

# Leyes de escala para corrientes rectilíneas apoyadas sobre o colgadas de un plano inclinado

Andrés Jorge Tanasijczuk,<sup>1</sup> Carlos Alberto Perazzo,<sup>1,2,\*</sup> y Julio Gratton<sup>3,2,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Universidad Favaloro, Solís 453, 1078 Buenos Aires.

<sup>2</sup>Investigador del CONICET

<sup>3</sup>INFIP-CONICET, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
UBA, Ciudad Universitaria, Pab. I, 1428 Buenos Aires.

(Dated: 23 de octubre de 2006)

En trabajos anteriores se estudiaron corrientes rectilíneas apoyadas sobre un plano inclinado o que cuelgan del mismo. En el presente trabajo obtenemos leyes de escala para las propiedades globales de estas corrientes, que valen en los límites de caudales volumétricos pequeños y grandes. En este último caso consideramos sólo corrientes apoyadas dado que las colgantes son inestables. Comparamos las leyes de escala con los resultados exactos obtenidos numéricamente.

In previous works we studied rectilinear currents over an inclined plane or hanging below it. In this paper we derive the appropriate scaling laws for the global properties of these currents, in the limits of very small and very large volumetric flows. In the last case we consider only sessile currents, since hanging currents are unstable. We compare the scaling laws with the exact numerical results.

## I. INTRODUCCIÓN

Recientemente hemos investigado soluciones de la ecuación de Navier-Stokes que describen flujos viscosocapilares paralelos sobre un plano inclinado<sup>1-3</sup> debido a su interés para fenómenos naturales y procesos industriales. A partir del trabajo pionero de Towell y Rothfeld<sup>4</sup> estos flujos han sido investigados por varios autores dentro de la aproximación de lubricación. Las soluciones dependen de la forma de la superficie libre, que es un menisco cilíndrico determinado por el equilibrio entre la gravedad y la tensión superficial<sup>5</sup>, y por la mojabilidad de la superficie de apoyo. Aquí obtenemos leyes de escala para algunas propiedades generales de este tipo de corrientes cuando el caudal es muy pequeño o muy grande. Estas relaciones se calcularon analíticamente y se comparan con los resultados numéricos exactos.

La geometría del problema y la notación empleada se describen en otro trabajo<sup>6</sup>. Usamos las variables  $h = H/\lambda$  e  $y = Y/\lambda$  donde  $\lambda = \sqrt{\gamma/\rho g |\cos \alpha|}$  es la longitud capilar ( $\gamma$  es la tensión superficial,  $\rho$  es la densidad del líquido y  $g$  es la gravedad), e introducimos  $\sigma = +1$  para corrientes apoyadas y  $\sigma = -1$  para corrientes colgantes. La ecuación de la superficie libre es entonces

$$\sigma h' = \left[ \frac{h''}{(1+h'^2)^{3/2}} \right]' \quad (1)$$

Llamaremos  $\kappa$  a la curvatura adimensional en el vértice (definido como el punto donde  $h' = 0$ ), en el cual fijamos  $h = 0$  e  $y = 0$ . La solución de (1) se puede expresar entonces en forma paramétrica en términos de  $\varphi = \text{sign}(\kappa) \arctan h'$ :

$$\begin{aligned} h &= -\sigma \kappa + \text{sign}(\sigma \kappa) \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma(1 - \cos \varphi)}, \\ y &= \text{sign}(\sigma \kappa) \left[ -\kappa \text{E}\left(\frac{\varphi}{2} \middle| -\frac{4\sigma}{\kappa^2}\right) + \left(\kappa + \frac{2\sigma}{\kappa}\right) \text{F}\left(\frac{\varphi}{2} \middle| -\frac{4\sigma}{\kappa^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\text{F}\left(\frac{\varphi}{2} \middle| -\frac{4\sigma}{\kappa^2}\right)$  y  $\text{E}\left(\frac{\varphi}{2} \middle| -\frac{4\sigma}{\kappa^2}\right)$  son las integrales elípticas de primera y segunda especie. Asimismo  $\varphi \in [0, \pi]$  si  $\sigma =$

1. Para  $\sigma = -1$ ,  $\varphi \in [0, \varphi_i]$  donde  $\varphi_i = 2 \arcsen(|\kappa|/2)$  es el valor de  $\varphi$  en el punto de inflexión de la solución, cuyas coordenadas son  $h_i = \kappa$ ,  $y_i = y(\varphi_i)$ . La ecuación (2) describe la solución para  $0 \leq |h| \leq |h_i|$ . La solución para  $|h_i| \leq |h| \leq 2|h_i|$  es  $2h_i - h$ ,  $2y_i - y$ , donde  $h$  e  $y$  se obtienen de (2).

La ecuación (2) no depende del perfil transversal de la superficie de apoyo y describe meniscos tanto apoyados como colgantes.

Definiendo  $u = U\mu/\lambda^2 \rho g \text{sen} \alpha$ , donde  $\mu$  es la viscosidad, la ecuación del campo de velocidad es

$$\partial_{yy} u + \partial_{zz} u = -1, \quad (3)$$

y en general se debe integrar numéricamente.

En lo que sigue consideraremos el caso en que la superficie de apoyo es plana y que  $\theta_l = \theta_r = \theta$ . Nos interesan las propiedades globales de la corriente, más precisamente el área adimensional  $a$  de la sección transversal, el ancho adimensional  $d$  de la región mojada (que puede diferir del ancho de la corriente) y el caudal adimensional  $q = \int u da$ . Otras propiedades globales se pueden obtener a partir de las mencionadas.

Las propiedades geométricas se obtienen fácilmente a partir de las ecuaciones (2). Para corrientes apoyadas y corrientes colgantes con  $0 \leq h \leq h_i$  se obtiene  $d = 2y(\varphi = \theta)$ . Para corrientes colgantes tales que  $h_i \leq h \leq 2h_i$  resulta  $d = 2[2y_i - y(\varphi = \theta)]$ .

Por otra parte para obtener  $q$  se necesita conocer el campo de velocidad  $u$  que se debe calcular numéricamente. Sin embargo la expresión de  $u$  toma una forma muy sencilla cuando la corriente es muy chata y casi paralela al plano, pues en ese caso el perfil de  $u$  es parabólico porque  $u_{yy}$  se puede desprestigiar en la (3) excepto en una región muy pequeña cerca de cada línea de contacto.

## II. EL LÍMITE DE PEQUEÑO CAUDAL

Para corrientes apoyadas y colgantes con  $\theta \neq 0$  se puede mostrar que conservando sólo los términos más importantes de (2) en el límite  $|\kappa| \rightarrow \infty$  se obtienen las siguientes fórmulas:

$$a = \frac{\theta - \text{sen}\theta \cos\theta}{\kappa^2}, \quad d = \frac{2 \text{sen}\theta}{|\kappa|}, \quad q = \frac{f_q(\theta)}{\kappa^4}. \quad (4)$$

Para conocer  $f_q$  hace falta calcular  $u$ .

Por razones prácticas conviene expresar las propiedades de las corrientes en función de  $q$ . A partir de (4) podemos escribir  $a = g_a(\theta)q^{1/2}$ ,  $d = g_d(\theta)q^{1/4}$ . Nótese que  $|\kappa| \rightarrow \infty$  implica  $q \rightarrow 0$ , de modo que estas relaciones valen en ese límite. Asimismo estas leyes de escala valen para  $\theta \neq 0$ . En particular, para  $\theta$  pequeño (tal que en todas partes  $|h'| \ll 1$ ) podemos usar la aproximación de lubricación para obtener:

$$g_a = \left(\frac{35}{3\theta}\right)^{1/2}, \quad g_d = \left(\frac{420}{\theta^3}\right)^{1/4}, \quad f_q = \frac{4\theta^7}{105}. \quad (5)$$

Estas fórmulas valen tanto para corriente apoyada como colgante. En efecto en el límite que estamos considerando  $h(y)$  es un arco de círculo lo que implica que  $q \rightarrow 0$  corresponde al caso en que la gravedad es despreciable frente a la tensión superficial. Por consiguiente en este límite no puede haber diferencia entre una corriente apoyada y una colgante.

Para corrientes colgantes con  $\theta = 0$  el límite  $q \rightarrow 0$  implica  $\kappa \rightarrow 0$ . En este caso se obtiene  $a = 2\pi\kappa$ ,  $d = 2\pi$ ,  $q = f_q\kappa^3$ . De aquí resulta  $a = g_a q^{1/3}$ . Como antes  $f_q$  depende del campo de velocidad.

El límite  $\kappa \rightarrow 0$  implica que  $|h'| \ll 1$  en todas partes, de modo que podemos usar la aproximación de lubricación para obtener  $g_a = (24\pi^2/5)^{1/3}$ ,  $f_q = 5\pi/3$ .

Podemos comparar estas expresiones analíticas con los resultados numéricos exactos integrando (3) sujeta a las condiciones de contorno adecuadas con el método de elementos finitos. En la figura 1 (a) se muestra  $q\kappa^4/f_q$  para  $\theta \neq 0$  y  $q/f_q\kappa^3$  para  $\theta = 0$  en función de  $\kappa$ . En la figura 1 (b) y (c) se aprecian también gráficos de  $a/g_a q^{1/2}$  y  $d/g_d q^{1/4}$  para  $\theta \neq 0$ , y  $a/g_a q^{1/3}$ ,  $d/2\pi$  para  $\theta = 0$  en función de  $q$ . Notar que esas cantidades tienden a un valor constante (que depende de  $\theta$ ) cuando  $q \rightarrow 0$ , de acuerdo con nuestras leyes de escala. De estos gráficos se puede observar cuán buena es la aproximación de lubricación que se usó para calcular las funciones  $g$ . Cuánto más los valores constantes antes mencionados se aproximan a la unidad, tanto más precisa es la aproximación de lubricación.

## III. EL LÍMITE DE CAUDAL GRANDE

Para caudales grandes consideramos sólo corrientes apoyadas porque las condiciones de estabilidad de las corrientes colgantes<sup>6</sup> imponen límites superiores a  $q$ . Tenemos entonces  $\theta \neq 0$  y el límite  $q \rightarrow \infty$  corresponde a

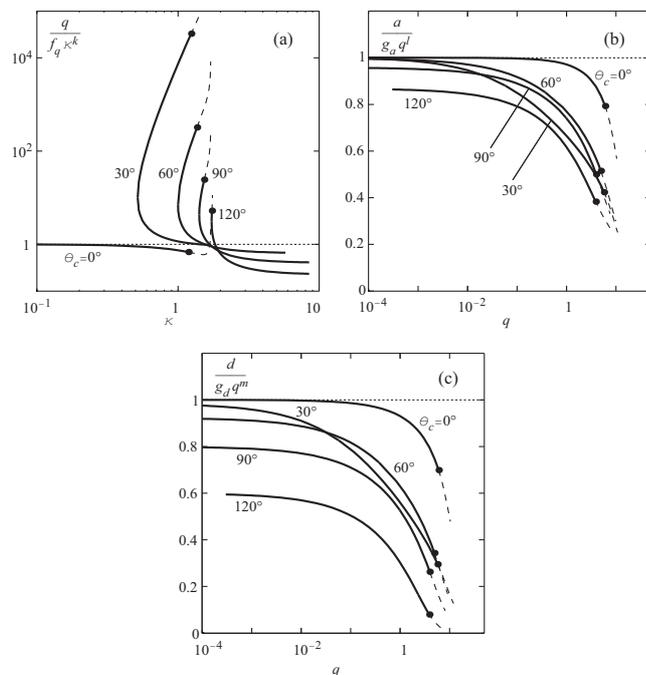


Figura 1: Leyes de escala para corrientes de pequeño caudal. (a)  $q/f_q\kappa^k$  vs.  $\kappa$  ( $k = -4$  para  $\theta \neq 0$ ,  $k = 3$  para  $\theta = 0$ ); (b)  $a/g_a q^l$  vs.  $q$  ( $l = 1/2$  para  $\theta \neq 0$ ,  $l = 1/3$  para  $\theta = 0$ ); (c)  $d/g_a q^m$  vs.  $q$  ( $m = 1/4$  para  $\theta \neq 0$ ,  $m = 0$  para  $\theta = 0$ )

$\kappa \rightarrow 0^-$ . Tomando este límite en (2) y en (3) y conservando los términos más significativos obtenemos las siguientes relaciones:

$$a = 4 \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)[f_a - \ln(-\kappa)], \quad d = 2[f_d - \ln(-\kappa)] \quad (6)$$

$$q = f_{q,1} - f_{q,2} \ln(-\kappa).$$

Las funciones  $f$  que determinan las propiedades geométricas de la corriente son

$$f_a = -2 + 3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \ln\left[8 \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\right], \quad (7)$$

$$f_d = -2 + 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \ln\left[8 \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\right].$$

Para calcular  $f_{q,1}$  y  $f_{q,2}$  usamos el perfil parabólico del campo de velocidad que se obtiene integrando (3) en la que se ha despreciado  $u_{yy}$ . Esta aproximación debe ser correcta porque cuando  $\kappa$  es muy pequeño las corrientes son muy chatas y anchas. Se puede encontrar así

$$f_{q,1} = \frac{2}{3}\left\{\theta + 3 \text{sen}\theta \cos\theta - 8 \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\} + f_d f_{q,2}, \quad (8)$$

$$f_{q,2} = \frac{16}{3} \text{sen}^3\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Escribiendo  $a$  y  $d$  en función de  $q$  obtenemos

$$a = g_{a,1} + g_{a,2} q, \quad d = g_{d,1} + g_{d,2} q, \quad (9)$$

donde

$$g_{a,1} = 4 \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)(f_a - f_{q,1}/f_{q,2}), \quad g_{a,2} = 4 \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)/f_{q,2},$$

$$g_{d,1} = 2(f_d - f_{q,1}/f_{q,2}), \quad g_{d,2} = 2/f_{q,2}. \quad (10)$$

Hemos verificado que estas leyes de escala describen con muy buena aproximación el comportamiento de las soluciones exactas obtenidas numéricamente para  $q$  grande. Se omiten detalles para abreviar

### Agradecimientos

Agradecemos los subsidios PIP 5377 del CONICET, X031 de la UBA y PICTR 2002-00094 de la ANPCYT.

---

\* Correo electrónico: [perazzo@favaloro.edu.ar](mailto:perazzo@favaloro.edu.ar)

\*\* Correo electrónico: [jgratton@tinfiplfp.uba.ar](mailto:jgratton@tinfiplfp.uba.ar)

<sup>1</sup> C.A. Perazzo y J. Gratton, *J. Fluid Mech.* **507**, 367–379, 2004.

<sup>2</sup> C.A. Perazzo y J. Gratton, en R. Gratton, J.A. Diez y A.G. González, eds., *Proc. VIII Meeting on Recent Advances in Physics de Fluids and its Applications*, p. 41–44. UNICEN, 2004.

<sup>3</sup> C.A. Perazzo y J. Gratton, *Anales AFA* **15**, 131–135, 2004.

<sup>4</sup> G.D. Towell y L.B. Rothfeld, *AIChE J.* **12**, 972–980, 1966.

<sup>5</sup> F. Bashforth y J.C. Adams, *An Attempt to Test the Theory of Capillary Action*, Cambridge University Press and Deighton, Bell & Co, 1892.

<sup>6</sup> A.J. Tanasijczuk, C.A. Perazzo y J. Gratton, Propiedades globales de corrientes rectilíneas que cuelgan de un plano inclinado, *Anales AFA*, este volumen.