

# SOLUCIONES DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS UTILIZANDO LOS GRUPOS DE SIMETRÍA DE LIE

**B. M. Marino, L. P. Thomas<sup>1</sup>, C. C. Peña<sup>2</sup>, A. L. Barrenechea<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>IFAS, <sup>2</sup>NUCOMPA, Facultad de Ciencias Exactas  
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Pinto 399, 7000 Tandil, Argentina  
*lthomas@exa.unicen.edu.ar*

Los flujos estratificados que se desarrollan en canales uniformes con sección transversal no-rectangular pueden estudiarse por medio de la aproximación de aguas poco profundas. Del sistema de ecuaciones resultante, hasta el momento se han obtenido en forma empírica algunas soluciones particulares. El objeto de este trabajo es buscar todas las posibles soluciones de tal sistema empleando los grupos de simetría de Lie. Con esta metodología, el conjunto de soluciones puede dividirse en cuatro diferentes grupos locales con características físicas distintivas. El análisis de invariancia de los grupos permite encontrar soluciones típicas a las cuales se les da la correspondiente interpretación física. Se hallan tanto las soluciones triviales de cambio de escala como soluciones autosimilares y de onda que no han sido reportadas previamente. Al margen de las soluciones encontradas para este sistema de ecuaciones, la metodología empleada resulta de carácter general y de suma utilidad, por lo que su aplicación a otros sistemas de interés para una búsqueda exhaustiva de soluciones resulta prometedora.

The stratified flows developed in uniform channels of non-rectangular cross-sections are usually studied using the shallow water approximation. Up to now, only particular solutions have been obtained empirically from the resulting equations system. The goal of this work is to look for all possible solutions of such a system employing the Lie symmetry groups. With this methodology the set of solutions may be divided in four different local groups with distinctive physical characteristics. The analysis of invariance of the groups allows finding typical solutions to which the corresponding physical interpretations are given. Trivial solutions of scale change, and self-similar and wave solutions which have not been reported previously, are found. Besides the solutions obtained for this system of equations, the technique is general and very useful, since its application to other systems of interest to look for exhaustively solutions results promising.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de aguas poco profundas se utilizan para modelar el comportamiento hidrodinámico de flujos en hidráulica, oceanografía, meteorología e ingeniería <sup>(1)</sup>. Diversos desafíos en ciencias aplicadas han provisto nuevos modelos físicos que incluyen términos adicionales y/o diferentes condiciones de contorno para las ecuaciones de aguas poco profundas básicas. Así ha surgido una creciente necesidad de encontrar soluciones analíticas de las ecuaciones del modelo para comprender la fenomenología física tanto como para parametrizar y validar los complejos códigos numéricos y analizar sus resultados.

Uno de los desafíos concierne a las corrientes de gravedad que ocurren en muchas situaciones naturales e industriales <sup>(2)</sup>. Estos flujos se forman cuando un fluido fluye principalmente en forma horizontal bajo la influencia de la gravedad en el interior de otro fluido de densidad ligeramente diferente. Un procedimiento común para generar corrientes de gravedad en el laboratorio es a través de la remoción rápida de una barrera vertical que separa dos fluidos miscibles de diferentes densidades (agua y agua salada, por ejemplo) en un canal de sección transversal uniforme.

Si la viscosidad es despreciable, el balance de las fuerzas de gravedad e inercial gobierna el flujo y las ecuaciones de aguas poco profundas pueden utilizarse para encontrar una solución que describa el comportamiento del sistema. Esta descripción es adecuada, por ejemplo, si la longitud de la corriente de gravedad excede suficientemente su profundidad.

La mayoría de los estudios teóricos y de laboratorio han sido dirigidos al comportamiento de las corrientes de gravedad generadas por la liberación instantánea de un volumen fijo y finito de un fluido denso. Esto corresponde a la situación en la que los laterales del tanque de almacenamiento colapsan rápidamente liberando su contenido de inmediato. Una situación más realista se da cuando el contenido de un tanque de almacenamiento o de una tubería es liberado durante un periodo de tiempo a tasa variable debido, por ejemplo, a una pequeña grieta o resquebrajadura.

Los estudios previos fueron concentrados en los flujos de gravedad que tienen lugar en canales uniformes con sección transversal rectangular o con geometría cilíndrica. La influencia de la forma de la sección transversal sobre el flujo fue investigada recientemente por Thomas & Marino <sup>(3)</sup> obteniéndose una solución analítica particular. Entonces se reportó un modelo físico que corrobora los resultados de flujos generados en canales de sección transversal triangular en el laboratorio. Sin embargo, hasta el momento no se ha reportado un estudio general para analizar el conjunto completo de soluciones para formas de secciones transversales no rectangulares que ponga a la solución encontrada en contexto.

Este trabajo constituye una primera etapa para analizar las posibles soluciones de las ecuaciones de aguas poco profundas y describir los flujos de gravedad en canales de sección transversal de forma compleja. Luego de presentar los modelos físico y matemático, en la Sección 3 determinamos los grupos de simetría de Lie en las ecuaciones resultantes y mostramos que las soluciones pueden dividirse en cuatro grupos locales con

características distintivas. El análisis de invariancia y la búsqueda de soluciones de cada grupo se realizan en la Sección 4. En la Sección 5 incluimos ejemplos y la interpretación física para cada caso, centrando la atención en los grupos donde existen soluciones prácticas. Finalmente, presentamos las conclusiones.

## 2. MODELO

Las ecuaciones de aguas poco profundas pueden usarse para estudiar las corrientes que se desarrollan en un canal de sección transversal no-rectangular definida por:

$$y = y(z) = \begin{cases} bz^a & \text{para } y \geq 0, \\ -bz^a & \text{para } y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $a, b$  son constantes y  $z \geq 0$ ,  $y$  son las coordenadas en las direcciones vertical y transversal. Como se ilustra en la Figura 1, los valores  $a = 1$ ,  $a \leq 1$  y  $a > 1$  determinan una sección transversal triangular, con depresión central y convexa, respectivamente <sup>(3)</sup>. El caso más común de una sección de forma rectangular es dado por  $a \rightarrow \infty$ . Por otro lado  $b$  está relacionado con la relación ancho-profundidad del canal a través de  $b = w/h_0^a$ , donde  $h_0 > 0$  y  $w = y(z=h_0)$  denotan la altura y el ancho del canal, respectivamente. Tanto el uso de  $a$  como de  $b$  facilitan el análisis de las propiedades básicas del flujo que se desarrolla en canales de sección transversal arbitraria. Para el caso de una capa de fluido de densidad  $\mathbf{r}_1$  sobre otra capa de fluido de densidad  $\mathbf{r}_2 > \mathbf{r}_1$  en un canal horizontal en el que los efectos de la fricción en el fondo son despreciables, las ecuaciones unidimensionales de conservación de la masa y del *momentum* constituyen el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales (PDE) para las variables físicas:

$$\mathbf{P} : \begin{cases} (h^{a+1})_t + (vh^{a+1})_x = 0 \\ v_t + vv_x + g'h_x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

donde  $g' = g(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/\mathbf{r}_1$  es la gravedad reducida,  $h(x,t)$  es la profundidad de la capa inferior y  $v(x,t)$  es la velocidad del fluido <sup>(1)</sup>. Notar que  $b$  está ausente en  $\mathbf{P}$ , sugiriendo que  $w$  no es un parámetro relevante para describir el flujo desarrollado, análogamente a lo que ocurre en los canales de sección rectangular. Escalando las variables con los parámetros disponibles  $g'$  y  $h_0 > 0$ , y redefiniendo  $h/h_0$ ,  $v/\sqrt{g'h_0}$ ,  $t\sqrt{g'h_0}$ ,  $x/h_0$  como  $h$ ,  $v$ ,  $x$  y  $t$ , respectivamente, el sistema PDE (2) puede expresarse en forma adimensional como sigue:

$$\mathbf{D} : \begin{cases} (a+1)(h_t + h_x v) + hv_x = 0 \\ v_t + vv_x + h_x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Si  $a > -1$  entonces  $\mathbf{D}$  satisface la condición de rango máximo. Luego la técnica de grupos de Lie, los métodos de similitud y el análisis dimensional pueden usarse para resolver el sistema PDE (3). <sup>(4,5,6,7)</sup>

## 3. GRUPOS DE SIMETRÍA DE $\mathbf{D}$

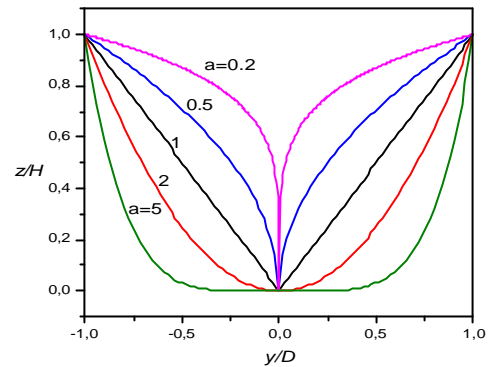


Figura 1. Formas que puede adoptar el contorno de un canal según el valor del parámetro  $a$ .

Sea  $M$  el subconjunto de puntos  $(x,t,v,h) \in \mathbb{R}^4$  de modo que  $x > 0$ ,  $t > 0$ . Denotemos con  $X$  al campo sobre  $M$  y sea  $X^{(1)}$  la correspondiente prolongación de  $X$  al espacio  $M^{(1)}$ . Así, si  $X \in \mathcal{C}(M)$  es dado por

$$X = \mathbf{a}(x,t,v,h) \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{b}(x,t,v,h) \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{g}(x,t,v,h) \frac{\partial}{\partial v} + \mathbf{d}(x,t,v,h) \frac{\partial}{\partial h}.$$

Entonces  $X^{(1)} \in \mathcal{C}(M^{(1)})$  puede escribirse como

$$X^{(1)} = X + \mathbf{g}^x \frac{\partial}{\partial v_x} + \mathbf{g}^t \frac{\partial}{\partial v_t} + \mathbf{d}^x \frac{\partial}{\partial h_x} + \mathbf{d}^t \frac{\partial}{\partial h_t}.$$

Evaluando la  $X^{(1)}$  en (3) <sup>(6, Th.2.36, pp113)</sup> se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^x &= \mathbf{g}_x + (\mathbf{g}_v - \mathbf{b}_x)v_x + (\mathbf{b}_x - \mathbf{g}_h)h_x + \mathbf{b}_x vv_x - \mathbf{a}_v v_x^2 + \\ &+ (\mathbf{b}_v - \mathbf{a}_h)v_x h_x + \mathbf{b}_v vv_x^2 + \mathbf{b}_h vv_x h_x + \mathbf{b}_h h_x^2, \\ \mathbf{g}^t &= \mathbf{g}_t + \mathbf{a}_t v_x + (\mathbf{b}_t - \mathbf{g}_v)(vv_x + h_x) - v_x h \mathbf{g}_h / (a+1) - \\ &- \mathbf{g}_h v h_x + \mathbf{a}_v vv_x^2 + \mathbf{a}_v v_x h_x - \mathbf{a}_h h v_x^2 / (a+1) - \mathbf{a}_h vv_x h_x, \\ \mathbf{d}^x &= \mathbf{d}_x + \mathbf{d}_v v_x + (\mathbf{d}_h - \mathbf{a}_x)h_x + \mathbf{b}_x v_x h / (a+1) + \mathbf{b}_x h_x v - \\ &- \mathbf{a}_v v_x h_x - \mathbf{a}_h h_x^2 + \mathbf{b}_v h v_x^2 / (a+1) + \mathbf{b}_v vv_x h_x + \\ &+ \mathbf{b}_h v_x h h_x / (a+1) + \mathbf{b}_h v h_x^2, \\ \mathbf{d}^t &= \mathbf{d}_t + \mathbf{d}_v v_t + (\mathbf{d}_h - \mathbf{b}_t)h_t - \mathbf{a}_t h_x - \mathbf{a}_v v_t h_x - \mathbf{a}_h h_t h_x - \\ &- \mathbf{b}_v v_t h_t - \mathbf{b}_h h_t^2. \end{aligned}$$

Puesto que  $X^{(1)}\mathbf{D}(x,t,v,h) = 0$  <sup>(6, Th. 2.31, pp 106)</sup>, se tiene que

$$\begin{aligned} (a+1)(\mathbf{g}_t h_x + v \mathbf{d}^x + \mathbf{d}^t) + \mathbf{d}_v v_x + h \mathbf{g}^x &= 0, \\ \mathbf{g}_v v_x + v \mathbf{g}^x + \mathbf{g}^t + \mathbf{d}_x &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Igualemos los coeficientes de los monomios en la primera derivada parcial de  $v$  y  $h$  que tienen lugar en (3). Las ecuaciones que definen los grupos de simetría de  $\mathbf{D}$  resultan ser las siguientes:

- (i)  $\mathbf{d} = 0$ ,
- (ii)  $-\mathbf{g}_t = \mathbf{g} = \mathbf{g}_v = 0$ ,
- (iii)  $-\mathbf{a}_t + \mathbf{g} = 0$ ,
- (iv)  $-\mathbf{a}_x + \mathbf{b}_t = 0$
- (v)  $\mathbf{b}_x + \mathbf{g}_t = 0$ ,
- (vi)  $\mathbf{b}_x - \mathbf{g}_h = 0$
- (vii)  $\mathbf{b}_x = \mathbf{b}_v = \mathbf{b}_h$ ,
- (viii)  $\mathbf{a}_v = \mathbf{a}_h = 0$ .

En consecuencia, por (ii) es  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(h)$  y por (iii) es  $\mathbf{g} = \mathbf{a}_t$ . Y también por (iv) es  $\mathbf{a}_x = \mathbf{b}_t$ , por (v) y (vi) es

$\mathbf{b}_x = -\dot{\mathbf{g}}(h) = \dot{\mathbf{g}}(h)$  y así  $\mathbf{b}_x = 0$  y  $\mathbf{g} \equiv c_4$  con  $c_4 \in \mathfrak{R}$  y constante. Así, por (vii) es  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$  y por (viii) resulta  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x,t)$ . Ahora, por (iii) tenemos  $\mathbf{a}(x,t) = c_4 t + \mathbf{h}(x)$  para una función  $\mathbf{h} = \mathbf{h}(x)$  con derivada continua. Usando (iv)

obtenemos  $\dot{\mathbf{h}}(x) = \dot{\mathbf{b}}(t)$  y entonces  $\ddot{\mathbf{h}}(x) = \ddot{\mathbf{b}}(t) = 0$ , de modo que  $\mathbf{h}(x) = c_3 x + c_1$  y  $\mathbf{b}(t) = c_3 t + c_2$  con  $c_1, c_2, c_3 \in \mathfrak{R}$  y constantes. En consecuencia

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{a}(x,t) \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{b}(t) \frac{\partial}{\partial t} + c_4 \frac{\partial}{\partial v} \\ &= (c_4 t + c_3 x + c_1) \frac{\partial}{\partial x} + (c_3 t + c_2) \frac{\partial}{\partial t} + c_4 \frac{\partial}{\partial v} \\ &= c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 \frac{\partial}{\partial t} + c_3 \left( x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} \right) + c_4 \left( t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

Así el álgebra de Lie de simetrías infinitesimales de  $\mathbf{D}$  está generada por los cuatro campos

$$X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_t, X_3 = x\partial_x + t\partial_t, X_4 = t\partial_x + \partial_v. \quad (5)$$

Las relaciones de conmutación entre los campos  $[X_i, X_j]$  son dados por:

$X_i \setminus X_j$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$X_1$	0	0	0	$X_1$
$X_2$	0	0	$X_1 + X_2$	$X_2$
$X_3$	0	$-X_1 - X_2$	0	0
$X_4$	$-X_1$	$-X_2$	0	0

Los correspondientes grupos de parámetros locales son los siguientes:

$$\begin{aligned} G_1: (x,t,v,h) & \xrightarrow{\mathbf{s}_1^1} (x+s,t,v,h) \\ G_2: (x,t,v,h) & \xrightarrow{\mathbf{s}_2^2} (x,t+s,v,h) \\ G_3: (x,t,v,h) & \xrightarrow{\mathbf{s}_3^3} (x \exp s, t \exp s, v, h) \\ G_4: (x,t,v,h) & \xrightarrow{\mathbf{s}_4^4} (x+st, v+s, h) \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $\mathbf{s}_j^j = \exp(\mathbf{s} X_j)$ ,  $1 \leq j \leq 4$ . Puesto que cada grupo de Lie  $G_j$  es un grupo de simetría, la transformación  $\mathbf{s}$  muestra que las soluciones  $v = v(x,t)$  y  $h = h(x,t)$  de  $\mathbf{D}$  son:

$$v^1(x,t) = v(x-s,t) \quad \text{y} \quad h^1(x,t) = h(x-s,t)$$

$$v^2(x,t) = v(x,t-s) \quad \text{y} \quad h^2(x,t) = h(x,t-s)$$

$$v^3(x,t) = v(x-st,t) \quad \text{y} \quad h^3(x,t) = h(x-st,t)$$

$$v^4(x,t) = v(x \exp(-s), t \exp(-s)) \quad \text{y}$$

$$h^4(x,t) = h(x \exp(-s), t \exp(-s)) \quad (7)$$

#### 4. ANÁLISIS DE LA INVARIANCIA DE $\mathbf{D}$

De (4) se infiere que la proyección de los grupos locales  $G_1, G_2, G_3$  y  $G_4$  de  $M$ , es decir los cambios de las variables independientes  $x$  y  $t$ , no dependen de las variables independientes  $v$  y  $h$ . Los grupos inducen una acción *semi-regular* (es decir, todas las órbitas tienen la

misma dimensión) con una órbita dimensional. Las acciones son regulares porque cualquier punto de  $M$  tiene una vecindad que intersecta cualquier órbita en  $n$  conjuntos conectados. En consecuencia podemos determinar un conjunto completo de *invariantes funcionalmente independientes* relacionado con los campos vectoriales (5) <sup>(6, Th.2-17 pp88)</sup>. Bajo estas condiciones localmente asociadas a cada campo, existe una única invariante  $y = y(x,t)$  de la proyección dentro del grupo para  $x > 0, t > 0$ . Además, hay dos invariantes adicionales  $z^1 = z^1(x,t,v,h)$ ,  $z^2 = z^2(x,t,v,h)$  sobre  $M$  de modo que  $y, z^1, z^2$  proveen el conjunto completo requerido. Invocando el teorema de la función implícita podemos hacer el siguiente análisis de cada campo de (5):

(i) Se cumple que  $X_1(t) = X_1(v) = X_1(h) = 0$ . Si  $(x,t,v,h) \in M$  escribimos  $y(x,t) = t$ ,  $z^1(x,t,v,h) = v$ ,  $z^2(x,t,v,h) = h$ . Entonces  $v = z^1 = z^1(y) = z^1(t)$  y  $h = z^2 = z^2(y) = z^2(t)$ . Luego,

$$v_x = h_x = 0, \quad v_t = z_t^1, \quad h_t = z_t^2. \quad (8)$$

Reemplazando (8) en  $\mathbf{D}$  obtenemos  $v_t = h_x = 0$ , es decir  $v$  y  $h$  deben ser constantes y por tanto constituyen la solución trivial de  $\mathbf{D}$ .

(ii) Por otra parte  $X_2(x) = X_2(v) = X_2(h) = 0$ . Si  $(x,t,v,h) \in M$  sea

$$y(x,t) = x, \quad z^1(x,t,v,h) = v, \quad z^2(x,t,v,h) = h.$$

Entonces  $v = z^1 = z^1(y) = z^1(x)$  y  $h = z^2 = z^2(y) = z^2(x)$ . Luego,

$$\mathbf{D}: \begin{cases} (a+1)h_x v + h v_x = 0, \\ h_x + v v_x = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Puesto que  $v = v(x)$  y  $h = h(x)$ , por la segunda ecuación de  $\mathbf{D}$  es  $h + v^2/2 = c$ , para algún  $c \in \mathfrak{R}$ . Entonces la primera ecuación de  $\mathbf{D}$  da  $v[c - (a+3/2)v^2] = 0$ . En ese caso  $d/dx[(c - (a+3/2)v^2)] = 0$ , y  $v$  y  $h$  deben ser constantes.

(iii) Además  $X_3(v) = X_3(h) = 0$ . Para buscar la solución invariante correspondiente consideremos la ecuación característica  $dx/x = dt/t$ . Puesto que  $x/t$  es constante sobre las curvas características, sigue que

$$y(x,t) = \frac{x}{t}, \quad z^1(x,t,v,h) = v, \quad z^2(x,t,v,h) = h. \quad (10)$$

Como  $v = z^1 = z^1(y) = z^1(x/t)$  y  $h = z^2 = z^2(y) = z^2(x/t)$ , tenemos

$$v_x = \frac{1}{t} \frac{dz^1}{dy}, \quad v_t = -\frac{x}{t^2} \frac{dz^1}{dy}, \quad h_x = \frac{1}{t} \frac{dz^2}{dy}, \quad h_t = -\frac{x}{t^2} \frac{dz^2}{dy}.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{D}: \begin{cases} (a+1)(z^1 - y) dz^2/dy + z^2 dz^1/dy = 0, \\ (z^1 - y) dz^1/dy + dz^2/dy = 0. \end{cases}$$

En consecuencia, si  $dz^1/dy \neq 0$ , es

$$z^2 = (a+1)(z^1 - y)^2. \quad (11)$$

Hay varias alternativas para trabajar con la Ec. (11). En particular, reemplazando  $z^2$  en la primera ecuación de **D** e integrando obtenemos

$$(2a+3)z^1 = 2(a+1)y + c,$$

donde  $c \in \mathfrak{R}$ . Impongamos la condición  $z^1 = 0$  si  $z^2 = 1$ . Si  $a > -1$  y escribimos

$$z_c^1 = \frac{2(a+1)y + c}{2a+3}, \quad z_c^2 = (a+1) \left( \frac{c-y}{2a+3} \right)^2$$

entonces  $z_c^2 = 1$  si y solo si  $y = c \pm (2a+3)/\sqrt{a+1}$ . Luego,  $z_c^1 = 0$  si y solo si  $c = \pm 2\sqrt{a+1}$ . Como consecuencia, obtenemos:

$$\begin{aligned} z^1 &= z_{\pm}^1(x,t) = \frac{2\sqrt{a+1}[(x/t)\sqrt{a+1} \pm 1]}{2a+3}, \\ z^2 &= z_{\pm}^2(x,t) = \frac{a+1[2\sqrt{a+1} \mp x/t]^2}{(2a+3)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

(iv) Finalmente  $X_4(t) = X_4(h) = 0$ . Como la función  $x/t-v$  es constante en las soluciones de la ecuación característica  $dx/t = dv$ , resulta que

$$y(x,t) = t, \quad z^1(x,t,v,h) = h \quad z^2(x,t,v,h) = \frac{x}{t} - v.$$

Entonces  $h = z^1 = z^1(y) = z^1(t)$  y  $v = x/t - z^2 = x/t - z^2(y) = x/t - z^2(t)$ , de modo que

$$v_x = \frac{1}{t}, \quad v_t = -\frac{dz^2}{dt} - \frac{x^2}{t^2}, \quad h_x = 0, \quad h_t = \frac{dz^1}{dt}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{D}: \begin{cases} (a+1)dz^1/dt + z^1/t = 0, \\ dz^2/dt + z^2/t = 0. \end{cases}$$

Las soluciones correspondientes de **D** son  $z^1(t) = ct^{-1/(a+1)}$  y  $z^2 = d/t$ , donde  $c,d \in \mathfrak{R}$ . En consecuencia,

$$h(x,t) = ct^{-1/(a+1)}, \quad v(x,t) = \frac{x-d}{t}. \quad (13)$$

## 5. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LOS RESULTADOS

Los conjuntos de soluciones del primer y segundo grupo de simetría son invariantes frente a un desplazamiento espacial o temporal de la magnitud  $s$ , respectivamente. Luego la forma de la solución no depende del origen del eje de coordenadas espacial o temporal. Un flujo uniforme es un ejemplo de estos grupos de simetría como vimos en las secciones 4(i) y 4(ii).

Las variables espacial y temporal del grupo local  $G_3$  están vinculadas por medio de una velocidad  $s$ , sugiriendo que los conjuntos de soluciones tienen características de onda. En particular, la solución autosimilar (12) se representa en la Figura 2.

Reemplazando  $v = z^1$ ,  $h = z^2$  y  $y = const = s$  en Ec. (11) se obtiene  $h = (a+1)(v-s)^2$ . Aquí  $s$  es una velocidad característica que, en las variables físicas dimensionales, está dada por

$$s = \sqrt{\frac{g'h_0}{a+1}}. \quad (14)$$

Esta relación es una generalización de la conocida velocidad de onda  $s = \sqrt{g'h_0}$  para canales rectos de sección transversal rectangular. Las soluciones correspondientes pueden obtenerse de los PDEs (2) buscando soluciones donde  $h$  y  $v$  sean funciones de  $(x-st)$ . En particular, para el caso de una perturbación pequeña  $h^*(x,t) \ll h_0$  y  $v^*(x,t) \ll s$  de un estado estacionario  $h = h_0$  y  $v = 0$ , se encuentra que el sistema (2) se convierte en el bien conocido de las ecuaciones de onda cuyas soluciones son cualesquiera funciones derivables  $h^*(x-st)$  y  $v^*(x-st)$  donde  $s$  es dado por (14).

Finalmente, el grupo local  $G_4$  se refiere a las soluciones relacionadas con las transformaciones  $h(x,t) \rightarrow h(xe^{-s}t)$  y  $v(x,t) \rightarrow v(x,te^{-s})$ . Esta transformación puede considerarse como un cambio de escala en ambas variables independientes  $x$  y  $t$  en la forma  $x \rightarrow s^*t$  y  $t \rightarrow s^*t$ , donde  $s^* = e^{-s}$ . Este cambio de escala es adicional al verificado en el sistema PDE **D** dado por (3) que es independiente de las escalas físicas como se mostrara en Sección 2. La solución (13) sugiere una forma particular de descarga del canal según la cual la profundidad se mantiene estrictamente uniforme, es decir  $h$  no depende de  $x$  sino de  $t$  solamente. La velocidad del fluido es proporcional a la posición hasta el contorno derecho del dominio.

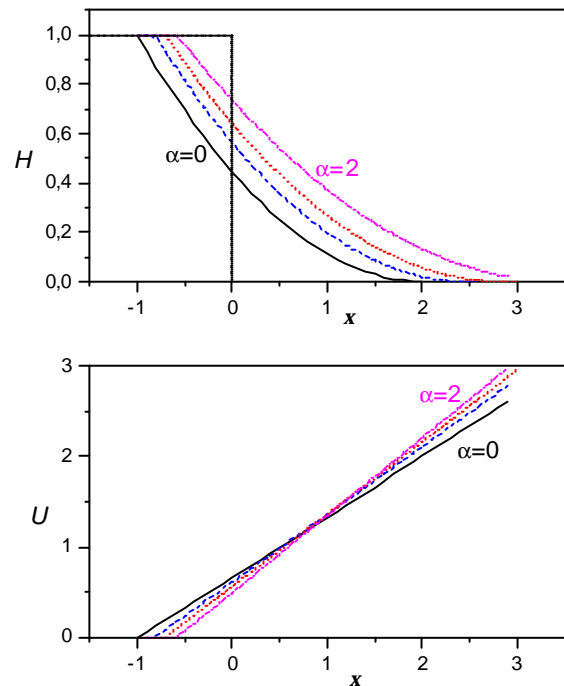


Figura 2. Distribución de altura (arriba) y velocidad (abajo) provistas por la solución autosimilar para flujos densos en canales con  $a = 0, 0.5, 1$  y  $2$ .

## 6. CONCLUSIONES

Las soluciones continuas y derivables del sistema PDE definido en (3) fueron determinadas por medio de análisis de invariancia. Los campos  $X_1$  y  $X_2$  dan soluciones constantes, y los campos  $X_3$  y  $X_4$  proveen las soluciones no triviales como indican (12) y (13). En consecuencia, las proyecciones de los cuatro grupos de

Lie descritos en (6) provee soluciones genuinas que incluyen las soluciones autosimilares previamente obtenidas por Thomas & Marino (2004) y ondas viajeras para las formas estudiadas de la sección transversal. La existencia de las soluciones triviales es ciertamente directa del análisis de simetrías de (2), pero aquí dichas soluciones se encuentran por medio de un método general y exhaustivo completando el conjunto de soluciones posibles. Por lo tanto, el presente estudio puede considerarse como un interesante comienzo del estudio de las soluciones de sistemas de PDE análogos a (2) pero que incluyen términos adicionales que dan cuenta de fenómenos físicos más complejos.

#### REFERENCIAS

- 1- Witham, G.B. *Linear and non linear waves*. Wiley, EE.UU., 1974.
- 2- Simpson, J.E. *Gravity currents: in the environment and the laboratory*. CUP, Cambridge, Inglaterra, 1997.
- 3- Thomas, L.P. & Marino, B.M. *J. Fluids Eng.* 126, 290-292, 2004.
- 4- Buckingham, E. *Phys. Rev.* 4, 345-376, 1914.
- 5- Sedov, L.I. *Similarity and dimensional methods in Mechanics*. Academic Press, New York, 1959.
- 6- Olver, P.J. *Application of Lie groups to differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- 7- Bluman, G.W. & Cole, J.D. *Similarity methods for differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1974.