

MODELO DE DEFORMACIÓN EN HIELOS POLARES DE GISP2: REOLOGÍA

Di Prinzio C. L.^{1,2}, Wilen L.³, Nasello O. B.^{1,2}.

1-Facultad de Matemática Astronomía y Física (FaMAF), Universidad Nacional de Córdoba (UNC),
Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria, (5000) Córdoba, Argentina. 2-Miembro del CONICET.

3-Department of Physics and Astronomy, Ohio University (OU), Athens, Ohio 45701, USA.

En este trabajo se presenta un modelo de deformación de granos en hielo polar donde se incluye el efecto del crecimiento de grano. Se obtiene en general que el crecimiento de grano reduce la velocidad de deformación de los granos y en particular, para las muestras de hielo en GISP2 (Groenlandia), ese efecto llega a ser del 40% en capas profundas.

In this paper, a model of grain deformation is presented and the grain growth effect is included. It is found that, in general, the grain growth reduces the rate of grain deformation and this effect can be about 40% in the GISP2 samples.

I. INTRODUCCIÓN

Los hielos polares han sido estudiados por años y muestras de hielo de distintas profundidades fueron extraídas para obtener distintos datos experimentales. Muchos de los datos obtenidos en los hielos polares están orientados al estudio del clima en nuestro planeta [1-4]. Sin embargo otros datos físicos de los núcleos de hielo polar están relacionados con propiedades propias del hielo que aún no han sido totalmente explicadas.

El tamaño de grano en las capas superficiales de hielo, hasta aproximadamente 400 metros [5], está totalmente condicionado por el crecimiento de grano. En las capas mas profundas del hielo polar (mayor de 400 metros [5]), el efecto de la presión produce deformación en los granos y bajo ciertas condiciones de temperatura y presión los granos pueden rotar [6,7], o ser afectados por poligonización o bien recristalización [8,9]. La poligonización [8] es un proceso físico en el cual un cristal se divide en uno o varios granos con similar orientación cristalina mientras que la recristalización [9] produce cristales nuevos con orientaciones diferentes a los granos originales. Cuando estos dos procesos físicos son poco importantes o no están presentes, los granos experimentan una continua deformación o elongación con una tasa de deformación constante [10-14]. Bajo estas condiciones se puede considerar que el hielo polar en capas profundas esta afectado por el crecimiento de grano [15-18], y por el proceso de deformación a tasa constante.

La migración de bordes de grano fuerza a los granos a adoptar una forma semiesférica si no existen anisotropías en la energía superficial del mismo y la deformación impulsa a los granos a alargarse. La deformación y el crecimiento de grano compiten en darle la forma final a los granos en los núcleos de hielo polar. Individualizando ambos procesos físicos podremos encontrar la velocidad de deformación del hielo polar y podremos analizar la reología de la masa de hielo.

En este trabajo se presenta una ecuación simple, semiempírica, que relaciona el tamaño y forma de los granos y la reología del hielo polar cuando sólo están presentes los procesos de crecimiento de grano y de deformación.

II. MODELO DE DEFORMACIÓN DE LOS GRANOS

1) Relajación de granos inicialmente alargados bajo crecimiento de grano

Los granos deformados de hielo pertenecientes a un glaciar a una dada profundidad z pueden ser considerados elípticos (ver figura 1) con ejes principales a y b , tal que:

$$a \approx R(1 + e/2) \quad (1)$$

$$b \approx R(1 - e/2) \quad (2)$$

donde R es radio del círculo cuya área S es equivalente al área de la elipse, y la cual satisface las siguientes ecuaciones:

$$S = \pi R^2 = \pi ab \approx \pi a^2 (1 - e) \quad (3)$$

Con

$$e \approx 1 - \frac{b}{a} \quad (4)$$

e se denomina elongación y se tomó como aproximación para los cálculos presentados $e^2 \approx 0$. Esta aproximación será usada durante todo el desarrollo del presente trabajo.

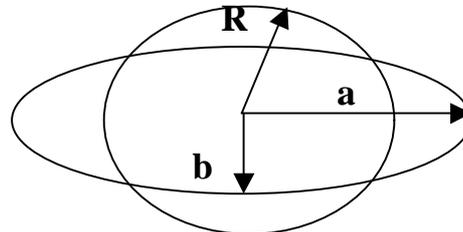


Figura 1: Esquema de un grano oval con su diámetro mínimo b y el grano equivalente circular de radio R .

Dentro del crecimiento de grano es importante estudiar como evoluciona en el tiempo t el área media de los granos. Derivando con respecto a t los términos de la ecuación (3), se obtiene:

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = \frac{2}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{1}{b} \frac{db}{dt} + \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (5)$$

y:

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = \frac{2}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{2}{a} \frac{da}{dt} - \frac{1}{(1-e)} \frac{de}{dt} \quad (6)$$

Luego de (5) y (6) resulta:

$$\frac{1}{b} \frac{db}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{1}{2(1-e)} \frac{de}{dt} \quad (7)$$

Finalmente, de la ecuación (7) se puede obtener la ecuación dinámica de la elongación con respecto al tiempo:

$$\frac{1}{2(1-e)} \frac{de}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{1}{b} \frac{db}{dt} \quad (8)$$

En las primeras capas de los hielos polares y glaciares [16], la profundidad de cada capa polar esta relacionada con el tiempo t , transcurrido desde que se formó la capa hasta el presente y el tamaño de los granos puede ser representado por:

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{k}{2} \frac{1}{R^2}; \quad R^2 = R_0^2 + kt \quad (9)$$

donde k es la constante del crecimiento de grano y R_0 es radio inicial medio de los granos.

En los testigos de hielo extraídos de Groenlandia en el proyecto GRIP, la ecuación (9) se cumple hasta aproximadamente los 800 m de profundidad [8].

En materiales isotrópicos, la ecuación (9) ha sido demostrada por Ceppi y Nasello [17-20]. usando el modelo numérico descrito en el Apéndice. Usando este modelo en muestras policristalina con granos deformados se puede demostrar, que el eje menor b evoluciona como:

$$\frac{1}{b} \frac{db}{dt} = \frac{k}{2} \frac{1}{b^2} \quad (10)$$

Remplazando en (8) por (9) y (10) y operando se obtiene:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{ke}{R^2} \quad (11)$$

Esta ecuación representa como evoluciona la elongación de los granos en un proceso de crecimiento de grano sin estar forzada por una deformación mecánica externa.

La solución de (11) es :

$$e = \frac{e_0}{\left[1 + \frac{kt}{R_0^2}\right]} = \frac{e_0 R_0^2}{R^2} \quad (12)$$

donde e_0 es la elongación inicial de la muestra.

2) Deformación de granos bajo tasa de deformación constante y crecimiento de grano

Los granos que constituyen el hielo polar están afectados por el crecimiento de grano y por la deformación mecánica producto de la presión debida al peso del hielo propiamente dicho. Ciertas masas polares pueden ser afectadas por el deslizamiento del glaciar en un lecho rocoso con pendiente [21-24], pero en presente modelo de deformación del hielo polar no se tendrá en cuenta esta tensión de corte.

En una muestra policristalina, una compresión permanente deforma los granos a velocidad constante.

$$\frac{de}{dt} = \alpha \quad (13)$$

Este tipo de ley ha sido observado en general en los glaciares [10-14]

Si consideramos que en los hielos polares existe sólo deformación por compresión y crecimiento de grano, combinando (11) y (13) se obtiene:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{ke}{R^2} + \alpha \quad (14)$$

La solución de esta ecuación es:

$$e = \frac{\alpha \left[1 + \frac{kt}{2R_0^2}\right] t}{\left[1 + \frac{kt}{R_0^2}\right]} + \frac{e_0 R_0^2}{[1 + kt]} = \frac{1}{2} \alpha t \frac{R^2 + R_0^2}{R^2} + \frac{e_0 R_0^2}{R^2} \quad (15)$$

III. RESULTADOS OBTENIDOS

1) Relajación de granos inicialmente alargados bajo crecimiento de grano:

Para poder verificar la ecuación semiempírica (12) se recurrió al uso del modelo de simulación de crecimiento de grano descrito en el Apéndice.

Con dicho programa se simuló la relajación de un policristal bidimensional de granos alargados. En la

figura 2 se muestra el policristal inicial usado en la simulación.

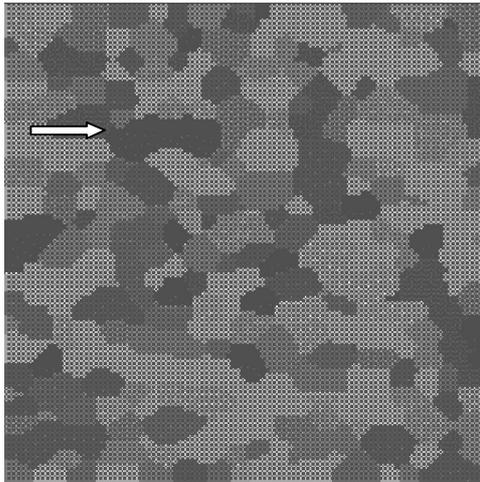


Figura 2: Policristal inicial usado en la simulación .La flecha señala a uno de los granos alargados.

En la figura 3 se presentan los valores de la evolución temporal del área media de los cristales obtenidos por el modelo computacional superpuestos con los valores obtenidos usando la ecuación (9).

En la figura 4 se presentan en un gráfico In-In los valores de la elongación en función de R^2 obtenidos mediante la simulación numérica. La pendiente de los datos simulados es aproximadamente la unidad (negativa) al igual que lo predice el modelo semiepírico (ecuación. (12)). Así mismo la ordenada al origen es -0.4 , la cual coincide con el valor teórico $\ln(e_o R_o^2)$ teniendo en cuenta que $e_o=0.25$ y $R_o^2=6 \text{ mm}^2$

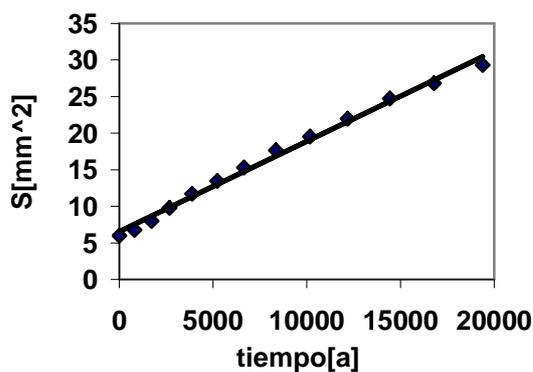


Figura 3: Valores del área obtenidos por el modelo computacional superpuestos a los valores obtenidos con la ecuación (9). En esta simulación $R_o=2.45 \text{ mm}$ y $k=12 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2/\text{año}$.

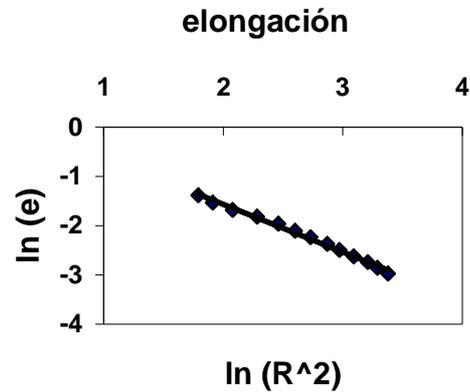


Figura 4: Valores elongación obtenidos por modelo computacional..

2) Deformación de granos bajo tasa de deformación constante y crecimiento de grano:

Para poder verificar la ecuación semiempírica (15), se utilizaron los datos de hielos polares obtenidos por Wilen y col. (2004) [25]. Estos autores estudiaron las propiedades de los núcleos de hielo en GISP2. Se estudió el tamaño de grano en muestras verticales y horizontales. En particular, en las muestras verticales se estudió el tamaño de grano en diferentes orientaciones, encontrándose una importante elongación de los granos en la dirección perpendicular al eje de compresión o dirección vertical. Usando las mediciones hechas en los granos en la dirección perpendicular y paralela a la dirección vertical se determinó la elongación.

Las muestras de GISP2 no presentaban recristalización y se observó un efecto de poligonización no muy importante a profundidades menores a los 800 metros.

La correlación entre la profundidad y el tiempo fue obtenido de los sitios de Internet de GISP2 Project: <http://www.ncdc.noaa.gov/paleo/icecore/greenland/submit/tablecon.htm>.

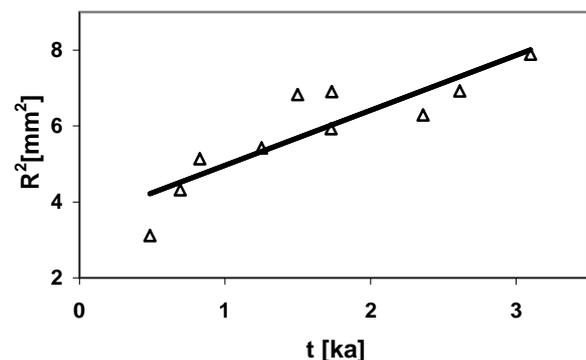


Figura 5: Valores de R^2 vs t para las muestras verticales de hielo de GISP2

En la figura 5 se presentan los valores de R^2 en función del tiempo correspondiente a las muestras de GISP2, considerado sólo hasta los 800 metros, es decir hasta

los 3000 años. Se muestra también el ajuste de acuerdo a ecuación. (9). Según este ajuste se obtiene $R_0^2 = 3.5 \text{ mm}^2$ y $k = 1.45 \text{ mm}^2/\text{ka}$

Con los valores de R_0^2 y k obtenidos se encontraron los valores de α y e_0 que según la ecuación (15) ajustan los resultados experimentales. Los valores obtenidos fueron $\alpha=0.09 \text{ 1/ka}$ y $e_0=0.05$

En la figura 6 se presentan los valores experimentales de e obtenidos de las muestras verticales de núcleos de hielo de GISP2 (puntos triangulares) y la representación grafica de la ecuación (15) (línea de puntos).

Si la deformación de los granos es considerada independiente del crecimiento de grano según la ecuación (13), los valores experimentales de elongación pueden ser representados por medio de una recta cuya pendiente es $\alpha=0.05 \text{ 1/ka}$ y $e_0=0.06$. Esta curva se representa en la figura 6 por la línea continua. En la figura 6 se ha extendido el eje de los tiempos para visualizar la diferencia de comportamiento predicha por ambas tipo de ecuaciones.

En la figura 6 se observa que ambas curvas ajustan satisfactoriamente los datos experimentales. Es importante recalcar, sin embargo, que mediante la ecuación (15) se obtiene $\alpha=0.09 \text{ 1/ka}$ mientras que según la ecuación (13) se obtiene $\alpha=0.05 \text{ 1/ka}$. La diferencia entre ambos valores del coeficiente de deformación es más de un 40%, demostrándonos así que el proceso de crecimiento de grano es importante en la relajación de los granos deformados.

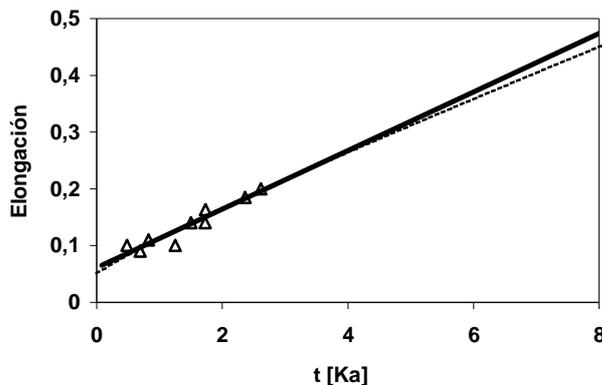


Figura 6: Valores de e vs t para las muestras verticales de GISP2.

IV. RESUMEN Y CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un modelo semiempírico que describe la evolución temporal del tamaño y forma de los granos de un policristal que evolucionan bajo efectos de deformación por compresión y crecimiento de grano. El modelo permite obtener datos de la reología de los hielos polares a partir de la forma y tamaño de los granos.

La ecuación involucra parámetros físicos como la movilidad de los bordes de grano k , el tamaño de grano inicial R_0 y el factor de deformación mecánica α .

En este modelo no se tuvieron en cuenta procesos como recristalización y poligonización

Los resultados obtenidos muestran que, en particular para las muestras de hielo en GISP2 (Groenlandia), considerando el crecimiento de grano se obtienen valores de velocidad de deformación un 40% más altos que no considerándolo.

APÉNDICE

Ceppi E. A. y Nasello O. B. [17-20] desarrollaron un algoritmo numérico para estudiar el crecimiento de grano en materiales isotrópicos, el cual resumimos a continuación.

Sea Γ_{mn} el borde de grano entre dos cristales n y m de diferente orientaciones en un policristal bidimensional. En el modelo, dicho borde de grano esta definido a través de las siguientes funciones definidas para todos los cristales n de la muestra:

$$f_n(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \text{ pertenece al cristal } n \\ 0 & \text{si } \vec{x} \text{ no pertenece al cristal } n \end{cases}$$

$$F_n(\vec{x}) = \oint_{C(\vec{x},g)} f(\vec{x}') d\vec{x}' \quad (a)$$

Donde la integración es llevada a cabo dentro del círculo de radio "g" centrado en \vec{x} , ($C(\vec{x},g)$ área de integración, Figura A).

Puede demostrarse que la curva implícitamente definida como $F_n(\vec{x}) = F_m(\vec{x})$ representa la nueva posición del borde de grano después de un cierto intervalo interno $\Delta t = \frac{g^2}{6k}$.

La nueva posición Γ_{mn} satisface la ecuación fundamental:

$$v = MP = \frac{k}{r} \quad (b)$$

donde M es la movilidad del borde de grano, P la fuerza de capilaridad, r el radio de curvatura y $k = M\gamma$ (γ energía del borde de grano).

El programa de computación fue implementado a fin de evaluar la función $F_n(\vec{x})$ y obtener el conjunto de puntos \vec{x} que satisface las condiciones anteriores.

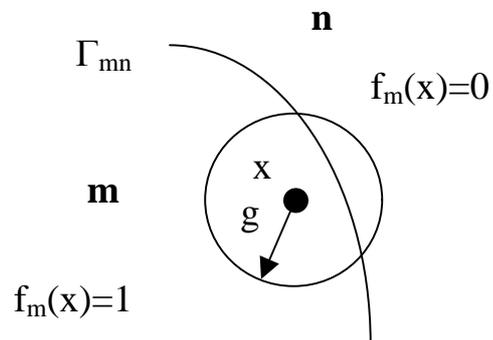


Figura A: Esquema de un borde de grano con el área de integración $C(\vec{x},g)$

El programa evalúa para cada punto de la muestra la integral (en forma numérica) de la ecuación (a) y de esa manera encuentra la nueva posición del borde de grano

REFERENCIAS

- 1- A. Indermuhle, E. Monnin, B. Stauffer, T. Stocker, *Geophysical Research Letters* vol27, Nro 5 pag.735, (2000).
- 2- P. Grootes, E. Steing, M. Stuiver, E. Waddington, D. Morse, y M.J. Nadeau, *Quaternary Research*, 56, pag. 289, (2001)
- 3- Alley, R.B., *Physics Today*, 44 (7), 13, 1991,
- 4- Alley, R.B., *Nature*, 392 (6674), 335 ff., 1998.
- 5- R. B. Alley, A.J. Gow y D.A. Meese, *J. of Glaciology* , **41**, pag.137. (1995)
- 6- Azuma N. y A. Higashi, *Annals of glaciology*, 6, pag 130, (1985).
- 7- R. Alley, *Science* , **240**, pag 493, (1988).
- 8- Thorsteinsson T., Kipfstuhl J., Eicken H. Jonsen S.J., Fuhrer K., *Earth and Planetary Science Letters* 131, pag 381-394, (1995).
- 9- J. Okuyama, H. Nerita, T. Hondoh, R. Koerner, *Journal of Geophysical Research* vol108, Nro B2 pag.2090, (2003).
- 10- Whillans I. M. *Journal of Glaciology*, **29**, **101**, .pag78, (1983).
- 11- M. Montagnat y P. Duval, *Earth and Planetary Science Letters* 183, pag 179, (2000).
- 12- O. Castelnaud, Th. Thorsteinsson, J. Kipfstuhl, P. Duval, G.R. Canova, *Annals of Glaciology*, **23**, pag 111, (1996).
- 13- P. Duval, *Annals of Glaciology*, **6** , pag79, (1985).
- 14- J. Schwander, J. Jouzel, C. Hammer, J. R. Petit, R. Udisti, E. Wolff., *Geophysical Research Letters* vol28, Nro 22 pag. 4243, (2001).
- 15- C. L. Di Prinzio, L. A. Wilen, R.B. Alley, J.J. Fitzpatrick y M. K. Spencer, *Journal of Glaciology*, **51**, **173**, .pag281-290, (2005).
- 16- Alley R., *Journal of Glaciology*, **38**, **129** ,.pag245, (1992).
- 17- Tesis doctoral, Ceppi E. A. Facultad de Matemática Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba. 1985.
- 18- Ceppi E.A.y Nasello O.B, *Scripta Metallurgica*, vol. 18, pp.1221-1225, ,(1984)
- 19- E.A. Ceppi y O.B. Nasello. *Computer Simulation of Microstructural Evolution*, pp. 1-11. Edited by D.J.Srolovitz, The Metallurgical Society, ,(1984)
- 20- O.B. Nasello y E.A. Ceppi (1986): *Computer Simulation of Microstructural Evolution*, pp. 13-20. Edited by D.J.Srolovitz, The Metallurgical Society, ,(1984)
- 21- R. Alley., J H. Perepezco, C. R. Bentley, *Journal of Glaciology*, **32**, **112** ,.pag425, (1986).
- 22- A. J. Gow, D. A. Meese, R. B. Alley, J. J. Fitzpatrick, S. Anandakrishnan, G. A. Woods y B. C. Elder, *Geophysical Research Letters* vol102, Nro c12 pag. 26559, (1997).
- 23- J. F. Nye, *Proc. Royal Soc. A*, vol 207, pag554.(1951).
- 24- J. F. Nye, *Proc. Royal Soc. A*, vol 239, pag113.(1956).
- 25- L.A Wilen, C.L. Di Prinzio and S. Hurley. "Application of novel fabric and texture analysis techniques to GISP2", December, AGU 2002. San Francisco, California USA.

AGRADECIMIENTOS Este trabajo ha sido posible gracias a los subsidios otorgados por el CONICET, y SECyT-UNC y la colaboración con Ohio University. Agradecemos la colaboración del Sr. José Barcelona por su apoyo técnico