

VISUALIZACIÓN DE FLUJOS: DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD DEL MOVIMIENTO DE VARIABLES FÍSICAS A PARTIR DE LA EVOLUCIÓN DE LÍNEAS DE NIVEL

L. P. Thomas, B. M. Marino, M. S. Estela

IFAS, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Pinto 399, 7000 Tandil, Argentina
lthomas@exa.unicen.edu.ar

La evolución de un sistema constituido por dos o más fluidos miscibles involucra el mezclado de los mismos y no siempre cuenta con la presencia de interfases bien definidas. En estos casos se suelen definir líneas de nivel cuyas propiedades resultan de interés. Estudiamos aquí la determinación de la velocidad de corrientes de gravedad a partir de las líneas de nivel obtenidas de imágenes generadas en los experimentos de laboratorio aprovechando que la intensidad en la imagen está asociada con la densidad o la altura del fluido en movimiento, y la evolución del sistema físico con la variación temporal en la dirección perpendicular a las líneas de nivel. Éstas suelen tener formas irregulares que varían significativamente con el tiempo a diferencia de los contornos de objetos físicos con interfases bien definidas como gotas o burbujas. Las principales dificultades encontradas se resolvieron aplicando un algoritmo novedoso basado en los polinomios de Bezier racionales y métodos estadísticos sobre los puntos que conforman la línea de nivel.

The evolution of a system constituted by two or more miscible fluids involves the mixing of the fluids and the presence of interfaces that not always are well defined. In these cases it is usual to define contour lines whose properties are of interest. We study here how to determine the velocity of gravity currents fronts by using contour lines obtained from images generated in laboratory experiments in which the intensity in the image is associated with the density or the height of the moving fluid, and the physical system evolution is related with the time variation in the perpendicular direction to the contour lines. These lines usually are very irregular and vary significantly with time in contrast to the contours of physical objects with well defined interfaces as drops or bubbles. The main difficulties found were solved applying a novel algorithm based on the Bezier rational polynomial and statistics methods on the points that form the contour line.

1 INTRODUCCIÓN

La velocidad del cambio de las variables físicas que describen propiedades de la atmósfera, ríos y océanos, como temperatura, densidad, salinidad, etc., puede calcularse a partir del procesamiento de una secuencia de imágenes. En general esta velocidad está relacionada con la advección del flujo, es decir con su acción de arrastre, y entonces el cálculo de la misma se basa en métodos conocidos de identificación y seguimiento de algunas características directamente de la distribución de intensidad en las imágenes⁽¹⁻⁴⁾.

Si las imágenes de la secuencia de interés poseen zonas de diferente intensidad o color, entonces la identificación de tales zonas es relativamente simple. En caso contrario, y como ocurre muchas veces con el modelado en el laboratorio de diversos flujos naturales, se recurre a las técnicas basadas en el agregado de dos tipos de materiales: *activos*, cuando bajo ciertas circunstancias reaccionan químicamente o emitiendo fluorescencia, o *pasivos*, cuando sus propiedades no cambian durante el experimento. La inyección de tinta en flujos líquidos y de humo y vapor en flujos de aire⁽⁵⁾ son ejemplos comunes de trazadores pasivos usados en las experiencias de laboratorio. También suelen agregarse burbujas, gotas o partículas. Estos elementos tendrán la misma velocidad del fluido si su tamaño es suficientemente pequeño y su densidad es casi la del fluido, de modo que no existan diferencias de aceleraciones importantes respecto de aquellas partículas que componen el flujo. Por ejemplo, la

bien desarrollada técnica *particle tracking velocimetry* se basa en este concepto⁽⁶⁻⁸⁾.

El procesamiento digital incluye la identificación de características especiales de la distribución de intensidad de las imágenes, consideradas invariantes o que varían lentamente. Tal reconocimiento suele realizarse por medio del método de correlaciones cruzadas máximas (MCC)⁽²⁻⁴⁾. La distribución de intensidad de una subregión de la imagen se busca en una región mayor en la imagen siguiente calculando el coeficiente de correlación en todas las posiciones posibles. La ubicación del máximo de correlación cruzada calculado se identifica con la nueva localización de esa distribución de intensidades, y el vector desplazamiento entre las dos posiciones permite calcular la velocidad promedio durante el tiempo (usualmente pequeño) comprendido entre las dos imágenes. También pueden emplearse técnicas de suavizado espacial y/o temporal para facilitar el reconocimiento, y de localización subpixel para mejorar la precisión de los resultados^(9,10).

Otras situaciones físicas plantean la necesidad de conocer una velocidad que está indirectamente relacionada con la distribución de intensidad. Por ejemplo, la evolución de una corriente de gravedad de un fluido miscible en el interior de otro fluido miscible originalmente en reposo, involucra el mezclado de los mismos y la ausencia de interfases bien definidas. Además el movimiento del fluido no corresponde en general al movimiento de la corriente en su conjunto y, excepto para bordes específicos, resulta difícil calcular las

velocidades asociadas a la corriente a partir de una secuencia de imágenes del sistema. No obstante, se pueden definir líneas de nivel de intensidad estableciendo contornos cerrados cuyas propiedades y evolución resultan de interés.

En este trabajo presentamos un método para determinar la velocidad del frente de un flujo a partir de las líneas de nivel obtenidas de imágenes generadas en experimentos de laboratorio. La intensidad en la imagen está asociada con la densidad o la altura del fluido en movimiento, y la evolución del sistema físico se relaciona con la variación temporal en la dirección perpendicular a las líneas de nivel. Aquí, el método MCC y otros análogos no resultan aplicables.

A continuación se describe el algoritmo desarrollado para obtener la velocidad. Este consiste en someter una secuencia de imágenes generadas en un experimento de laboratorio a un proceso de determinación de contornos⁽⁹⁾, mediante el cual se extraen las coordenadas asociadas con los puntos del contorno. Luego se calcula la recta tangente de mejor ajuste en cada punto de la línea analizada empleando la información de los puntos vecinos, y de su perpendicular se determina la dirección del vector velocidad. La magnitud de la velocidad, por otra parte, se determina por el punto asociado en la imagen siguiente. Las líneas de nivel por lo general tienen formas irregulares que varían con el tiempo, a diferencia de los límites de objetos físicos como gotas o burbujas⁽¹¹⁾. Esto agrega dificultades adicionales que se resolvieron aplicando un nuevo algoritmo basado en los polinomios de Bezier racionales, el cual es presentado en la Sección 3.

La Sección 4 se dedica a mostrar algunos resultados, primero aplicando la metodología a contornos sencillos para verificar el algoritmo, y luego a líneas obtenidas de imágenes de experimentos que involucran corrientes de gravedad. Finalmente, las conclusiones son presentadas en la Sección 5.

2 DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD

Las líneas de nivel de interés en cada una de las imágenes están definidas por medio de las coordenadas (x_i, y_i) de un conjunto de puntos. Por lo tanto, en primer lugar se procede a la identificación y seguimiento de cada uno de los contornos u “objetos” en la secuencia de imágenes. Para ello, se recurre a algoritmos especiales⁽⁹⁾, ya que estos objetos cambian con el tiempo su forma, tamaño y el número de puntos que los definen. Luego se calcula la velocidad de cada región de las líneas de nivel correspondientes a cada imagen como mostramos a continuación.

La Figura 1 muestra un esquema general de los procesos aplicados desde la secuencia de imágenes hasta la visualización de los resultados. El orden de los procesos empleado en este trabajo responde a la forma de trabajar con el tipo de imágenes utilizadas en la Sección 4. Otros tipos de imágenes podrían requerir un orden diferente o pasos adicionales.

La Figura 2 muestra los puntos que conforman las líneas de nivel en dos instantes consecutivos. Se recorre el archivo de la primera línea tomando un punto A y los n puntos vecinos, de modo que A tenga la ubicación central

del conjunto, y se calcula la recta de mejor ajuste. El valor de n tiene que ser suficiente para reducir las irregularidades pero no excesivo para perder la información relevante.

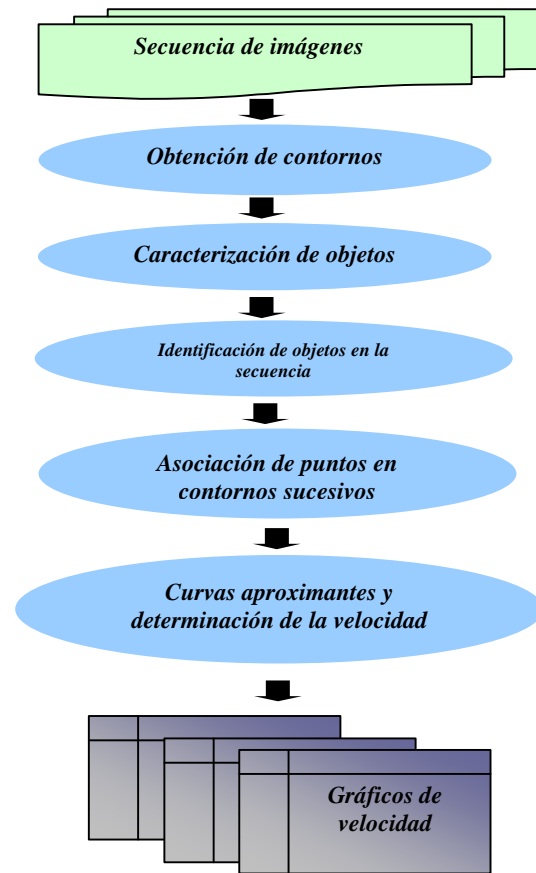


Figura 1: Esquema general de los procesos aplicados desde la secuencia de imágenes hasta la visualización de los resultados para la determinación de la velocidad.

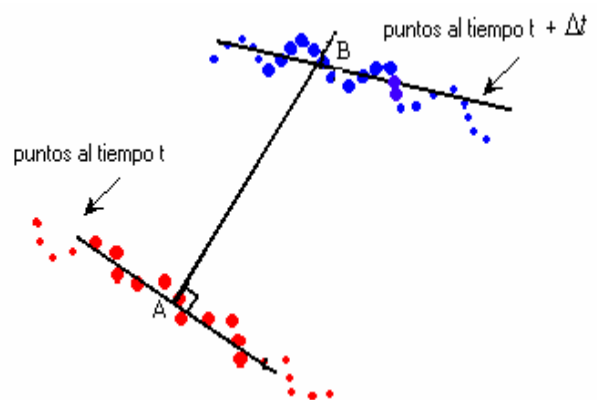


Figura 2: Puntos de una línea de nivel en dos tiempos consecutivos. La recta de mejor ajuste que pasa por A se calcula con los n puntos resaltados.

La recta perpendicular a la línea de nivel que pasa por el punto $A = (x_A, y_A)$ es:

$$y = p'_A x + b'_A, \quad (1)$$

donde $p'_A = -1/p_A$ y $b'_A = y_A - p'_A x_A$. La pendiente p_A de la recta tangente se determina por medio del método de

cuadrados mínimos. Para $p_A > 1$, su valor se calcula a partir de la recta $x = x(y)$ en vez de (1) para reducir los errores.

El siguiente paso consiste en determinar el punto B de la línea de nivel para $t + \Delta t$ asociado al punto A . La determinación de B es compleja debido a las irregularidades de las líneas de nivel y la presencia de otros puntos cercanos a la recta perpendicular en otras partes del contorno. La técnica que ofrece mejores resultados consiste en:

- ♣ Seleccionar un conjunto de puntos entre los vecinos del punto B hallado en el paso anterior.
- ♣ Encontrar los (10) puntos cuyas distancias d a la recta (1) sean las menores del conjunto.
- ♣ Entre éstos, elegir aquel de menor distancia al punto B anterior, ampliando el valor de d en forma paulatina.

Las irregularidades de los contornos pueden originar errores importantes en el cálculo del vector desplazamiento asociado a A . Por ejemplo, la determinación del punto B como extremo del vector desplazamiento con los requerimientos anteriores da lugar a variaciones importantes del módulo y la dirección de un punto al siguiente. En consecuencia, es fundamental efectuar un procedimiento de suavizado a la línea de nivel en el tiempo $t + \Delta t$.

Existen varias técnicas bien conocidas para suavizar una línea definida por una serie de puntos, tales como el promediado, los filtros de Fourier, etc. ⁽¹²⁾. Sin embargo, resulta más sencillo y rápido emplear la curva aproximante que realice directamente el suavizado buscado, eliminando de esta manera la necesidad de un proceso separado. Se encontró que los polinomios de Bézier modificados en una forma particular son útiles para este propósito.

Con la curva de mejor ajuste al contorno en $t + \Delta t$ se calculan los puntos D y E a partir de la intersección entre la recta perpendicular (1) con las curvas de mejor ajuste dadas por los polinomios de Bézier modificados aplicados a n puntos alrededor de A y B , respectivamente. Luego se determinan las variaciones $\Delta x = x_D - x_E$ y $\Delta y = y_D - y_E$. La velocidad resulta $\vec{v} = (v_x, v_y)$ donde $v_x = \Delta x / \Delta t$, $v_y = \Delta y / \Delta t$ y Δt es el tiempo transcurrido entre las capturas de las dos imágenes. Este procedimiento se realiza para cada uno de los puntos A que conforman las líneas de nivel en la imagen al tiempo t .

3 APROXIMACIÓN POLINÓMICA Y POLINOMIOS DE BEZIER

La construcción de la curva de aproximación de una nube de puntos se basa en la generación de una función continua y derivable que pase cerca de los puntos. Estas son diferentes de las curvas de interpolación que pasan por cada uno de los puntos, y reproducen las irregularidades de la nube de puntos. Así sus curvas aproximantes tienen la ventaja de agregar un suavizado de las irregularidades. La regresión polinómica, y en particular la conocida regresión lineal, es un ejemplo.

Considérese una nube de $n+1$ puntos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ con coordenadas $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. En la aproximación polinomial de grado $m = n$ la curva

aproximante es dada por:

$$y = \sum_{i=0}^m a_i x^i. \quad (2)$$

Para $m = n$ el polinomio pasa por todos los puntos y es una interpolación. Los coeficientes a_i surgen entonces de resolver $n+1$ ecuaciones algebraicas ⁽¹³⁾. La interpolación polinómica suele introducir oscilaciones importantes cuando $m > 3$.

Para $m < n$ los coeficientes a_i pueden obtenerse utilizando el método de cuadrados mínimos, el cual minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones en el eje y ⁽¹³⁾. Alternativamente, puede emplearse la regresión lineal en la forma $x = x(y)$. En este caso, los coeficientes a_i se hallan haciendo mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones en el eje x .

El polinomio de Bézier de grado n es ⁽¹²⁾:

$$P(s) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(s), \quad (3)$$

donde $P(s) = (x,y)$ es el punto dado por la curva aproximante para un dado valor del parámetro s ,

$B_{i,n}(s) = C(n,i) s^i (1-s)^{n-i}$ son funciones definidas en el intervalo $[0,1]$ y $C(n,i) = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Los $n+1$ puntos P_i que generan la curva son *puntos de control*, los cuales definen el polígono que incluye la curva aproximante y actúan como atractores de la curva. Las funciones $B_{i,n}(s)$ ponderan la importancia de cada vértice del polígono de control en la obtención de la curva. El principal inconveniente es que pueden producirse curvas con bucles cuando el número de puntos es elevado y el polígono definido no es convexo. Para solucionar este inconveniente suele recurrirse a la técnica de *spline*, i.e., a la construcción de la curva por composición de varias curvas elementales de Bézier consecutivas.

La curva de Bézier racional introduce factores de peso w_i que modifican la importancia de cada punto i :

$$P(s) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(s) P_i w_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(s) w_i}. \quad (4)$$

Cuando los factores de peso tienen un valor constante se obtienen las curvas de Bézier usuales (3). La modificación de los factores de peso agrega un grado de libertad adicional que puede ser usado en diferentes formas.

Sin embargo, cuando n es grande (por ejemplo $n+1 > 6$) la región central de la curva ($s \approx 0.5$) prácticamente no se ve afectada por los puntos iniciales o finales, y además los cálculos de $C(n,i)$ se complican innecesariamente. La escasa contribución de los puntos más alejados es difícil de contrarrestar incluso en los polinomios de Bézier racionales con factores de peso de varios órdenes de magnitud mayor en los extremos $s \approx 0$ y $s \approx 1$ respecto del que corresponde al centro del intervalo.

Debido a estos problemas, se ensayaron varias posibilidades para disminuir el grado del polinomio sin

perder la información que aportan todos y cada uno de los puntos. Una alternativa simple que dio resultados satisfactorios consiste en realizar un promediado entre m puntos consecutivos, y considerar el punto resultante como punto de control en el polinomio de Bézier. De esta forma, el grado del polinomio se reduce de n a $r = \frac{n+1}{m} - 1$ y el número de puntos de control a $r+1$.

En efecto, sean los puntos de control P_i^* dados por

$$P_i^* = \frac{1}{m} \sum_{k=i^*}^{(i+1)^*m-1} P_k, \quad (5)$$

donde los P_k son los puntos de la nube y m es un parámetro externo que define la cantidad de puntos a compactar. En este caso (4) puede expresarse como

$$P(s) = \frac{\sum_{i=0}^r B_{i,r}(s) P_i^* w_i}{\sum_{i=0}^r B_{i,r}(s) w_i}, \quad (6)$$

De esta manera, el grado r del polinomio de Bézier se asigna en forma independiente a n de acuerdo a las necesidades.

Luego de algunos pasos algebraicos, la función $P(s)$ de la Ec. (6) se transforma en:

$$P(s) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{1}{m} B_{q,r}(s) P_i w_q}{\sum_{i=0}^r B_{q,r}(s) w_q}, \quad (7)$$

donde q es la parte entera de i/m .

Comparando (7) y (4), resulta que $B_{q,r}/m$ cumple la función de $B_{i,n}$ en la fórmula de Bézier racional. De manera similar puede modificarse la fórmula básica de Bézier (3) a:

$$P(s) = \sum_{i=0}^n B_{q,r}^*(s) P_i \quad (8)$$

donde $B_{q,r}^*(s) = B_{i,n}(s)/m$.

Los cálculos se simplifican al disminuir el valor de m en el conjunto de $C(r,i)$. Además disminuye la cantidad de cálculos porque se utiliza el mismo coeficiente $B_{i,n}$ para varios puntos.

La Figura 3 muestra las curvas obtenidas para $n+1=40$ puntos al aplicar diferentes aproximaciones. Como puede observarse, las regresiones lineal y cuadrática son simplificaciones extremas para aproximar muchos puntos, especialmente cuando la nube de puntos se aparta considerablemente de una recta o parábola, respectivamente.

Las curvas de Bézier (6) y (7) siguen la nube de puntos suavizando las variaciones de posición entre puntos continuos. En particular, la curva de Bézier racional (7) empleando los factores de peso descriptos no difiere de la curva de Bézier (6). Las curvas de Bézier modificadas ⁽¹¹⁾, por su parte, dan como resultado una curva aproximante que tiene un suavizado mayor, aunque menor que el de las regresiones lineal y parabólica.

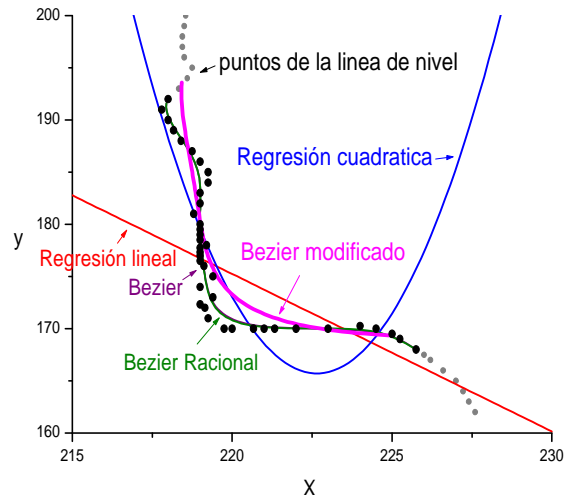


Figura 3: Curvas de aproximación calculadas con los puntos resaltados.

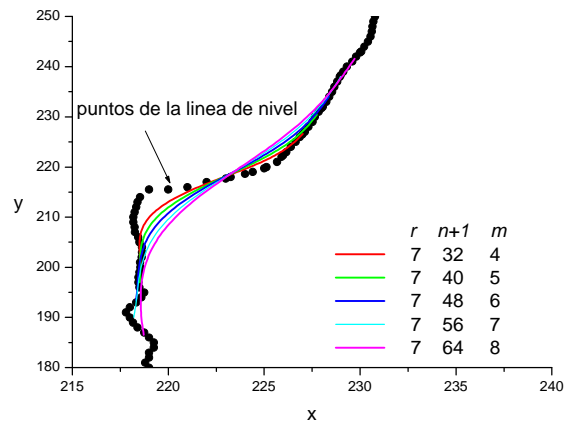


Figura 4: Curvas de Bézier modificados para diferentes m utilizando $r=7$ y diferentes números de puntos.

El parámetro m regula el suavizado de los polinomios de Bézier modificados. La Figura 4 muestra los resultados cuando se utiliza el polinomio de Bézier modificado ⁽¹¹⁾ manteniendo el grado $r=7$ del polinomio para aproximar el valor en un dado punto para diferentes valores de m . De esta manera se incorpora la información de puntos más alejados mientras se disminuye la importancia de los puntos intermedios aumentando $m = (n+1)/(r-1)$, y como resultado se obtiene un mayor suavizado de las variaciones de la nube de puntos.

4 RESULTADOS

Comprobamos el funcionamiento de los algoritmos aplicándolos a secuencias de imágenes que contienen contornos de prueba, con resultados predecibles. La Figura 5 muestra las líneas de nivel para un círculo que se deforma. La dirección de los vectores depende de la ubicación relativa del contorno en los dos tiempos. La velocidad es nula en los puntos donde los contornos coinciden para ambos tiempos, y es máxima para los puntos más alejados de ellos.

La Figura 6(a) muestra las líneas de nivel obtenidas de las imágenes, las que contienen pequeñas irregularidades generadas por el tamaño finito de los píxeles, incluso para objetos bien definidos y empleando algoritmos de precisión subpíxel como se hizo aquí ⁽⁹⁾. Estas pequeñas irregularidades son suavizadas adecuadamente por los polinomios de Bezier usados. La Figura 6(b) muestra el suavizado obtenido de la línea en un nivel determinado en dos tiempos por los puntos *E* y *D*, suprimiendo las irregularidades indeseadas de las líneas originales. De estas curvas suavizadas obtenemos el campo de velocidad con irregularidades mucho menos significativas, como ilustra la Figura 6(b).

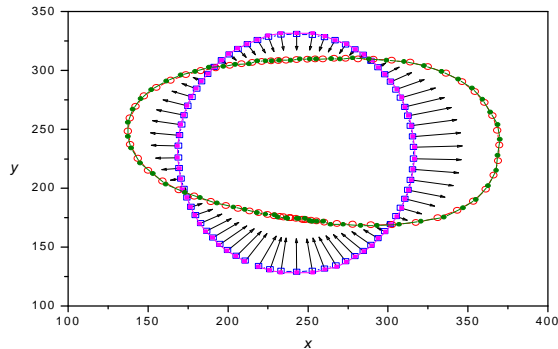


Figura 5: Velocidad para un círculo que se deforma. Los cuadrados magentas son algunos de los puntos (A) de la línea de nivel inicial; los cuadrados azules (E) resultan de la curva de aproximación. Los círculos verdes (B) pertenecen a la línea de nivel en un tiempo posterior, mientras los círculos rojos (D) a la curva de aproximación correspondiente.

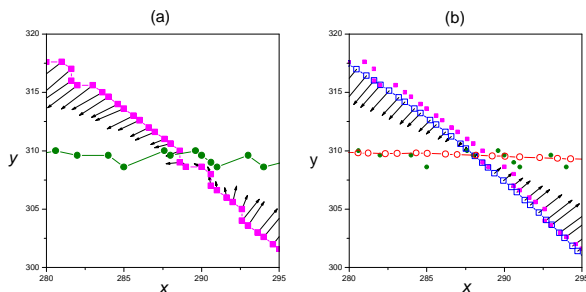


Figura 6: Ampliación de los contornos mostrados en la figura 5 mostrando los vectores de velocidad obtenidos a partir de los puntos: (a) A y B, y (b) D y E.

La evolución del frente de un flujo denso en el fondo de un canal de sección transversal rectangular lleno de un fluido más liviano inicialmente en reposo, se muestra en la Figura 7 para cuatro tiempos y los respectivos vectores velocidad para cinco tiempos en la Figura 8.

Estos resultados permiten obtener información relevante de la evolución del correspondiente sistema fluidodinámico. La parte mas avanzada de la corriente densa (que se mueve sobre el fondo hacia la derecha de la Figura 8) tiene una aceleración horizontal no uniforme con la profundidad. La componente horizontal de la

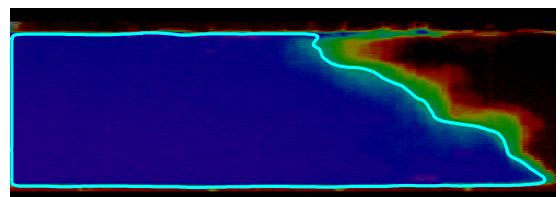
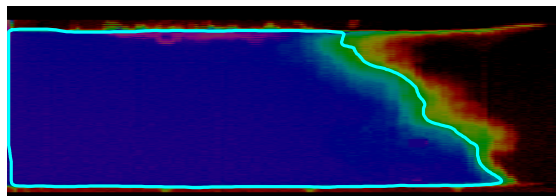
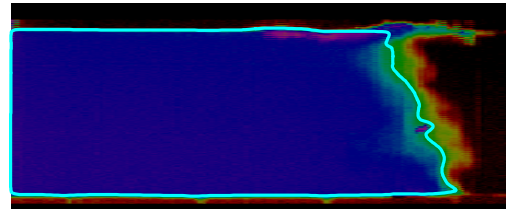
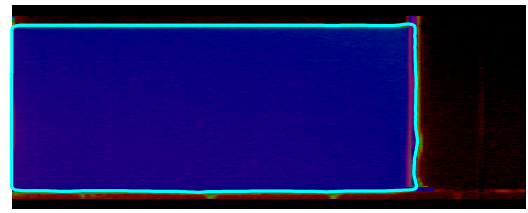


Figura 7: Líneas de nivel de valor intermedio (en color cian) para las imágenes obtenidas a $t = 0.33, 67, 84s$ luego de la liberación de un volumen finito de fluido denso en otro más liviano.

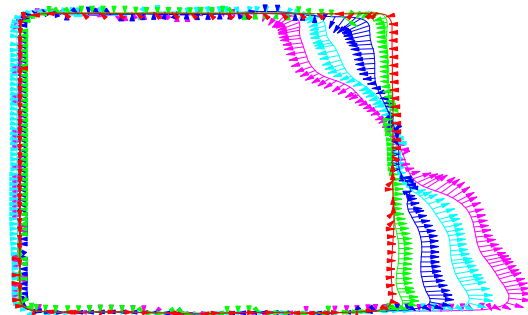


Figura 8. Distribución de velocidad correspondiente a las primeras líneas de nivel. Por claridad solo se representa un vector velocidad cada diez datos.

velocidad tiende al valor del régimen estacionario de propagación en el tiempo de captura de las últimas tres imágenes, aun cuando todavía no se ha formado la típica cabeza de la corriente de gravedad ⁽¹⁴⁾. La corriente del fluido menos denso (que se mueve debajo de la superficie libre hacia la izquierda de la Figura 8) tiene una aceleración menor y aún no ha alcanzado la velocidad estacionaria en los últimos contornos representados. Las líneas de nivel en profundidades intermedias coinciden, de modo que el fluido denso de la mitad superior del tanque pasa a la mitad inferior sin una modificación apreciable del contorno en esas profundidades. Esto, sin embargo, depende de la densidad relativa entre los fluidos y la forma de la sección transversal del canal ⁽¹⁵⁾. Cabe señalar que esta información sobre la velocidad en particular, y sobre otros parámetros de interés para la dinámica de los flujos estudiados, se obtiene por medio de experiencias que involucran el agregado de colorantes. Las mismas son sencillas y requieren menos equipamiento y programas y procesamientos mas simples que cuando se emplean las diagnosticas para la determinación de la velocidad basadas en el seguimiento de partículas trazadoras ^(7,8).

5 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado una técnica para obtener el campo de velocidad de una corriente a partir de líneas de nivel obtenidas de imágenes sucesivas. Esto permite cuantificar la velocidad con que se mueven las diferentes zonas de una corriente cuyo movimiento no coincide con el de las partículas de fluido. Los mayores inconvenientes están relacionados con las irregularidades de los contornos, ya que la velocidad depende de sus variaciones. Estas dificultades se resolvieron aplicando algoritmos matemáticos estadísticos de los puntos que conforman la línea de nivel y desarrollando una modificación a los polinomios de Bézier que permite independizar el grado r del polinomio del número $n+1$ de puntos de control. Disminuyendo r se obtiene una curva más suave y fácil de calcular que con las formulas usuales ($n = r$), lo cual permite eliminar procesos de suavizados independientes anteriores o posteriores a la aproximación de la nube de puntos.

De esta manera, surgió un algoritmo sencillo y robusto para calcular la velocidad de las líneas de nivel, y por ende el campo de velocidad en la interfase entre dos fluidos miscibles en movimiento. Si bien en este trabajo las imágenes son obtenidas de experimentos específicos que involucran corrientes de gravedad, las ideas y algoritmos aquí desarrollados pueden aplicarse para la determinación de la velocidad en un amplio rango de problemas.

REFERENCIAS

1. Bradley, A., Kruger, A., Meselhe E., Muste, M. Water Resources Research 38(12), 1315-1329 (2002).
2. Bowen, M., Richardson, K., Pinkerton, M., Korpeta, A., Uddstrom, M. Water & Atmosphere 12(4), 26-27 (2004).
3. Emery, W., Matthews, D., Crocker, R., Baldwin, D. Surface current mapping off California with radiometry and

- altimetry, Guayana (Concepc.) Vol. 68(2), 174-179 Supl. TI Proc Concepción (2004).
4. Simpson, J., Gobat, J. Robust Velocity Estimates, Stream Functions, and Simulated Lagrangian Drifters, en Sequential Spacecraft Data, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 32 (3), 479-493 (1994).
5. Merzkirch, W. "Flow visualization", New York, Academic Press (1987).
6. Adrian, R.J. Ann. Rev. Fluid Mech. 23, 261-304 (1991).
7. Thomas, L.P., Dalziel, S.B., Marino, B.M. Experiments in Fluids 34, 708-716 (2003).
8. Thomas, L.P., Dalziel, S.B., Marino, B.M. ANALES AFA 12, 103-106 (2000).
9. Estela, M.S., Thomas, L.P., Marino, B.M. Seguimiento de líneas de nivel utilizando técnicas de reconocimiento de patrones, ANALES 34° JAIIO y 6° Simposio Argentino de Tecnología, (2005).
10. Estela, M.S., Thomas, L.P., Marino, B.M. Procesamiento de Imágenes para la Medición de Espesores de Capas de Líquidos, ANALES 33° JAIIO, Simposio Argentino de Tecnología (2004).
11. Kowalewski, T., Paklezbab, J., Cybulski, A. Particle image velocimetry for vapour bubble growth analysis, Proceedings 8th International Conference Laser Anemometry Advanced and Applications, Roma (1999).
12. Farin, G. "Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design". Academic Press, San Diego (1988).
13. K Spiegel, M., Hernandez Heredero, R., Ragun, L. "Estadística", 2° Ed., Mc Graw Hill, Buenos Aires (1998).
14. Simpson, J. E. "Gravity currents in the environment and in the laboratory", Cambridge University Press, Reino Unido, (1997).
15. Thomas, L.P., Marino, B.M. ANALES AFA 16, 108-112 (2004).