

# Propiedades globales de corrientes rectilíneas que cuelgan de un plano inclinado

Andrés Jorge Tanasijczuk,<sup>1</sup> Carlos Alberto Perazzo,<sup>1,2,\*</sup> y Julio Gratton<sup>3,2,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Universidad Favaloro, Solís 453, 1078 Buenos Aires.

<sup>2</sup>Investigador del CONICET

<sup>3</sup>INFIP-CONICET, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
UBA, Ciudad Universitaria, Pab. I, 1428 Buenos Aires.

(Dated: 10 de mayo de 2007)

Se estudian las propiedades globales de corrientes rectilíneas que cuelgan de un plano inclinado. Se muestra como construir la solución de la ecuación de Young-Laplace que describe la superficie libre, para cualquier perfil transversal del sustrato y para cualquier valor de los ángulos de contacto. El campo de velocidad se obtiene integrando numéricamente una ecuación de Poisson. Se lleva a cabo un estudio sistemático de las corrientes colgantes, se calculan algunas de sus propiedades globales y se discute su estabilidad.

We investigate the global properties of rectilinear currents hanging below an inclined plane. We show how to find the solution of the Young-Laplace equation that describes the free surface, for any transversal profile of the substrate and for any value of the contact angles. The velocity field is obtained by numerical integration of a Poisson equation. We perform a systematic study of these currents, we calculate some of their global properties and we discuss their stability.

## I. INTRODUCCIÓN

Es frecuente encontrar corrientes que fluyen sobre o debajo de superficies inclinadas. La gravedad y la viscosidad determinan el campo de velocidad, mientras que la forma de la superficie libre depende del equilibrio entre la tensión superficial y la gravedad y de los ángulos de contacto. La investigación pionera sobre estas corrientes se debe a Towell y Rothfeld<sup>1</sup> y fue extendida por muchos autores. En todos esos trabajos se supone que la pendiente de la superficie libre es pequeña, lo que requiere que la razón de aspecto y los ángulos de contacto no sean muy grandes. Muchas veces estas condiciones no se cumplen y dichos resultados teóricos son de dudosa validez. Para muchas aplicaciones se precisan soluciones exactas, pero aún faltan estudios sistemáticos de las mismas. Aquí extendemos nuestros trabajos<sup>2-4</sup> a corrientes por encima o por debajo de superficies inclinadas cuyo perfil transversal es arbitrario e incluyen variaciones de la mojabilidad. Damos algunos ejemplos de corrientes apoyadas y colgantes y llevamos a cabo un estudio sistemático de las corrientes que cuelgan de un plano inclinado.

La teoría de los meniscos cilíndricos es bien conocida<sup>1,5</sup>. Aquí consideramos una corriente estacionaria sobre o debajo de un sustrato cilíndrico rígido cuya pendiente es  $\alpha$ . La coordenada  $X$  está a lo largo del cilindro y crece hacia abajo y la coordenada  $Y$  es horizontal (figura 1). La forma del sustrato es  $Z = S(Y)$ , la superficie libre es  $Z = H(Y)$ , la tensión superficial es  $\gamma$ , la densidad del líquido es  $\rho$ ,  $g$  es la gravedad, los ángulos de contacto a izquierda y derecha son  $\theta_l$  y  $\theta_r$  y el campo de velocidad es  $\mathbf{U} = U(Y, Z)\hat{\mathbf{X}}$ . Introduciendo  $\sigma = +1$  para corrientes apoyadas ( $0 \leq \alpha < \pi/2$ ) y  $\sigma = -1$  para corrientes colgantes ( $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ ), la longitud capilar  $\lambda = \sqrt{\gamma/\rho g |\cos \alpha|}$ , las variables adimensionales  $h = H/\lambda$ ,  $y = Y/\lambda$  y la curvatura adimensional en el vértice  $\kappa$ , e indicando con primas las derivadas respecto

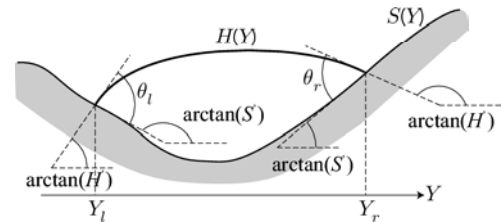


Figura 1: Geometría del problema.

de  $y$ , la ecuación para  $h$  es

$$\sigma h' = \left[ \frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} \right]', \quad (1)$$

y sus soluciones se pueden expresar en forma cerrada usando integrales elípticas<sup>1-6</sup>.

Para calcular el campo de velocidad ponemos  $u = U\mu/\lambda^2\rho g \sin\alpha$  ( $\mu$  es la viscosidad) y escribimos la ecuación de movimiento como

$$\partial_{yy}u + \partial_{zz}u = -1, \quad (2)$$

sujeta a las condiciones de contorno apropiadas. Salvo un caso excepcional<sup>4</sup>  $u(y, z)$  se debe calcular numéricamente. En la figura 2 mostramos dos corrientes apoyadas que escurren en canales en forma de cuña y tres corrientes que cuelgan debajo de un plano.

## II. CORRIENTES QUE CUELGAN DE UN PLANO

Consideramos ahora corrientes que cuelgan de un plano y con  $\theta_l = \theta_r = \theta$ . Nos interesan el área adimensional  $a$  de la sección transversal, el espesor adimensional

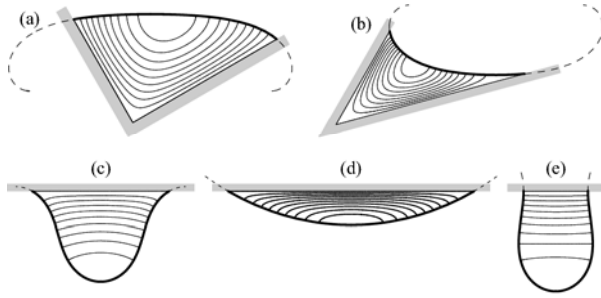


Figura 2: Corrientes apoyadas y colgantes. Las líneas delgadas son contornos de isovelicidad. (a)  $\kappa = -0.05$ ,  $\theta_l = \theta_r = 70^\circ$ ; (b)  $\kappa = 0.1$ ,  $\theta_l = 40^\circ$ ,  $\theta_r = 10^\circ$ ; (c) y (d)  $\kappa = 1.2$ ,  $\theta_l = \theta_r = 30^\circ$ ; (e)  $\kappa = 1.51$ ,  $\theta_l = \theta_r = 90^\circ$ .

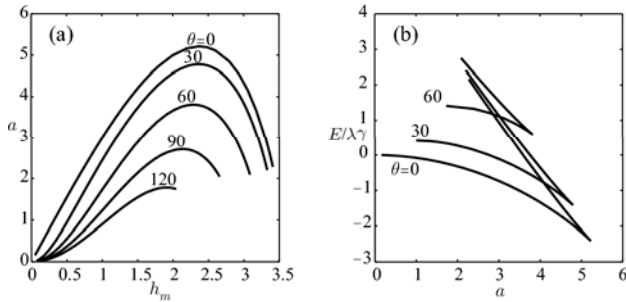


Figura 3: (a): área vs. altura; (b): energía vs. área.

$h_m = \max(h)$ , el ancho adimensional  $d$  de la región mojada y el caudal adimensional  $q = \int u da$ . Cualquier otra magnitud de interés se puede obtener en términos de las anteriores.

Antes de considerar las propiedades que dependen de la velocidad conviene discutir la estabilidad del menisco. Una corriente colgante puede ser inestable debido a perturbaciones que: a) preservan la simetría de traslación, y b) tienden a romper esta simetría produciendo una serie de gotas colgantes o la eyección y caída de gotas.

La estabilidad ante perturbaciones del primer tipo no depende del campo de velocidad. El gráfico de  $a(h_m)$  para  $\theta$  fijo (figura 3 (a)) muestra un máximo debajo del cual hay dos meniscos con el mismo  $a$  pero diferente  $h_m$ . Se puede mostrar<sup>7</sup> que el menisco con el mayor  $h_m$  corresponde a un máximo de la energía potencial  $E$  por unidad de longitud del menisco (ver figura 3 (b)) y por lo tanto es inestable. El máximo  $a$  para las configuraciones estables corresponde al máximo caudal  $q_m$  que se puede alcanzar para ese  $\theta$  (siempre que no se presente otra inestabilidad). En la figura 4 mostramos  $q_m(\theta)$ . Notar que  $q_m$  depende débilmente de  $\theta$ : en efecto  $3.65 < q_m < 6$  en todo el intervalo  $0^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$ . De aquí en más consideraremos solamente las configuraciones con  $q \in [0, q_m]$ .

Para integrar (2) empleamos elementos finitos. En la figura 2 mostramos resultados típicos. Los mayores gradientes de velocidad ocurren donde las curvas de isove-

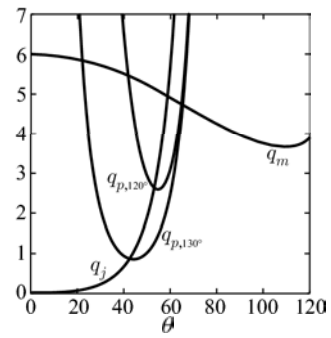


Figura 4: Límites de estabilidad para corrientes colgantes:  $q_m$  es el límite basado en el criterio de Pitts<sup>7</sup> y  $q_j$  y  $q_{p,\alpha}$  están dados en las ecuaciones (5) y (6), respectivamente.

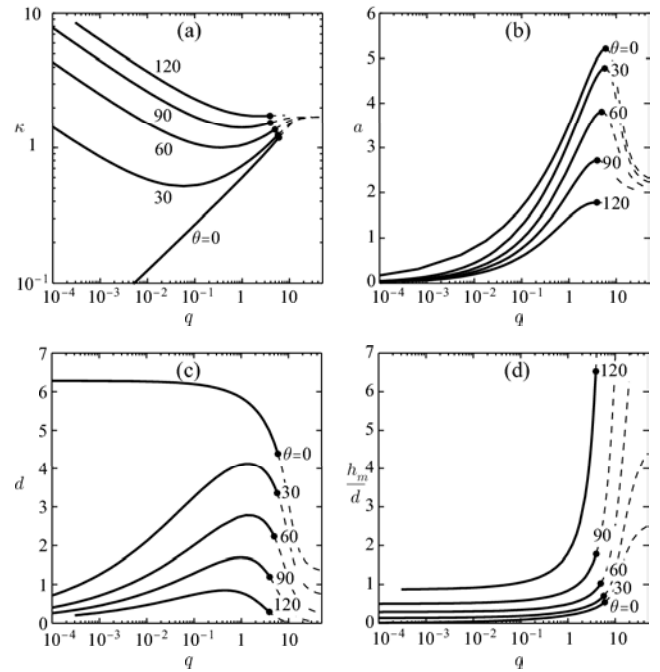


Figura 5: Propiedades de corrientes colgantes. (a), (b), (c), (d): curvatura en el vértice, área de la sección transversal, ancho y razón de aspecto  $h_m/d$  de la corriente en función de  $q$ . Un punto indica  $q_m$ .

locidad son casi paralelas al sustrato, lo que ocurre cerca del mismo y no muy cerca de la superficie libre.

Resolvimos el problema para  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  y  $120^\circ$ . Para cada  $\theta$  calculamos soluciones para varios  $\kappa$  a fin de cubrir el intervalo  $10^{-4} \leq q \leq q_m$ . Los resultados se muestran en la figura 5.

Por medio de la figura 5 se pueden obtener las propiedades de cualquier corriente colgante porque las dependencias en  $\gamma, \rho, \mu, g$  y  $\alpha$  están implícitas en las escalas de longitud y velocidad.

Para comparar estos resultados con los resultados de mediciones conviene expresar las propiedades de la co-

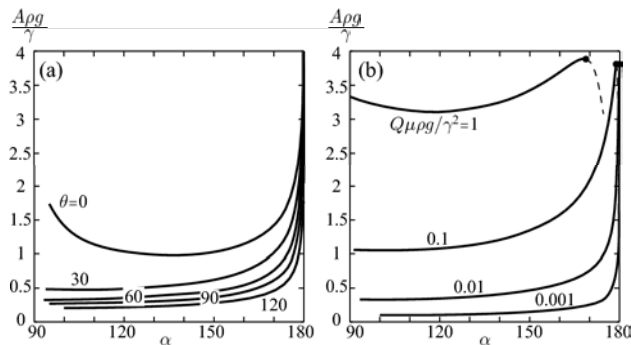


Figura 6: Área vs.  $\alpha$ : (a) para  $Q\mu\rho g/\gamma^2 = 0.01$  y diferentes  $\theta$ ; (b) para  $\theta = 60^\circ$  y diferentes  $Q$ .

riente en función de  $\alpha$  (para  $\theta$  fijo) para un caudal dimensional  $Q$  fijo, o viceversa. Éstas se pueden obtener a partir de la figura 5, pero los resultados no son obvios porque las escalas de longitud y velocidad dependen de  $\alpha$  de manera no trivial. En la figura 6 mostramos el área  $A = \lambda^2 a(\alpha)$  de la sección transversal de la corriente para  $Q$  constante.

### III. DISCUSIÓN

Aún no consideramos la estabilidad de las corrientes colgantes ante perturbaciones que rompen la simetría de traslación. La caída de gotas de corrientes colgantes fue estudiada experimentalmente por Indeikina *et al.*<sup>8</sup>, quienes también investigaron la inestabilidad a partir de la aproximación de lubricación. Así mostraron que: a) si  $\alpha + \theta < \pi$  (recordemos que  $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ ) la caída ocurre por un mecanismo de chorro si se satisface la condición

$$\cos(d/2) < -1/4; \quad (3)$$

b) si  $\alpha + \theta > \pi$  la caída ocurre por medio de un proceso de estrangulamiento, siempre y cuando

$$1.5[-\cos(d/2)]^{1/6} > -\tan \alpha / \tan \theta. \quad (4)$$

Estas condiciones implican que hay caída de gotas si  $d$  supera un valor crítico algo mayor que  $\pi$ , en razonable acuerdo con sus experimentos. Indeikina *et al.*<sup>8</sup> no midieron el ángulo de contacto sino que lo usaron como parámetro de ajuste, fijando  $\theta = 55^\circ$  que corresponde a la solución de glicerina en agua utilizada sobre Plexiglas. Por lo tanto la verificación de su teoría se limita a  $\theta$  semejantes. Creemos que estos resultados se pueden tomar como guía para estimar la estabilidad de nuestras soluciones ante caída de gotas. Esto indicaría que el máximo caudal de corrientes colgantes con ángulos de contacto no muy grande puede ser bastante menor que  $q_m$ . En términos de  $q$  las condiciones (3) y (4) se escriben como

$$q > q_j = 1.079 \tan^3 \theta, \quad (5)$$

y

$$q > q_{p,\alpha} = \frac{4}{9} \tan^3 \theta \left[ 1 + \frac{9}{8} \pi \left( \frac{\tan \alpha}{\tan \theta} \right)^6 L(0)^{-6} \right]. \quad (6)$$

Según Indeikina *et al.*<sup>8</sup>,  $L(0) = 1.5$ . En la figura 4 mostramos  $q_j$  y  $q_{p,\alpha}$  para dos valores de  $\alpha$ . Naturalmente, las condiciones (5) y (6) no se pueden usar para  $\theta$  grande, pues se obtuvieron a partir de la teoría de lubricación. Sin embargo se ve en la figura 4 que el caudal está limitado por  $q_j$  para  $\theta$  pequeño, por  $q_{p,\alpha}$  para  $\theta$  mayor, y tal vez por  $q_m$  para  $\theta$  muy grande. Para  $\theta$  fijo (pero no muy grande)  $q$  está limitado por  $q_j$  para  $\alpha$  pequeño y por  $q_{p,\alpha}$  para  $\alpha$  grande.

Por otra parte Indeikina *et al.*<sup>8</sup> no observaron la inestabilidad de Rayleigh ni la formación de meandros que ocurren para corrientes apoyadas, aunque no exploraron todo el rango de  $Q$ . Los gradientes de velocidad de la corriente tienden a inhibir el crecimiento de la inestabilidad de Rayleigh, pero esperamos que esta inestabilidad se presente para  $Q$  muy pequeños.

### Agradecimientos

Agradecemos los subsidios PIP 5377 del CONICET, X031 de la UBA y PICTR 2002-00094 de la ANPCYT.

\* Correo electrónico: [perazzo@favaloro.edu.ar](mailto:perazzo@favaloro.edu.ar)

\*\* Correo electrónico: [jgratton@infip.lfp.uba.ar](mailto:jgratton@infip.lfp.uba.ar)

<sup>1</sup> G.D. Towell y L.B. Rothfeld, *AIChE J.* **12**, 972–980, 1966.

<sup>2</sup> C.A. Perazzo y J. Gratton, en R. Gratton, J.A. Diez y A.G. González, eds., *Proc. VIII Meeting on Recent Advances in Physics of Fluids and its Applications*, p. 41–44. UNICEN, 2004.

<sup>3</sup> C.A. Perazzo y J. Gratton, *Anales AFA* **15**, 131–135, 2004.

<sup>4</sup> C.A. Perazzo y J. Gratton, *J. Fluid Mech.* **507**, 367–379, 2004.

<sup>5</sup> F. Bashforth y J.C. Adams, *An Attempt to Test the Theory of Capillary Action*, Cambridge University Press and Deighton, Bell & Co, 1892.

<sup>6</sup> A.J. Tanasijczuk, C.A. Perazzo y J. Gratton, Leyes de escala para corrientes rectilíneas apoyadas sobre o colgadas de un plano inclinado, *Anales AFA*, este volumen.

<sup>7</sup> E. Pitts, *J. Fluid Mech.* **59**, 753–767, 1973.

<sup>8</sup> A. Indeikina, I. Veretennikov y H. Chang, *J. Fluid Mech.* **338**, 173–201, 1997.