

CÁLCULOS MONTE CARLO Y ANALÍTICOS DE LA RADIACIÓN EMITIDA POR UNA MUESTRA RADIATIVA CILÍNDRICA

ANALYTICAL AND MONTE CARLO CALCULATIONS OF THE RADIATION EMITTED FROM A CYLINDRICAL RADIOACTIVE SAMPLE

R.T. Mainardi, E.R. González*, E.V. Bonzi

Facultad de Matemática, Astronomía y Física (Fa.M.A.F.) - Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria – (5000) – Córdoba - Argentina
e-mail: engonzal@famaf.unc.edu.ar

A los efectos de certificar mediciones realizadas en un laboratorio de radiactividad ambiental de la actividad de muestras de diversos orígenes, es necesario comparar los resultados experimentales obtenidos con los de simulaciones Monte Carlo utilizando programas validados apropiadamente.

Para poder verificar el funcionamiento de un programa de simulación Monte-Carlo basado en el código MCNP-5, se planteó la necesidad de comparar sus resultados con los de un cálculo exacto que fuera posible de realizar con un mínimo de aproximaciones. Para ello supusimos una fuente radiactiva cilíndrica apoyada en una de sus caras planas sobre un detector de INa.

Para los cálculos analíticos integramos las emisiones que salen de todos los puntos de la muestra en un cono hacia la cara inferior del cilindro, atenuadas apropiadamente. La dispersión Compton que se produce en cualquier punto de la muestra y que se dirige hacia el detector es también contabilizada con procedimientos similares.

El programa MCNP-5 fue programado para simular dicha fuente radiactiva y se supuso a la fuente rodeada, salvo su cara inferior que está en contacto con el detector, por un material de coeficiente de absorción infinitamente grande, es decir la radiación que llega a la superficie escapa indefectiblemente sin ningún efecto de retrodispersión.

Las aproximaciones realizadas en el cálculo analítico hacen que sus resultados se aproximen rápidamente a los del cálculo Monte-Carlo, si el diámetro de la muestra radiactiva tiende a valores pequeños, con lo que consideramos verificado apropiadamente el programa de simulación.

Palabras Claves: Monte Carlo, detector, simulación, verificación.

In order to certify measurements performed in an environmental radioactivity laboratory of the activity of samples of diverse origins, it is necessary to compare the experimental results, with Monte Carlo simulation codes results exhaustively validated.

To corroborate a Monte Carlo simulation program based on the MCNP-5 code, a comparison with analytical calculations was performed aiming at having a minimum of approximations. In order to do that we assumed a cylindrical radioactive source with one of its plane faces in contact with a INa scintillator detector.

In our analytical calculations we added the emissions from all points of the sample contained in a cone whose base was the lower face of the cylinder. Compton scattering that had been produced at any point in the sample that exists towards the detector is also considered.

The MCNP-5 code was programmed to simulate such a radioactive source assuming that the source was surrounded with a material with an infinitely large absorption coefficient, that is, the radiation that reaches one the sample's faces escapes without any backscattering.

Some needed approximations carried out in the analytical procedure allow a fast approximation to the Monte Carlo results when the diameter of the radioactive sample becomes small, which allows us to considerer that the simulation program has been adequately validated.

Key Words: Monte Carlo, detector, simulation, verification.

I. INTRODUCCIÓN

Los detectores de NaI presentan características favorables para la detección de radiación gamma entre ellas, su alta eficiencia, su razonable resolución lo que sumado a su bajo costo y estabilidad lo convierten en el preferido de muchos laboratorios de radiación. Hoy en día son utilizados en numerosos experimentos de física atómica y nuclear

principalmente por la alta eficiencia en la detección de rayos x y gamma.

En la detección de radiación gamma proveniente de fuentes radiactivas, en las que están presentes elementos de larga vida media que alcanzaron su equilibrio radiactivo, es muy difícil fabricar un estándar de calibración. Para resolver este problema, en los últimos años se ha recurrido a programas de

* Autor a quién debe dirigirse la correspondencia.

computación desarrollados específicamente para simular por el método Monte Carlo problemas de transporte de radiación en distintos medios materiales.

El código Monte Carlo MCNP5 es un programa de simulación que utiliza el lenguaje FORTRAN y es también usado para simular transporte de fotones,

neutrones y electrones con diversas aplicaciones diferentes.

Sood⁽¹⁾ a publicado recientemente un trabajo en el cual realizó la verificación de la distribución de altura de pulsos (tally F8) en el código MCNP5 para una fuente puntual en un cilindro compuesto de tres materiales ficticios.

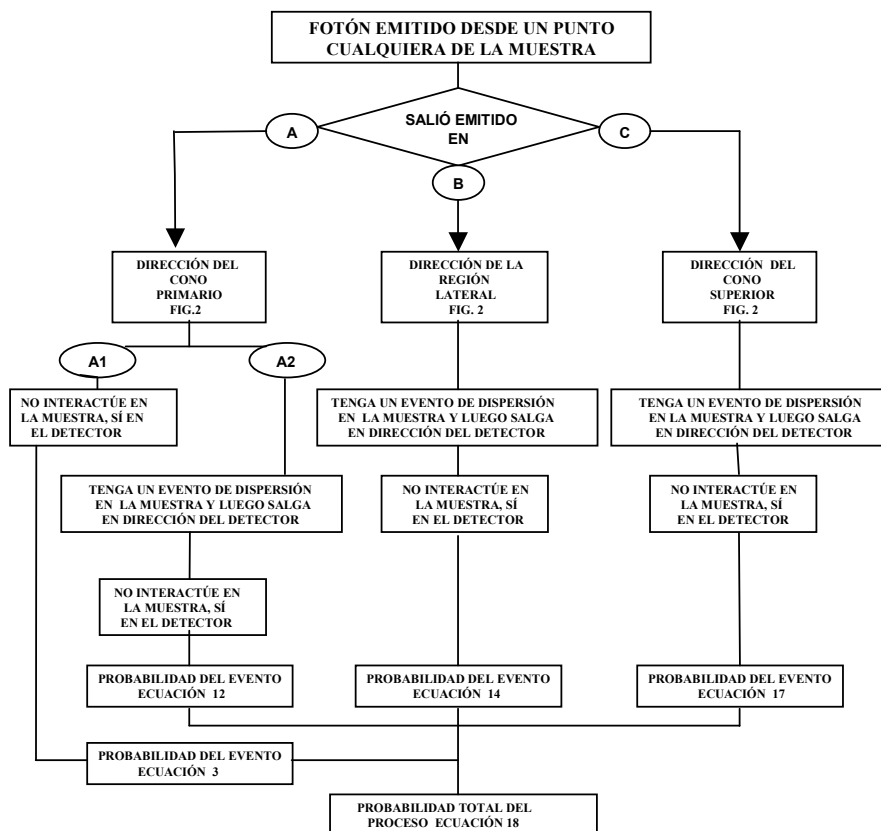


Figura 1. Esquema de interacción

Un pulso es generado en el detector por la deposición de una cierta cantidad de energía por parte de un fotón y que es la diferencia de energía del fotón que ingresa y el que abandona el detector. Al incidir un número muy grande de fotones se obtiene una distribución llamada de altura de pulsos o espectro. Normalizando esta distribución al número total de fotones emitidos obtenemos la probabilidad para cada uno de los intervalos de energía. La suma total de estos, a partir de una energía mínima, nos dará la probabilidad de que un fotón emitido entregue una cierta cantidad de energía, superior a ese mínimo, al detector.

Nosotros consideramos una muestra de material compuesta de los mismos elementos encontrados en una muestra de suelo. Suponemos que esta muestra está rodeada en sus caras laterales y superior por un material ideal completamente absorbente y hemos

simulado y calculado una situación donde únicamente aquellos fotones que atraviesan la cara inferior de la muestra pueden llegar a interactuar con el detector. Además, hemos supuesto a los puntos emisores isotrópicamente distribuidos en el volumen de la muestra y hemos comparado la suma total de altura de pulsos normalizada, con los resultados de la simulación y los cálculos analíticos.

La conclusión más importante es que los resultados obtenidos mediante el programa de simulación MCNP5 coinciden aceptablemente con los obtenidos mediante el cálculo analítico, aún cuando el radio o la altura de la muestra no tiendan a cero.

En este trabajo, hemos considerado que la fuente emite rayos gamma de 609 KeV donde el efecto Compton es predominante, pero los cálculos son aplicables también en el rango de energías menores a

1 MeV. Hemos supuesto además, despreciable las pérdidas de radiación en forma de bremsstrahlung producidas por los electrones secundarios. También hemos supuesto despreciable, para las energías consideradas, la dispersión Rayleigh y Thomson y que los rayos x característicos son absorbidos completamente. El coeficiente de absorción μ de la muestra de suelo, se obtuvo de tablas y se interpoló para obtener una función continua de la energía.

II. METODOLOGÍA DE CÁLCULO

Para realizar los cálculos hemos supuesto que los fotones son emitidos isotrópicamente desde diferentes puntos de la muestra y hemos calculado la probabilidad promedio de que un fotón tras haber tenido o no, un evento de dispersión en la muestra interactúe con el detector.

El diagrama de la fig.1 describe los procesos tenidos en cuenta, no fueron considerados eventos de múltiple dispersión.

A los fines del cálculo fueron considerados los siguientes casos:

Caso A1) El fotón fue emitido desde un punto de coordenadas (r,z) en una dirección (θ, ϕ) dentro del ángulo sólido definido por el punto de emisión y el círculo que forma la base de la muestra y que denominaremos de ahora en más “cono primario”. El ángulo θ es el ángulo polar con respecto al eje $-z$ y ϕ es el ángulo azimutal, (ver fig. 2).

La probabilidad de que el fotón sea emitido dentro del cono primario será igual al cociente entre el área subtendida por el ángulo sólido sobre la superficie de una esfera de radio R y el área total de esta esfera. Es decir:

$$Pp(r,z) = \frac{R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_m(\phi,r,z)} \sin(\theta) d\theta d\phi}{4\pi R^2} \quad (1)$$

donde $\theta_m(\phi,r,z)$ es el ángulo de máxima amplitud en θ , para cada valor de ϕ y está dado por:

$$\theta_m(\phi,r,z) = \text{atan} \left[\frac{\sqrt{(x_2(\phi,r) - r)^2 + b^2 - x_2(\phi,r)^2}}{z} \right]$$

donde atan es la función arctang, b es el radio de la muestra y $x_2(\phi,r)$ es la coordenada cartesiana en el sistema de referencia primario (x,y,z) de la proyección sobre el plano (x,y) del segmento que une el punto de emisión con la circunferencia de la base de la muestra (ver fig. 2) y está dado por:

$$x_2(\phi,r) = \frac{-B(\phi,r) + \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \left(\frac{3}{2}\pi - \phi\right)}{\left|\frac{\pi}{2} - \phi\right| \cdot \left|\frac{3}{2}\pi - \phi\right|} \sqrt{B(\phi,r)^2 - 4A(\phi) \cdot C(\phi,r)}}{2 \cdot A(\phi)}$$

donde :

$$A(\phi) = \tan(\phi)^2 + 1 \quad B(\phi,r) = -2 \cdot r \cdot \tan(\phi)^2$$

$$C(\phi,r) = r^2 \cdot \tan(\phi)^2 - b^2$$

Por lo tanto podemos reescribir la ecuación (1) como:

$$Pp(r,z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 - \cos \left[\text{atan} \left[\frac{\sqrt{(x_2(\phi,r) - r)^2 + b^2 - x_2(\phi,r)^2}}{z} \right] \right] \right] d\phi$$

Por otro lado, la probabilidad conjunta de que el fotón emitido dentro del cono primario no tenga un proceso de interacción en la muestra pero sí lo tenga en el detector para una dirección (θ, ϕ) dada es:

$$F1(r,z,\theta,\phi) = e^{-\mu_1(E(f(\theta))) \cdot \frac{z}{\cos(\theta)}} \cdot \left(1 - e^{-\mu_2(E(f(\theta))) \cdot d1'(\theta)} \right)$$

para $0 < \theta < \theta_1(\phi, r, z)$ y

$$F2(r,z,\theta,\phi) = e^{-\mu_1(E(f(\theta))) \cdot \frac{z}{\cos(\theta)}} \cdot \left(1 - e^{-\mu_2(E(f(\theta))) \cdot d2'(r,z,\theta,\phi)} \right)$$

para $\theta_1(\phi, r, z) < \theta < \theta_2(\phi, r, z)$

donde:

$$d1'(\theta) = \frac{L'}{\cos(\theta)}$$

y

$$d2'(r,z,\theta,\phi) = \frac{\sqrt{(x_2(\phi,r) - r)^2 + b^2 - x_2(\phi,r)^2}}{\sin(\theta)} - \frac{z}{\cos(\theta)}$$

son las distancias recorridas a lo largo de la dirección del fotón emitido desde su punto de ingreso al detector hasta su punto de salida; L' es la altura del detector y donde hemos tomado solamente para este caso:

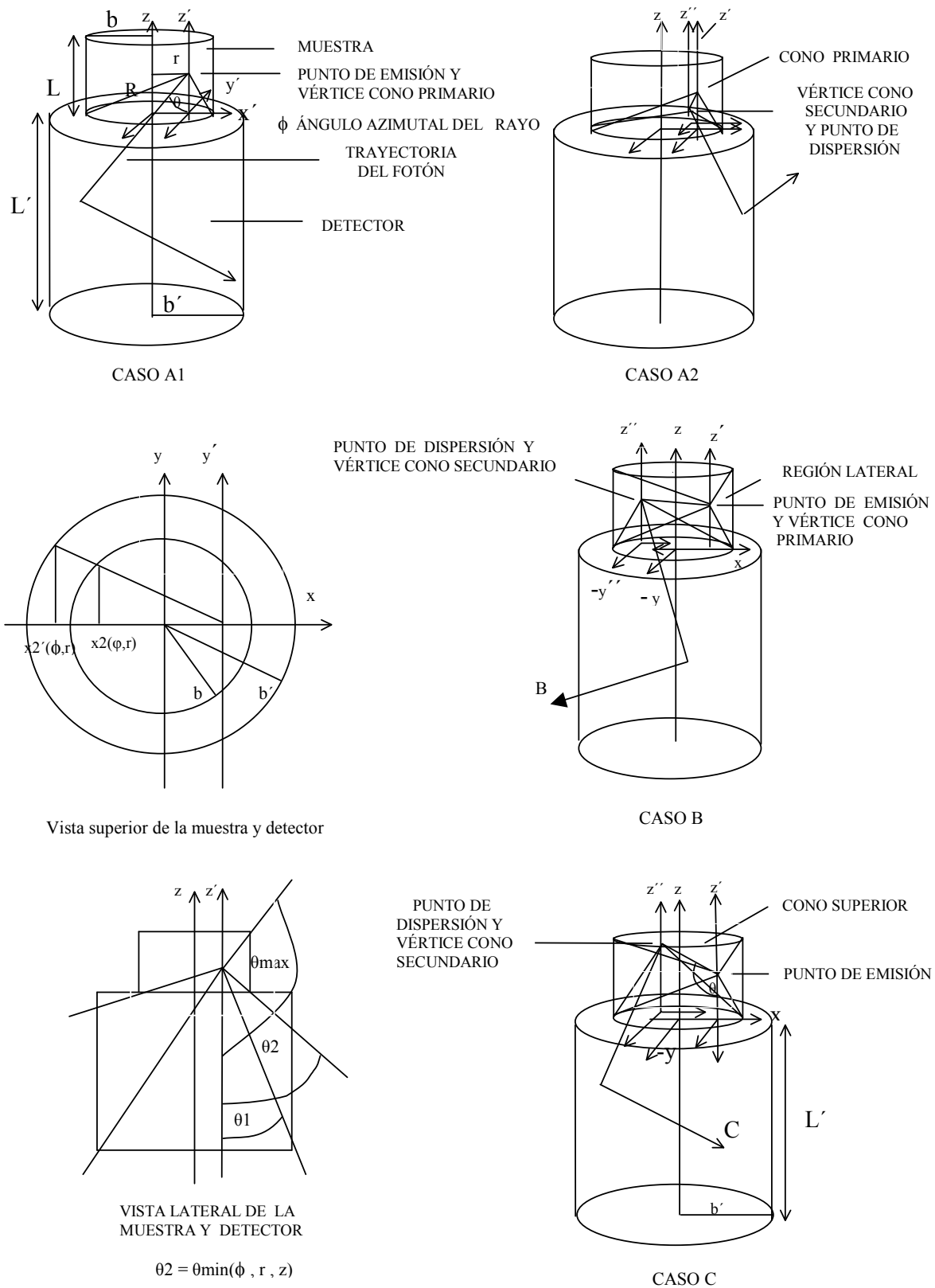


Figura 2. Distintos casos considerados

$$\mu_1(E(f(\theta))) = \mu_1 \quad \text{y} \quad \mu_2(E(f(\theta))) = \mu_2$$

μ_1 y μ_2 son los coeficientes de absorción de la muestra y detector respectivamente a la energía inicial del fotón y donde:

$$x_2(\phi, r) = \frac{-B(\phi, r) + \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \left(\frac{3}{2}\pi - \phi\right) \sqrt{B(\phi, r)^2 - 4 \cdot A(\phi) \cdot C(\phi, r)}}{\left|\frac{\pi}{2} - \phi\right| \cdot \left|\frac{3}{2}\pi - \phi\right| \cdot 2 \cdot A(\phi)}$$

con $C(\phi, r) = r^2 \cdot \tan(\phi)^2 - b^2$

es el equivalente a $x_2(\phi, r)$ pero tomando la circunferencia de la base del detector en este caso (ver fig.2) y b' es el radio del detector, θ_1 y θ_2 están dados por:

$$\theta_1(\phi, r, z) = \text{atan} \left[\frac{\sqrt{(x_2(\phi, r) - r)^2 + b'^2 - x_2(\phi, r)^2}}{(z + L)} \right]$$

$$\theta_2(\phi, r, z) = \theta_m(\phi, r, z)$$

$E(f(\theta))$ es la energía del fotón dispersado y $f(\theta)$ es la diferencia angular entre la dirección del fotón incidente y el dispersado.

$$E(f(\theta)) = \frac{E(0)}{\left(1 + \frac{E(0)}{m_e \cdot c^2} \cdot \cos(f(\theta))\right)}$$

en este caso, al no haber evento de dispersión $E(f(\theta))$ es igual a la energía inicial del fotón. Por consiguiente, la probabilidad conjunta de que el fotón emitido no tenga ningún proceso en la muestra pero sí en el detector promediada sobre todas las direcciones posibles es:

$$P_{\text{sidet}}(r, z) = \frac{\int_0^{2 \cdot \pi} \left(\int_0^{\Gamma(\phi, r, z)} F_1(r, z, \theta, \phi) \cdot \sin(\theta) \, d\theta + \Phi(\theta_2(\phi, r, z) - \theta_1(\phi, r, z)) \cdot \int_{\theta_1(\phi, r, z)}^{\theta_2(\phi, r, z)} F_2(r, z, \theta, \phi) \cdot \sin(\theta) \, d\theta \right) d\phi}{\int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^{\theta_2(\phi, r, z)} \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi} \quad (2)$$

donde Φ es la función de heaviside y $\Gamma(\phi, r, z)$ es una función que es igual a θ_2 cuando $\theta_2 > \theta_1$ e igual a θ_1 cuando $\theta_2 < \theta_1$ y la definimos como:

$$\Gamma(\phi, r, z) = \theta_2(\phi, r, z) \cdot \Phi(\theta_1(\phi, r, z) - \theta_2(\phi, r, z)) + \theta_1(\phi, r, z) \cdot \Phi(\theta_2(\phi, r, z) - \theta_1(\phi, r, z))$$

$$PROA_1 = \frac{\int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^L \int_0^b PROA_1(r, z) \cdot r \, dr \, dz \, d\phi}{\int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^L \int_0^b r \, dr \, dz \, d\phi} \quad (3)$$

Por lo tanto, la probabilidad conjunta del evento A1 para un fotón emitido desde el punto (r, z) puede escribirse como:

$$PROA_1(r, z) = P_p(r, z) \cdot P_{\text{sidet}}(r, z)$$

y la probabilidad promedio del evento A1 para fotones emitidos desde cualquier punto de la fuente será:

Caso A2) Consideremos ahora el caso en que el fotón salió emitido dentro del cono primario y tras tener un evento de dispersión en la muestra alcanzó el detector e interactuó con él. La probabilidad de que el fotón tenga un evento Compton (o Rayleigh) luego de recorrer una distancia media $u_0(z, \theta)$ dentro de la muestra es:

$$P_c(r, z, \theta, \phi) = \left(1 - e^{-\mu_1(E(0)) \cdot d(r, z, \theta, \phi)}\right) \cdot \frac{\sigma_c}{\sigma_T} \quad (4)$$

donde σ_c es la sección eficaz Compton o Rayleigh según el caso σ_T es la sección eficaz total, y $d(r,z,\theta,\phi)$ es la distancia desde el punto de emisión a la superficie de la muestra a lo largo de la trayectoria del fotón y para este caso está dada por:

$$d(r,z,\theta,\phi) = \frac{z}{\cos(\theta)}$$

Dado que el fotón, tuvo un evento de dispersión queremos calcular ahora la probabilidad de que salga en una dirección dentro del ángulo sólido con vértice en el punto de dispersión y cuya base es la cara inferior de la muestra y que llamaremos “cono secundario” o “cono de dispersión”. La probabilidad de tal evento después de hacer el cambio de variables $\theta'' = \theta' - \theta$, $\phi'' = \phi' + \text{cte}$, $r'' = r'$ desde un sistema cuyo eje z coincide con la dirección del fotón a otro cuyo eje z'' pasa por el punto de dispersión y que apunta en dirección del eje -z'' estará dado por:

$$P_{kn}(r,z,\theta,\phi) = \frac{\left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_m(\phi'', r'(r,z,\theta,\phi), z'(z,\theta))} F(\theta'' + \theta) \cdot \sin(\theta'') \, d\theta'' \, d\phi'' \right)}{\left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta'') \cdot \sin(\theta'') \, d\theta'' \, d\phi'' \right)} \quad (5)$$

donde:

$$F(\theta) = S(\theta, Z) \cdot \frac{1}{(1 + \alpha(1 - \cos\theta))^2} \left[1 + \cos\theta^2 + \frac{\alpha^2 \cdot (1 - \cos\theta)^2}{(1 + \alpha(1 - \cos\theta))} \right] \quad (6)$$

es el producto entre la sección eficaz de Klein-Nishina por unidad de ángulo sólido sin los factores constantes, y la función de dispersión incoherente $S(\theta, Z)$ y donde:

$$r'(r,z,\theta,\phi) = \sqrt{r^2 + 2 \cdot r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot u_0(z,\theta) + u_0(z,\theta)^2 \cdot \sin(\theta)^2}$$

$$z'(z,\theta) = z - u_0(z,\theta) \cdot \cos(\theta)$$

$$\phi'(r,z,\theta,\phi) = \text{atan} \left(\frac{u_0(z,\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi)}{r + u_0(z,\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\phi)} \right) \quad (7)$$

son las coordenadas cilíndricas del punto donde ocurrió el evento de dispersión y además, vértice del “cono secundario” (ver Fig. 2); $u_0(z,\theta)$ es la distancia media recorrida por el fotón antes de tener un evento y está dada por:

$$u_0(z,\theta) = \frac{\frac{1}{\mu l} - \left(\frac{1}{\mu l} + d(r,z,\theta,\phi) \right) \cdot e^{-\mu l \cdot d(r,z,\theta,\phi)}}{\left(1 - e^{-\mu l \cdot d(r,z,\theta,\phi)} \right)} \quad (8)$$

En el caso de que el evento de dispersión sea del tipo Rayleigh debemos reemplazar el segundo factor en la ecuación (6) por la expresión para la sección eficaz de dispersión Rayleigh y $S(Z,\theta)$ por el factor de forma atómico.

Haciendo un promedio sobre todas las direcciones posibles dentro del cono primario obtenemos la probabilidad conjunta media de que el fotón tenga un evento de dispersión y que tras este, salga dispersado en una dirección dentro del ángulo sólido denominado “cono de dispersión” con vértice en el punto (r',ϕ',z') .

$$PK_{nA2}(r,z) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_m(\phi, r, z)} P_{kn}(r,z,\theta,\phi) P_c(r,z,\theta,\phi) \cdot \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi} \quad (9)$$

Dado que los procesos de emisión y dispersión son dos procesos independientes, a los fines del cálculo el fotón dispersado puede suponerse como emitido desde el vértice del cono secundario que es donde ocurrió el evento de dispersión. Por lo tanto, situándonos ahora en el cono secundario o de dispersión la probabilidad conjunta de que el fotón luego de haber sido dispersado no tenga otro proceso en la muestra y sí lo tenga en el detector puede ser calculada usando la misma expresión dada en el caso A1 (ecuación (2)) pero reemplazando en este caso, (r,z,ϕ) por $(r'(r,z,\theta,\phi), z'(r,z,\theta,\phi), \phi')$ y realizando la integración en el sistema (x'',y'',z') . Reemplazando nos queda:

$$\begin{aligned}
\text{Psidet}'(r, z, \theta, \phi) &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\Gamma(\phi', r'(r, z, \theta, \phi), z'(z, \theta))} F1(r'(r, z, \theta, \phi), z'(r, z, \theta, \phi), \theta'', \phi') \cdot \sin(\theta'') d\theta'' d\phi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta 2(\phi', r'(r, z, \theta, \phi), z'(z, \theta))} \sin(\theta'') d\theta'' d\phi'} + \blacksquare \\
&= \frac{\int_0^{2\pi} \Phi(\theta 2(\phi', r'(r, z, \theta, \phi), z'(z, \theta)) - \theta 1(\phi', r'(r, z, \theta, \phi), z'(z, \theta))) \cdot \int_0^{\theta 2(\phi', r'(r, z, \theta, \phi), z'(z, \theta))} F2(r'(r, z, \theta, \phi), z'(r, z, \theta, \phi), \theta'', \phi') \cdot \sin(\theta'') d\theta'' d\phi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta 2(\phi', r'(r, z, \theta, \phi), z'(z, \theta))} \sin(\theta'') d\theta'' d\phi'}
\end{aligned}
\tag{10}$$

y dado que la diferencia entre el ángulo del fotón dispersado y el fotón incidente es pequeña podemos tomar aproximadamente $f(\theta) = \theta$ en este caso.

Integrando para todas las direcciones dentro del cono secundario tenemos el probabilidad media como:

$$\text{PsidetA2}(r, z) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta m(\phi, r, z)} \text{Psidet}'(r, z, \theta, \phi) \cdot \sin(\theta) d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta m(\phi, r, z)} \sin(\theta) d\theta d\phi}
\tag{11}$$

Por lo tanto, la probabilidad conjunta para el evento A2 puede escribirse como:

$$\text{PROA2}(r, z) = \text{Pp}(r, z) \cdot \text{PKnA2}(r, z) \cdot \text{PsidetA2}(r, z)$$

y la probabilidad media para toda la muestra:

$$\text{PROA2} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^b \text{PROA2}(r, z) \cdot r dr dz d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^b r dr dz d\phi}
\tag{12}$$

Consideremos ahora, el caso en que el fotón salió emitido en alguna dirección dentro de la región comprendida entre el cono primario y el ángulo sólido formado por el punto de emisión y subtendido por la cara superior de la muestra y que llamaremos “cono superior”.

Caso B) El fotón salió emitido en alguna dirección dentro de la región lateral comprendida entre el cono primario y el “cono superior” con evento de

dispersión en la muestra e interacción en el detector (ver Fig. 2).

La probabilidad de tal evento será:

$$\text{Plate}(r, z) = 1 - \text{Pp}(r, z) - \text{Pp}(r, L - z)$$

donde $\text{Pp}(r, L - z)$ es la probabilidad de que el fotón salga en alguna dirección del cono superior.

La probabilidad conjunta de que el fotón tenga un proceso de dispersión Compton en este caso y que luego, salga dispersado en una dirección dentro del ángulo sólido que llamamos como secundario se obtiene de manera análoga a como lo hicimos en el caso A2 por medio de la ecuación (9) pero tomando en (4) y (8)

$$d(r, \theta, \phi) = \frac{\sqrt{(x\lambda(\phi, r) - r)^2 + b^2 - x\lambda(\phi, r)^2}}{\sin(\theta)}
\tag{13}$$

La probabilidad promedio para todas las direcciones posibles dentro de la región será:

$$\text{PKnB}(r, z) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\theta \min(\phi, r, z)}^{\theta \max(\phi, r, z)} \text{Pknlate}(r, z, \theta, \phi) \cdot \text{Pcl}(r, z, \theta, \phi) \cdot \sin(\theta) d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_{\theta \min(\phi, r, z)}^{\theta \max(\phi, r, z)} \sin(\theta) d\theta d\phi}$$

donde:

$$\theta_{\max}(\phi, r, z) = \operatorname{atan} \left[\frac{\sqrt{(x\lambda(\phi, r) - r)^2 + b^2 - x\lambda(\phi, r)^2}}{(z - L)} \right] + \pi$$

$$\theta_{\min}(\phi, r, z) = \operatorname{atan} \left[\frac{\sqrt{(x\lambda(\phi, r) - r)^2 + b^2 - x\lambda(\phi, r)^2}}{z} \right]$$

y donde hemos tomado

$$f(\theta') = \theta'' + \frac{\pi}{4}$$

como el valor medio de la desviación angular.

Análogamente, la probabilidad conjunta $\operatorname{Psidetlat}(r, z, \theta, \phi)$ de que el fotón que salió emitido en una dirección de la región lateral y tuvo un evento de dispersión no tenga otro evento en la muestra pero sí en el detector se obtiene con la ecuación (10) pero con los valores de u_0 , r' , z' , obtenidos tomando $d(r, \theta, \phi)$ dado por (13).

Integrando sobre todas las variables angulares obtenemos la probabilidad media de este evento:

$$\operatorname{PsidetB}(r, z) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\theta_{\min}(\phi, r, z)}^{\theta_{\max}(\phi, r, z)} \operatorname{Psidetl}(r, z, \theta, \phi) \cdot \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_{\theta_{\min}(\phi, r, z)}^{\theta_{\max}(\phi, r, z)} \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi}$$

Por lo tanto, la probabilidad conjunta del evento B para un fotón emitido desde un punto (r, z) será:

$$\operatorname{PROB}(r, z) = \operatorname{Plate}(r, z) \cdot \operatorname{PKnB}(r, z) \cdot \operatorname{PsidetB}(r, z)$$

y la probabilidad media del evento B para todos los puntos de la muestra será:

$$\operatorname{PROB} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^b \operatorname{PROB}(r, z) \cdot r \, dr \, d\theta \, d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^b r \, dr \, d\theta \, d\phi} \quad (14)$$

Consideremos ahora el caso en el cual el fotón salió emitido dentro de la región definida antes como “cono superior”.

Caso C) Partícula emitida en dirección del “cono superior” con evento de dispersión en la muestra y posterior interacción en el detector. La probabilidad de que salga emitida en dirección del cono superior será:

$$\operatorname{Psup}(r, z) = \operatorname{Pp}(r, L - z)$$

por analogía con los dos casos anteriores la probabilidad de que luego de tener un evento de dispersión salga emitida en dirección del cono primario estará dado por la ecuación (9) pero tomando en (4), (7) y (8):

$$d(r, z, \theta, \phi) = ds(r, z, \theta) = \frac{L - z}{\cos(\theta)} \quad (15)$$

Nos queda:

$$\operatorname{PKnC}(r, z) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\theta_{\max}(\phi, r, z)}^{\pi} \operatorname{PknSup}(r, z, \theta, \phi) \cdot \operatorname{Psup}(r, z, \theta, \phi) \cdot \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_{\theta_{\max}(\phi, r, z)}^{\pi} \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi} \quad (16)$$

donde como dijimos $\operatorname{PknSup}(r, z, \theta, \phi)$ y $\operatorname{Psup}(r, z, \theta, \phi)$ se obtuvieron tomando en (4), (7) y (5) $d(r, z, \theta, \phi)$ dado por (15).

Análogamente, la probabilidad conjunta de que el fotón tras haber tenido un evento de dispersión no tenga otro proceso en la muestra y sí en el detector se obtiene reemplazando en las ecuaciones (10) y (11) r' y z' obtenidos tomando d dada por la ecuación (15). Nos queda:

$$\operatorname{PsidetC}(r, z) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_{\max}(\phi, r, L-z)} \operatorname{PsidetSup}(r, z, \theta, \phi) \cdot \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_{\max}(\phi, r, L-z)} \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi}$$

y donde hemos tomado una desviación angular media:

$$f(\theta') = \theta'' + \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, la probabilidad conjunta del evento C puede escribirse:

$$\text{PROC}(r, z) = \text{Psup}(r, z) \cdot \text{PKnC}(r, z) \cdot \text{PsidetC}(r, z)$$

y la probabilidad media del proceso para toda la muestra como:

$$\text{PROC} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^b \text{PROC}(r, z) \cdot r \, dr \, dz \, d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^b r \, dr \, dz \, d\phi} \quad (17)$$

Conociendo la probabilidad de cada proceso podemos ahora expresar la probabilidad media de que un fotón emitido desde un punto cualquiera de la muestra interactúe con el detector como:

$$\text{PRO} = \text{PROA1} + \text{PROA2} + \text{PROB} + \text{PROC} \quad (18)$$

III. RESULTADOS

Cada una de las integrales de la sección anterior fueron evaluadas numéricamente. Para disminuir el tiempo de cálculo computacional en algunos casos se reemplazaron las integrales por sumatorias. En otros casos, se hizo un ajuste bidimensional tomando un conjunto suficientemente grande de puntos igualmente dispersos en todo el dominio y con este ajuste se calculó el valor medio de la función. Los valores obtenidos se muestran en la tabla 1

El código MCNP5 se programó para simular un detector de NaI de 3''x 3'' pero los cálculos son aplicables a cualquier detector en especial a un detector de Ge.

TABLA 1: VALORES DE LA EFICIENCIA RELATIVA DE LA FUENTE, CALCULADOS Y SIMULADOS

Radio Muestra (cm)	Radio Detector (cm)	Eficiencia relativa de la fuente	
		Monte Carlo	Calculado
0.2	3.81	0.01042	0.01041
0.3	“	0.01547	0.01510
0.5	“	0.02472	0.02406
1	“	0.04642	0.04231
2.5	“	0.09429	0.091
3.8	“	0.1088	0.102

IV. CONCLUSIONES

Hemos podido resolver analíticamente con pocas aproximaciones un problema de interés para determinaciones de niveles de radiactividad en muestras gruesas.

Pensamos que los resultados se condicen de manera aceptable con los obtenidos por medio de la simulación usando el código MCNP5. Los cálculos, pese a no tomar en cuenta efectos de doble o triple dispersión pueden ser utilizados para validar otros programas de simulación similares.

V. REFERENCIAS

- 1 – Avnet Sood, R. Arthur Foster, Bryce J. Adams, and Morgan C. White Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B 213 (2004) 167-171
- 2 – R. Arthur Foster, Lawrence J. Cox, Richard F. Barrett, Thomas E. Booth, Judith F. Briesmeister, Forrest B. Brown, Jeffrey S. Bull, Gregg C. Geisler, Jhon T. Goorley, Russell D. Mosteller, Susan E. Post, Richard E. Prael, Elizabeth C. Selcow, Avneet Sood – Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B 213 (2004) 82-86
- 3 – M. Belluscio, R. De Leo, A. Pantaleo and A.Vox – Nuclear Instruments and Methods in Physics Research 118 (1974) 553 – 563