siguiendo a [10] consideremos un caminante que comienza en la posición $s_0 \neq s_1$. La densidad de probabilidad para el tiempo de detección en el modelo propuesto resulta coincidente con la del tiempo del primer pasaje. Hemos descartado $s_0 = s_1$ ya que en este caso la detección se produce precisamente en $t = 0$.

Suponemos de aqí en más una caminata homogénea, por lo que la probabilidad para la posición es función de la diferencia $s - s_0$ y por lo tanto la FPTD depende sólo de $s_1 - s_0$.

La probabilidad de que el caminante no haya detectado el objetivo al tiempo t, promediando sobre la posición inicial será

$$\Phi_1(t) = 1 - \int_0^t dt' \sum_{s_0} F\left(s_1 - s_0; t'\right) P_0(s_0) \tag{9}$$

con $P_0(s_0)$ la distribución de probabilidad inicial para el caminante.

Para generalizar el resultado a una distribución inicial de caminantes supongamos ahora N caminantes independientes en una red de $M+1$ sitios con una concentración inicial $c_0(s) = NP_0(s)$. Suponemos aqí que la concentración inicial de caminantes es la de equilibrio para la caminata *i.e.* una concentración uniforme ya que hemos supuesto una caminata homogénea y dado que los caminantes se desplazan independientemente unos de otros, la probabilidad de que ninguno de ellos haya detectado el blanco será

$$\Phi_N(t) = \left[1 - \int_0^t dt' \sum_{s_0 \neq s_1} F\left(s_1 - s_0; t'\right) \frac{c_0(s_0)}{N}\right]^N \tag{10}$$

Tomando el límite termodinámico, N, $M \to \infty$ manteniendo fijo el valor $c_0(s)$, obtenemos

$$\Phi(t) = \exp\left[-\int_0^t dt' \sum_{s_0 \neq s_1} F\left(s_1 - s_0; t'\right) c_0(s_0)\right] \tag{11}$$

$\Phi(t)$ es la probabilidad de supervivencia y puede interpretarse como la fracción de buscadores que no han detectado el blanco al tiempo t: $N(t) = N\Phi(t)$. El integrando en el exponente corresponde a su vez a la tasa de reacción del sistema y puede interpretarse como la fracción de buscadores del total remanente al tiempo t que detectan el objetivo entre t y $t - dt$

$$K(t) = \frac{1}{\Phi(t)} \frac{d\Phi(t)}{dt} \tag{12}$$

Para el problema en consideración, pasando a la representación de Laplace y usando el resultado (8)

$$K(u) = \sum_{s \neq s_1} \frac{P(s_1 - s; u)}{P(o; u)} c_0(s) \tag{13}$$

Tomando en cuenta ahora que estamos suponiendo una condición inicial homogénea

$$\frac{c_0}{u} = \sum_{s_0} P(s - s_0; u)\, c_0 \tag{14}$$

con lo cual resulta

$$K(u) = c_0 \left[\frac{1}{uP(0; u)} - 1\right] \tag{15}$$

Encontramos así que para evaluar la probabilidad de supervivencia debemos determinar $P(0; u)$.

4 Modelo intermitente separable

Consideramos aquí los resultados particulares para el modelo intermitente. Se propone la densidad de probabilidad para el tiempo de transición

$$\psi\left(s - s'; t\right) = \left\{\frac{\alpha}{2}\left[\delta_{s,s'-1} + \delta_{s,s'+1}\right] + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2}\left[\delta_{s,s'-2} + \delta_{s,s'+2}\right]\right\} f(t) \tag{16}$$

con la condición $\alpha + \beta = 1$, siendo α la probabilidad de efectuar una transición a un primer vecino y β la de efectuar una transición de largo L (=2 en este caso).

Sustituyendo la transformada de Fourier-Laplace de (16 en la expresión (6) obtenemos para el modelo propuesto

$$\hat{P}(k; u|s_0) = \frac{\Psi(u)\, e^{iks_0}}{4\beta f(u) R_1} \left\{\frac{1}{\cos k - c_-} - \frac{1}{\cos k - c_+}\right\} \tag{17}$$

con las definiciones

$$R_1 = \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{4\beta}\right)^2 + \frac{1 - f(u)}{2\beta f(u)}}$$
$$c_\pm = -\frac{\alpha}{4\beta} \pm R_1 \tag{18}$$

En particular, para el cálculo de la probabilidad de supervivencia es necesario calcular $P(0; u)$, suponiendo una concentración inicial de buscadores uniforme, excepto en $s = s_1$ conforme lo discutido en la sección anterior.

Invirtiendo en Fourier el resultado (17) evaluado en $s - s_0 = 0$ obtenemos

$$P(0; u) = \frac{1 - f(u)}{4\beta u f(u) R_1} \left\{\frac{1}{\sqrt{c_+^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{c_-^2 - 1}}\right\} \tag{19}$$

Sustituímos este resultado en la expresión para la tasa de reacción (13) y calculamos numéricamente la transformación inversa de Laplace del exponente en la probabilidad de supervivencia (11). El resultado obtenido se ilustra en la figura 2.

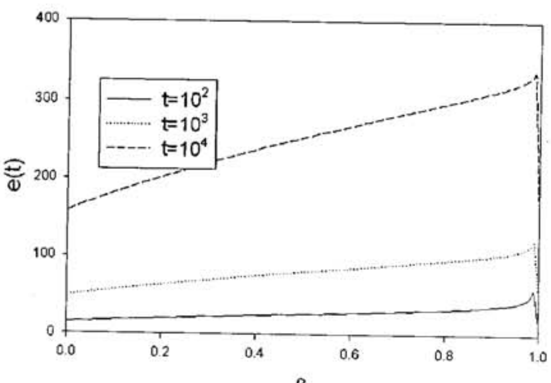

Figura 2: Dependencia del exponente en la probabilidad de supervivencia en función de β (probabilidad de salto largo) para distintos valores de t en unidades del tiempo medio entre saltos.

Observamos un aumento en el exponente para valores crecientes de $\beta < 1$. Este crecimiento estará asociado con una disminución de ls SP como se muestra en la figura 3, asociado con una mayor eficiencia en la detección.

5 Conclusiones

Se ha extendido el modelo de búsqueda con estrategia intermitente al esquema de tiempo continuo. Las probabilidades para el largo de salto 1 o L sitios de red son

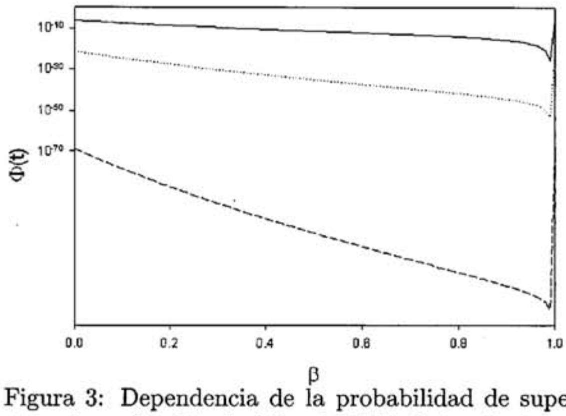

Figura 3: Dependencia de la probabilidad de supervivencia en función de β (probabilidad de salto largo) para distintos valores de t en unidades del tiempo medio entre saltos.

α y β respectivamente. La extensión elegida es relativamente directa a partir de la densidad $\psi\left(s-s';t\right)$ (16).

Usando el esquema de reacciones mediados por difusión se ha calculado la probabilidad de no detección al tiempo t, ilustrada en la figura.

Encontramos que efectivamente, para valores de β próximos a 1, aunque menores, se produce un mínimo en la probabilidad de supervivencia (y por lo tanto un máximo en la probabilidad de detección).

Agradecimientos: Los autores agradecen el financiamiento de SeCyT-UNC para este proyecto.

Referencias

[1] Stephens P. W. y Krebs J. R., "Foraging Theory", Princeton University Press (1986).

[2] Klafter J, Shlesinger M. y Zumofen G., Phys. Today **49**, 33 (1996).

[3] Viswanathan G. M. *et al.*, Nature **401**, 911 (1999).

[4] Bartumeus F. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 109902 (2002).

[5] Benichou O. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94**, 98101 (2005).

[6] Oshanin G. *et al.*, cond. mat. v1 0609641 (2006).

[7] Hänggi P. *et al.*, Rev. of Mod. Phys. **62**, 251 (1990).

[8] Weiss G. H., "Aspects and applications of the random walk", North Holland Press, Amsterdam (994).

[9] Ré M. y Budde C., Phys. Rev. E **61**, 1110 (2000).

[10] Bendler J. T. y Shlesinger M. F., in "The wonderful world of stochastics", Eds. M. F. Shlesinger y G. H. Weiss, Elsevier Science Publishers, B. V. (1985).