

INFORMACIÓN SEMICLÁSICA CONTENIDA EN LAS MEDIDAS DE INFORMACIÓN DEFORMADAS Y ESCOLTAS

SEMICLASSICAL INFORMATION FROM DEFORMED AND ESCORT INFORMATION-MEASURES

F. Pennini^{1,2}, A. Plastino¹ y G.L. Ferri³

¹*Instituto de Física La Plata (CONICET-IFLP), Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata (UNLP), C.C. 727, (1900) La Plata, Argentina*

²*Departamento de Física, Universidad Católica del Norte, Av. Angamos 0610, Antofagasta, Chile*

³*Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Pampa Peru y Uruguay, Santa Rosa, La Pampa, Argentina. glferri@exactas.unlpam.edu.ar*

Las distribuciones escolta son un concepto bien establecido pero relativamente nuevo para los físicos. En el presente trabajo revisamos este concepto en el contexto de la Distribuciones de Husimi (DH) semiclásicas, e investigamos la posibilidad de extraer información semiclásica nueva, contenida, no en las DH, sino en sus distribuciones Husimi-escolta asociadas. También establecemos relaciones, para distintas medidas de información, entre las versiones deformadas y las construidas con las DH-escoltas.

Palabras clave: Física de la información, Información de Fisher, Distribuciones Escolta, Distribuciones en leyes de potencias, Métodos semiclásicos.

Escort distributions are a well-established but (for physicists) a relatively new concept that is rapidly gaining wide acceptance in the world. In this work we wish to revisit the concept within the structures of the celebrated semiclassical Husimi distributions (HD) and thereby investigate the possibility of extracting *new* semiclassical information contained, not in the HD themselves, but in their associated *escort*-Husimi distributions. We will also establish relations, for various information measures, between their deformed versions and those built up with escort-HDs.

Keywords: Information Physics, Fisher Information, Escort distributions, Power-law distributions, Semiclassical Methods.

I. INTRODUCCIÓN

Uno de los principales objetivos de la Física de la Información es el de indagar hasta que punto las herramientas generadas en el reino de la Teoría de la Información pueden ayudar a describir diferentes aspectos de fenómenos físicos. El interés en la Física de la Información ha ido creciendo durante los últimos quince años, principalmente como consecuencia de:

1. en primer lugar, la explosión de la comunicación cuántica [1], y, en menor medida,
2. el amplio uso de medidas “deformadas” [2], y
3. los trabajos de Wheeler [3] que intentan reinterpretar grandes partes de la Física en términos de la Teoría de la Información [4].

Por ello, es de importancia, a los fines de la Física de la Información, analizar y examinar críticamente nuevas herramientas o nuevas aplicaciones de las ya existentes a fin de probar su validez y su utilidad.

En este trabajo, intentamos este examen con referencia a las distribuciones escoltas (DE), las que, si bien son una herramienta bien establecida, para los físicos se trata de un concepto relativamente nuevo, que está ganando aceptación rápidamente. Si tenemos una distribución de

probabilidad normalizada $f(x)$, su distribución escolta asociada de orden κ ; ($\kappa \in \mathfrak{R}$) es

$$f_{\kappa}(x) = \frac{f(x)^{\kappa}}{\int dx f(x)^{\kappa}}. \quad (1)$$

El valor esperado de la cantidad \mathcal{A} evaluado con una distribución κ -escolta se denota con $\langle \mathcal{A} \rangle_{f_{\kappa}}$.

Para algunas aplicaciones físicas de este concepto, en mecánica estadística, véase, por ejemplo (una lista no exhaustiva), [5–7] y las referencias en su interior. La principal referencia sobre distribuciones escolta puede encontrarse en Ref. [8].

En este trabajo deseamos introducir las DE en el escenario de la distribución semiclásica de Husimi (DH), y por lo tanto, investigar la posibilidad de obtener nueva *información semiclásica* desde la DH-escolta, (κ -DH).

Algunas de las ideas que usaremos frecuentemente se pueden encontrar en la Ref. [9]. En este trabajo, analizamos varias medidas de información expresadas en términos del espacio de fases, a saber:

1. La medida de información de Fisher invariante frente a corrimientos, I_{τ} (un versión especial de la medida de Fisher) [9–12]

$$I_{\tau} = \langle \mathcal{N}(x, p) \rangle_f = \int d\Omega f(x, p) \mathcal{N}(x, p);$$

$$(d\Omega = dx dp / 2\pi\hbar)$$

$$\mathcal{N}(x, p) = \Gamma_x^2 \left(\frac{\partial \ln f(x, p)}{\partial x} \right)^2 + \Gamma_p^2 \left(\frac{\partial \ln f(x, p)}{\partial p} \right)^2, \quad (2)$$

donde las cantidades Γ_x , Γ_p son dos constantes necesarias a los fines del balance dimensional [10]. Esta medida de información de Fisher es entonces un “valor esperado- μ ”. También puede ser un valor medio modificado “ κ -escolta” [9], dando lugar a una nueva medida

$$I_\tau^{(\kappa)} \equiv \langle \mathcal{N}(x, p) \rangle_{f_\kappa}. \quad (3)$$

2. La medida deformada [13]

$$S_q = -k_B \int d\Omega f(x, p)^q \ln_q f(x, p),$$

donde k_B es la constante de Boltzmann’s y $f(x, p)$ la densidad de probabilidad normalizada, en el espacio de fases. En esta definición se ha usado la función “deformada” q -logaritmo [13]

$$\ln_q x = (1 - x^{1-q}) / (q - 1); \quad \text{with } x > 0, \quad (4)$$

con $q \in \mathfrak{R}$, llamado índice de deformación, que es una signatura de la naturaleza “deformada” de la medida. Para $q = 1$ recuperamos el logaritmo ordinario y la medida logarítmica de Shannon. En mecánica estadística, las medidas deformadas y las distribuciones escolta están fuertemente relacionadas con *distribuciones de probabilidades que son leyes de potencia*, de la forma

$$f_\kappa(x) = C x^\kappa, \quad (5)$$

donde C es una constante de normalización. Estas distribuciones maximizan S_q , en el contexto del Principio de Máxima Entropía (Max-Ent) de Jaynes [14]. En escenarios (q, κ) escolta-deformados, fueron desarrolladas algunas relaciones en Ref. [5]. Últimamente han recibido mucha atención las medidas de información deformadas, siendo aplicadas a diferentes disciplinas científicas (véanse, por ejemplo, [2, 7, 15, 16] y las referencias en su interior). Fueron introducidas hace mucho tiempo en la comunidad cibernética por Harvda-Charvat [17] y Vadja [18] en 1967-68, siendo redescubiertas por Daroczy en 1970 [19] en el campo del procesamiento de imágenes. Para un resumen histórico y las referencias pertinentes, véase Ref. [20]. En astronomía, física, economía, biología, etc., estas medidas de información deformadas son llamadas, a menudo, q -entropías desde 1988 [15].

3. La entropía semiclásica de Wehrl, W , una medida de localización en el espacio de fases [21, 22]. Se construye usando los estados coherentes $|z\rangle$ [23, 24] y constituye una herramienta poderosa en mecánica

estadística. Los estados coherentes son autoestados de un operador general de aniquilación a , apropiado para el problema en cuestión [24–26], esto es:

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad (6)$$

con z una combinación compleja de las coordenadas del espacio de fases x, p (a es no Hermitiano),

$$z = z(x, p) = Ax + iBp, \quad (7)$$

siendo A y B constantes que dependen de a . La definición de W es:

$$\begin{aligned} W &= - \int d\Omega \mu(x, p) \ln \mu(x, p) \\ &\equiv - \int d\Omega \mu(z) \ln \mu(z), \end{aligned} \quad (8)$$

y es claramente una medida del tipo Shannon [14] a la que puede aplicarse el Principio de Máxima Entropía. W se expresa en términos de funciones distribución $\mu(x, p)$, conocidas comúnmente como distribuciones de Husimi, *el leit-motif del presente trabajo* [27]. Las distribuciones μ son los elementos diagonales del operador densidad ρ , que contiene toda la información física disponible, referida al problema que se tiene en mano [28]. En la base de los estados coherentes $\{|z\rangle\}$ [24], es:

$$\mu(x, p) \equiv \mu(z) = \langle z|\rho|z\rangle. \quad (9)$$

Así, hay funciones distribución “semiclásicas” en el espacio de fases, asociadas al sistema descrito por ρ [24–26]. La distribución $\mu(x, p)$ está normalizada en la forma:

$$\int d\Omega \mu(x, p) = 1. \quad (10)$$

Se ha demostrado en Ref. [23] que, en el caso del oscilador armónico la distribución de Husimi asociada es:

$$\begin{aligned} \mu(x, p) &\equiv \mu(z) = \\ &= (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) e^{-(1 - e^{-\beta\hbar\omega})|z|^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

con $\beta = 1/k_B T$, y T la temperatura, lo cual da lugar a una forma Gaussiana pura en el límite $T \rightarrow 0$. Una entropía de Wehrl q -deformada fue construida en la Ref. [9]:

$$W^{(q)} = -k_B \int d\Omega \mu(x, p)^q \ln_q \mu(x, p). \quad (12)$$

Nuestro objetivo es presentar una metodología semiclásica para aplicar los conceptos “escolta-deformados”

vinculándolos con lo que las medidas de información expresan en el vocabulario de *espacio de fases*.

Es bien sabido que la primera y más elaborada formulación de la mecánica cuántica en el espacio de fases es la de Wigner [29–31]. A cada estado cuántico puede asignársele una función, la de Wigner, en el espacio de fases. Esta función en el espacio de fases puede alcanzar valores negativos, de modo que su interpretación como una distribución de probabilidades resulta cuestionable. Esta limitación fue superada por Husimi [27], (entre otros). La mecánica cuántica como un todo, puede reformularse en términos de la distribución de probabilidades de Husimi $\mu(x, p)$, que pueden considerarse como “distribuciones de Wigner suavizadas” [30, 32, 33]. Ciertamente, $\mu(x, p)$ es una distribución de Wigner, D_W , diseminada sobre una región del espacio de fases de tamaño \hbar [23]. $\mu(x, p)$ es una función positiva, aún cuando D_W no tenga ese carácter. La distribución de probabilidad semiclásica de Husimi se refiere a un *tipo especial* de probabilidad: la de la ubicación simultánea pero aproximada de la posición y el momento lineal en el espacio de fases [23].

En esta comunicación nos remitimos a la generalización κ -escolta al estilo de la ecuación (1), de la función de Husimi, y eventualmente haremos conexiones con el concepto de deformación ($\kappa \rightleftharpoons q$). Adicionalmente, enfatizaremos los siguientes items:

- Nuestro tema central reside en el hecho de que esto puede hacerse de varias formas, y estudiaremos las conexiones concomitantes.
- Mostraremos que *los métodos para la localización en el espacio de fases* puede mejorarse eligiendo adecuadamente q (o κ).
- Deseamos poner en juego el concepto puramente cuántico de “razón de participación” de un estado mezclado, de modo de obtener cotas para los exponentes de las leyes de potencia. Este esfuerzo está motivado por el hecho de que entender la emergencia del comportamiento clásico es uno de los problemas principales de la física contemporánea [34]. Así es que resulta de alguna importancia discutir:
 1. instancias en las cuales conceptos puramente cuánticos se presentan ya en un nivel semiclásico, y
 2. analizar las distribuciones cuánticas en el espacio de fases, como haremos aquí (véase por ejemplo, Refs. [35, 36]).

Este artículo está organizado de la siguiente manera: Comenzamos presentando en la sección II nuestros resultados relacionados con nuevas cotas del índice q que se derivan de la entropía de Wehrl deformada (12). En la sección III se discuten las q -generalizaciones posibles de las distribuciones de Husimi. Nos concentramos en los detalles de la primera en la sección IV. El otro tipo

importante de generalización involucra el ya citado abordaje MaxEnt en un contexto q -deformado, y constituye el objeto de la sección V. En la sección VI se evalúa la distancia entre las diferentes distribuciones en análisis. Finalmente, en la sección VII, enumeramos algunas conclusiones.

II. COTA TERMODINÁMICA EN q SEGÚN LA ENTROPÍA DE WEHRL DEFORMADA

La entropía de Wehrl deformada, ya fue analizada en Ref. [9] en el contexto de un oscilador armónico en un estado térmico, siguiendo las ideas exploradas por Anderson *et al.* [23]. Deduiremos un breve apéndice a ese trabajo a fin de ilustrar la interrelación entre la Física y la Teoría de la Información para establecer cotas sobre lo que a primera vista son objetos puramente matemáticos. Resulta evidente de los resultados reportados en Ref. [9] que, cuando la temperatura tiende a cero, se tiene

$$W^{(q)}(HO) \rightarrow \frac{1}{q}, \quad (13)$$

mientras que para $T \rightarrow \infty$

$$W^{(q)}(HO) \rightarrow \frac{1}{q-1}, \quad (14)$$

dado que $q > 1$. Puesto que la entropía de Wehrl es, como cualquier entropía, una función monótonamente creciente de la temperatura [21], el límite anterior produce lo que podría llamarse la “doble cota q -Lieb” [37]

$$\frac{1}{q} \leq W^{(q)} \leq \frac{1}{q-1}. \quad (15)$$

Cuando $q \rightarrow 1$ se sigue que $W \geq 1$, o sea que recuperamos la cota inferior –simple– de Lieb [37] $W \geq 1$, la cual es una manifestación del principio de incerteza [37]. Obviamente, puesto que $W^{(q)}$ es una cantidad de ignorancia, *no puede ser negativa*. Así recuperamos, transitando aquí *un camino distinto* al trazado en Ref. [9], una cota inferior para el índice de deformación q ,

$$q \geq 1. \quad (16)$$

De este modo, consideraciones relativas a la temperatura establecen una cota inferior para el concepto de deformación. Éste es el primer resultado de esta comunicación.

III. GENERALIZACIONES DEFORMADA Y ESCOLTA

Dada una distribución de probabilidades (DP) $f(x)$, existe una familia infinita de DPs asociadas $f_\kappa(x)$ dadas por Ec. (1) que han demostrado ser bastante útiles en la investigación de sistemas dinámicos no lineales ya que, frecuentemente, son más eficaces para discernir sobre alguna de las características del sistema que la distribución original [8].

A continuación demostraremos que, aunque κ pueda ser cualquier número real desde un punto de vista puramente matemático, consideraciones físicas establecen cotas estrictas en este parámetro.

Más arriba tratamos con un índice-escolta κ y un índice de deformación q . A menudo se usa la misma letra (q) en las dos instancias debido a que corrientemente, [16] las ligaduras empleadas en el tratamiento q -MaxEnt son computadas mediante valores medios escoltas de orden $\kappa = q$, y de ese modo se funden los dos índices en uno, (q). Cuando hablamos de q -cotas, algunas se originan en consideraciones acerca de la deformación y otras en distribuciones escoltas. La de la sección precedente es claramente del tipo “deformación”.

Como $\mu = \langle z|\rho|z \rangle$, al tratar con distribuciones escoltas à la Husimi tenemos dos ingredientes a considerar: la distribución canónica ρ , procedente de la mecánica estadística, y la función de Husimi en sí misma. Así, podemos generalizar de dos maneras distintas:

1. Generalización-“escolta”: usando directamente la definición (1) para obtener lo que llamaremos funciones q -Husimi γ_q , tal como se hizo en Ref. [10]. Lo que ocurre en este caso será analizado en la sección siguiente.
2. Generalización-“deformada”: modifica la definición del operador densidad canónico de Gibbs [28] $\rho_{Gibbs} \propto \exp(-\beta\mathcal{H})$ para un dado Hamiltoniano \mathcal{H} reemplazando la función exponencial por una q -exponencial deformada [13]

$$e_q(x) = [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}. \quad (17)$$

La función exponencial se recupera cuando $q \rightarrow 1$. Se obtiene entonces una densidad ρ_q a partir de la cual se puede construir la función de Husimi en la forma usual $\langle z|\rho_q|z \rangle$, a la cual llamaremos función de Husimi deformada μ_q .

Hay una diferencia importante entre ambas elecciones en cuanto a la correspondencia entre ρ y γ que queremos enfatizar:

$$\rho \longrightarrow \gamma_q \quad (18a)$$

$$\rho_q \iff \mu_q. \quad (18b)$$

Sólo la segunda correspondencia es biyectiva. Esto significa que uno puede encontrar las distribuciones γ_q para las cuales no puedan asociarse ningún ρ . Debe mencionarse también, que aunque puede pensarse en procesos del tipo

$$\rho \iff \rho^{(q)} = \frac{\rho^q}{\text{Tr } \rho^q}, \quad (19)$$

éstos no aportan nada nuevo, ya que es bien sabido que la distribución escolta de una densidad canónica es simplemente otra matriz densidad canónica a diferente temperatura [8].

IV. COTAS FÍSICO-CUÁNTICAS SOBRE q

A. Generalidades

El concepto físico-cuántico de “grado de pureza” de un operador densidad general (y entonces de un estado mezclado) se expresa via $\text{Tr } \rho^2$ [38]. Su inversa, llamada “razón de participación”,

$$\mathcal{R}(\rho) = \frac{1}{\text{Tr } \rho^2}, \quad (20)$$

es un indicador del número de proyectores de estados puros que forman parte de ρ . Esta expresión es particularmente útil para el cálculo [39]. Para estados puros $\rho^2 = \rho$ y $\mathcal{R}(\rho) = 1$. Si tenemos estados mezclados, es siempre cierto que

$$\mathcal{R}(\rho) \geq 1 \quad (21)$$

porque $\rho^2 \neq \rho$ y $\text{Tr } \rho^2 \leq 1$. Aplicaremos ahora las ideas anteriores en un ambiente semiclassical y usamos la Ec. (21) para obtener cotas adicionales sobre q . Con este propósito, y recordando la notación- z introducida en la Ec. (9), evaluamos la Ec. (20) en la siguiente forma [40]

$$\mathcal{R}(\mu) = \frac{1}{\int d\Omega \mu(z)^2}, \quad (22)$$

donde $\mu(z) = \langle z|\rho|z \rangle$ es, por supuesto, la función de Husimi, y el volumen en el espacio de fases $d\Omega$ en mecánica clásica, está relacionado con el elemento diferencial d^2z en la forma $d\Omega = d^2z/\pi$ [24].

B. Razón de participación de una distribución Husimi escolta

Extendamos ahora la definición de \mathcal{R} à la γ_q para obtener lo que llamaremos una razón de participación “semiclassica”. Esta extensión es de carácter puramente matemático. No es necesario nada físico asociado a ella, como analizamos con referencia a la Ec. (18). De todos modos, el concepto será útil como veremos más adelante. Prestemos atención ahora a las distribuciones Husimi-escolta asociadas que fueron definidas en Ref. [9] como

$$\gamma_q(z) = \frac{\mu(z)^q}{\int \frac{d^2z}{\pi} \mu(z)^q}, \quad (23)$$

con $\mu(z)$ la distribución de Husimi ordinaria. La razón de participación semiclassical asociada se escribe entonces

$$\mathcal{R}_q(\gamma_q) = \frac{1}{\int \frac{d^2z}{\pi} \gamma_q(z)^2}, \quad (24)$$

la cual podemos computar explícitamente para el oscilador armónico (OA) usando el resultado dado en Ref. [9] para i) la distribución Husimi-escolta del OA,

μ_{OA} y ii) la medida de Fisher para el OA, I_τ . Entonces resulta [9]

$$\gamma_q(z) = q(1 - e^{-\beta\hbar\omega})^{1-q} [\mu(z)]^q = q I_\tau e^{-q I_\tau |z|^2} \quad (25)$$

obteniendo así a una expresión Gaussiana la cual contiene a la medida de Fisher invariante frente a corrimientos I_τ . En consecuencia, la razón de participación del OA es

$$\mathcal{R}_q(T) = \frac{2}{q^2} I_\tau^{2q-3}. \quad (26)$$

Notemos que esta “razón de participación” depende de la temperatura T a través de la medida de Fisher I_τ para el OA. Cuando el índice q tiende a la unidad, tenemos $\mathcal{R}_1(T) = 2/I_\tau$ (para detalles adicionales, véase la Ref. [40]). La Ec. (21) necesariamente se cumple a causa de la definición (24). Tomando su logaritmo obtenemos la desigualdad original del OA

$$2q G(T) - 2 \ln(q) \geq 3 G(T) - \ln 2 \quad (27)$$

con

$$G(T) = \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) = \ln I_\tau. \quad (28)$$

Inmediatamente descubrimos ahora que la Ec. (27) *no puede ser satisfecha por valores arbitrarios de q* , lo cual tiene consecuencias importantes. Por ejemplo, cuando la temperatura va a cero, $G(0) = 0$, y vemos que

$$1 \leq q \leq \sqrt{2}, \quad (29)$$

para poder cumplir con la desigualdad (27). Esto establece una cota superior para q . Las distribuciones de Husimi–escolta con $q > \sqrt{2}$ tendrían razones de participación menores que la unidad a $T = 0$, lo cual es matemáticamente imposible. Para temperaturas mayores que cero la correspondiente cota superior para q varía con T , lo cual queda claro a partir de la Ec. (27). También, para $T \rightarrow \infty$,

$$\gamma_q(z) \rightarrow q\beta\hbar\omega e^{-q\beta\hbar\omega |z|^2}, \quad (30)$$

que nos conduce inmediatamente a $\mathcal{R}_q \rightarrow \infty$, como es de esperar. Para $T = 0$ se tiene que $I_\tau = 1$ y así,

$$\mathcal{R}_q(T = 0) = \frac{2}{q^2} \Rightarrow \text{que para } q = \sqrt{2}, \mathcal{R}_q(T = 0) = 1, \quad (31)$$

y la distribución q -Husimi llega a ser la de un estado puro! Recordemos sin embargo la correspondencia (18). Puede no haber una matriz densidad asociada a tal distribución.

Ilustramos este resultado en la Fig. 1, donde hemos representado R_q en función de $T/\hbar\omega$ para varios valores del índice q . Nótese que la “pureza” aumenta con q y disminuye con T . Esta segunda conclusión es esperada, la primera, en cambio, es un resultado nuevo. Las distribuciones Husimi–escolta alcanzan un alto grado de localización en el espacio de fases a medida que crece q , pero valores muy grandes de q no pueden aceptarse porque conducen a absurdos matemáticos.

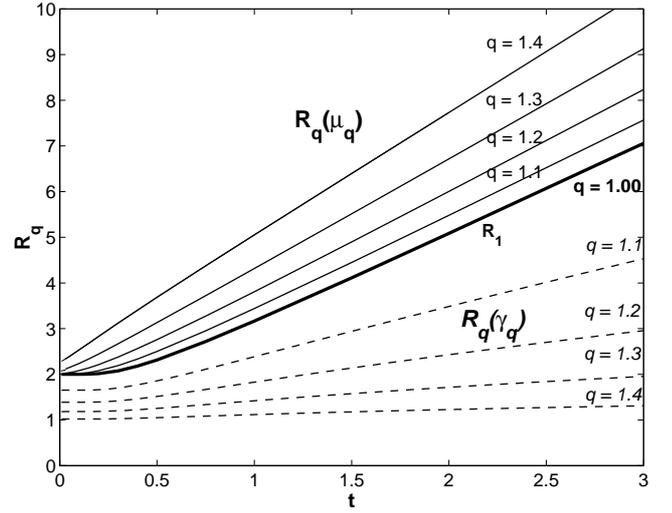


Figura 1: $R_q(\gamma_q)$ vs. t (Línea de puntos) y $R_q(\mu_{q,T})$, vs. t (líneas continuas) con $t = T/\hbar\omega$ para valores de q desde 1.00 hasta 1.40 en intervalos de 0.1.

C. El tema de la localización

Se ha demostrado en Ref. [10] que la medida de Fisher para el OA, I_τ se escribe

$$I_\tau = 1 - e^{-\beta\hbar\omega}. \quad (32)$$

Como la temperatura varía entre cero e infinito, el rango de los posibles valores de la información de Fisher es

$$0 \leq I_\tau \leq 1. \quad (33)$$

Podemos reformular la distribución de Husimi (11) en el lenguaje de I_τ de la siguiente manera

$$\mu(z) = I_\tau e^{-I_\tau |z|^2}, \quad (34)$$

y por lo tanto queda claro que

$$D_\tau \equiv \frac{1}{I_\tau}, \quad (35)$$

es un indicador del ancho Gaussiano y del grado de delocalización relativo en Γ [40]. La medida q -Husimi–Fisher fue evaluada en Ref. [9], e involucra una integral conteniendo distribuciones q -Husimi–escoltas γ_q :

$$I_\tau^{(q)} = q I_\tau, \quad (36)$$

lo cual sugiere definir un indicador de localización escolta

$$D_\tau^{(q)} = \frac{1}{I_\tau^{(q)}} = \frac{D_\tau}{q}, \quad (37)$$

abriendo la posibilidad de *mejorar* la localización en el espacio de fases usando valores de q mayores que uno.

Vemos, con referencia a la Ec. (36), que incrementando q aumenta la localización en el espacio de fases de nuestra distribución de probabilidades. Ciertamente, eligiendo un valor de q suficientemente grande, se puede obtener una DP, para cualquier T con la misma localización en el espacio de fases que la encontrada a $T = 0$ para $\mathcal{R}_q = 1$. Llamamos $q_{crit}(T)$ a estos valores especiales de q . Están graficados, en función de T en la Fig. 2. Notamos que a medida que crece T hay una lenta convergencia a un límite $q_{crit}(T) = 3/2$, correspondiente a $\mathcal{R}_q = 8/9$.

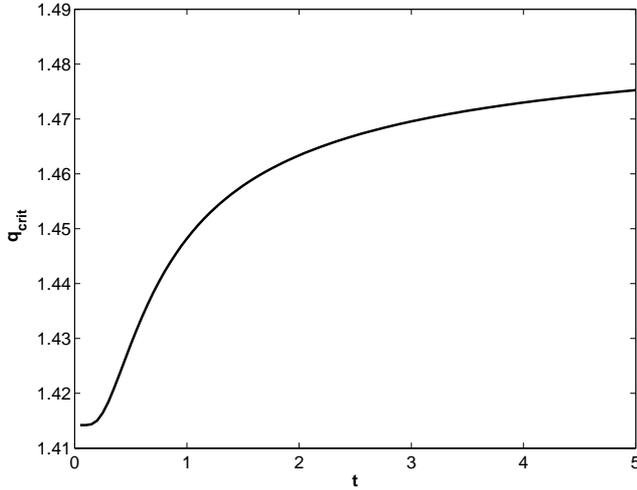


Figura 2: q_{crit} vs. $t = T/\hbar\omega$.

Sin embargo, no hay una matriz densidad física asociada a las correspondientes γ_q . Esto se verifica como sigue: para $\mathcal{R}_q = 1$ tenemos estados puros, y la densidad está dada por el módulo cuadrado de su función de onda asociada $\psi(x)$ ($\phi(p)$) en la representación coordenada (momento). Así, la distribución x -marginal de $\gamma_q(x, p)$, llamémosla F_1 , debe coincidir con la transformada de Fourier de la p -marginal de $\gamma_q(x, p)$ (que denotamos con F_2), ya que el contenido informacional de una función de onda no depende de la representación, si existiera una $\psi(x)$ ($\phi(p)$) subyacente bajo la $\gamma_q(x, p)$. Este no es el caso, como ilustramos en la Fig. 3 donde tal comparación se hace graficando $F_1 - F_2$ para diferentes valores, tanto de T como de q .

V. DISTRIBUCIONES DE HUSIMI EN UN CONTEXTO DEFORMADO

Hasta el momento no se ha hecho referencia al Principio de Máxima Entropía (PME). En esta sección desarrollaremos un método para obtener distribuciones de Husimi usando el PME. El operador densidad ρ_q ha sido obtenido vía MaxEnt por Plastino-Plastino en Ref. [42]. Para la definición de los valores esperados de los operadores adoptamos la elección llamada OLM (por las si-

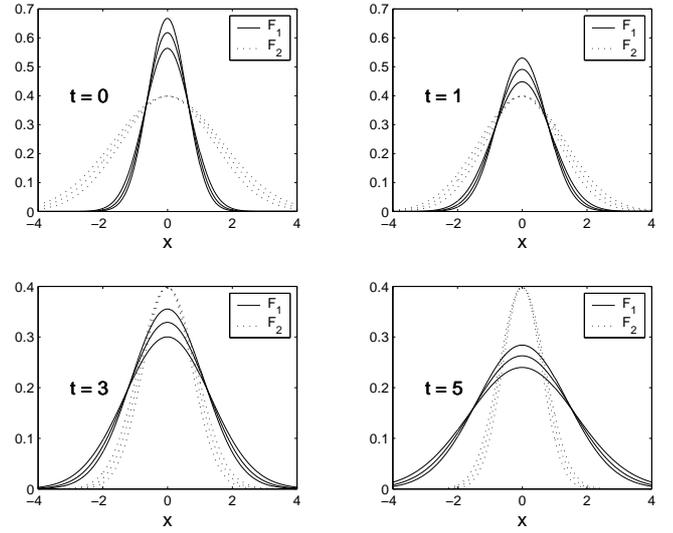


Figura 3: F_1 es la x -marginal de $\gamma_q(x, p)$, y F_2 es la transformada de Fourier de la p -marginal de $\gamma_q(x, p)$, para $q = 1.0, 1.2$ y 1.4 , y para diferentes valores de t .

glas en inglés de Multiplicadores Óptimos de Lagrange). Siguiendo la descripción del conjunto canónico, el operador densidad OLM de equilibrio es [43]

$$\rho_q = \frac{e_q(-\beta(\mathcal{H} - U_q))}{\bar{Z}_q}, \quad (38a)$$

$$\bar{Z}_q = \text{Tr}[e_q(-\beta(\mathcal{H} - U_q))], \quad (38b)$$

donde \mathcal{H} es el Hamiltoniano del sistema, \bar{Z}_q la función de partición y suponemos conocer a priori el valor esperado generalizado de la energía, que en el lenguaje OLM se escribe [43]

$$U_q = \frac{\text{Tr} \rho_q^q \mathcal{H}}{\text{Tr} \rho_q^q}. \quad (39)$$

donde, por supuesto, el operador densidad ρ_q está normalizado ($\text{Tr} \rho_q = 1$). Recurriendo a la transformación de Hilhorst (Véase el apéndice de Ref. [44] para detalles y discusiones) obtenemos una expresión para ρ_q , en términos del operador densidad canónico ρ ,

$$\rho_q = \frac{1}{\bar{Z}_q} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-t} e^{\tilde{\beta} U_q} Z(\tilde{\beta}) \rho(\tilde{\beta}), \quad (40)$$

donde $\tilde{\beta} = t(q-1)\beta$, $\nu = 1/(q-1)$, y el rango de valores del índice de deformación es $q > 1$. La cantidad $Z = \text{Tr} \rho$ es la función partición canónica “verdadera” del operador $\rho = e^{-\beta\mathcal{H}}/Z$, mientras que \bar{Z}_q es una pseudo función partición asociada al operador ρ_q .

Con el objeto de obtener la función de Husimi dentro del marco de trabajo OLM, calculamos antes que nada el valor medio de ρ_q para el estado coherente $|z\rangle$. Esto

es posible hacerlo porque la integral en la Ec. (40) es absolutamente independiente de la elección de los estados coherentes. Suponemos además que $|z\rangle$ son los estados coherentes asociados con el Hamiltoniano \mathcal{H} en cualquier representación. En consecuencia, estamos ahora en condiciones de escribir explícitamente la expresión

$$\begin{aligned} \langle z|\rho_q|z\rangle &= \\ &= \frac{1}{\bar{Z}_q \Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-t} e^{\tilde{\beta} U_q} Z(\tilde{\beta}) \langle z|\rho(\tilde{\beta})|z\rangle, \end{aligned} \quad (41)$$

donde identificamos inmediatamente dentro de la anterior integral la distribución de Husimi ortodoxa $\mu(\beta) = \langle z|\rho(\beta)|z\rangle$ [27]. Por lo tanto, podemos calcular las funciones q -Husimi μ_q en la forma

$$\mu_q(\beta) = \frac{1}{\bar{Z}_q \Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-t} e^{\tilde{\beta} U_q} Z(\tilde{\beta}) \mu(\tilde{\beta}), \quad (42)$$

donde hemos definido $\mu_q(\beta) = \langle z|\rho_q|z\rangle$. Consecuentemente, si conocemos la forma explícita de la función de Husimi ortodoxa, obtenemos μ_q , por medio de Ec. (42), válida sólo para $q > 1$, de acuerdo con la cota que establecimos en la Sec. III.

A fin de evaluar la forma explícita de la distribución q -Husimi, determinamos en primer lugar la pseudo función partición generalizada \bar{Z}_q . En segundo lugar debemos obtener el valor esperado generalizado de la energía U_q . Usando nuevamente la transformación de Hilhorst, se encuentran las relaciones

$$\bar{Z}_q = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-t[1+(1-q)\beta U_q]} Z(\tilde{\beta}), \quad (43a)$$

$$U_q = - \frac{\int_0^\infty dt t^\nu e^{-t[1+(1-q)\beta U_q]} \partial Z(\{\tilde{\beta}\}) / \partial \tilde{\beta}}{\int_0^\infty dt t^\nu e^{-t[1+(1-q)\beta U_q]} Z(\{\tilde{\beta}\})}. \quad (43b)$$

Es instructivo aplicar las ideas precedentes a un ejemplo concreto. En el caso particular del oscilador armónico, para un estado térmico, la función partición puede expresarse de la siguiente manera [28]

$$Z = e^{-\beta \hbar \omega / 2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \beta \hbar \omega} = \frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}, \quad (44)$$

de modo que, reemplazando esto en Ec. (43a), y después de un poco de álgebra obtenemos explícitamente la función partición deformada

$$\bar{Z}_q = \sum_{n=0}^{\infty} e_q\left(\beta(U_q - (n + \frac{1}{2})\hbar\omega)\right), \quad (45)$$

cuya evaluación requiere de integración numérica de la Ec. (43b) para obtener el valor medio de la energía U_q .

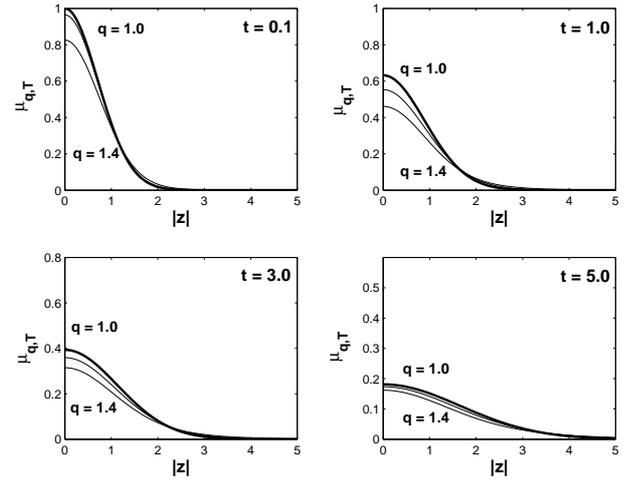


Figura 4: $\mu_q(z)$ vs $|z|$ for four different values of $t = T/\hbar\omega$.

Luego, la distribución q -Husimi del OA se obtiene a partir de las Eqs. (42) y (45), resultando

$$\mu_q(z) = \frac{e^{-|z|^2}}{\bar{Z}_q \Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-t\epsilon_q} e^{-e^{-t(q-1)\beta\hbar\omega}|z|^2}. \quad (46)$$

donde hemos definido $\epsilon_q = 1 + (1-q)\beta(U_q - \hbar\omega/2)$. Nuevamente es necesaria una integración numérica a fin de obtener μ_q . En la Fig. 4 graficamos $\mu_q(z)$ en función de $|z|$ para varios valores de q y T . Mediante integración numérica es fácil verificar que μ_q está correctamente normalizada, o sea $\int (d^2z/\pi) \mu_q(z) = 1$. Recordemos aquí que la correspondencia entre μ_q y μ es biyectiva (Cf. 18).

Las distribuciones de probabilidad $\gamma_q(z)$ y $\mu_{q,T}(z)$ se comportan de manera distinta frente a cambios en q . Un aumento en el valor de q “concentra” la probabilidad en la vecindad del origen en γ_q y la disminuye en μ_q , generando una mayor dispersión.

Por otro lado, ambos tipos de distribuciones de probabilidad responden de manera análoga a incrementos en la temperatura, haciéndose mas anchas y menos altas.

A. Razón de participación en el escenario deformado

Evaluamos nuevamente la razón de participación semi-clásica usando la función q -Husimi (46) de acuerdo a

$$\mathcal{R}_q(\mu_q) = \frac{1}{\int d\Omega \mu_q(z)^2}, \quad (47)$$

que debe ser evaluada en forma numérica, a fin de compararla con Ec. (26) en la Fig. 1. Esta vez, la razón de participación tiene carácter físico.

VI. DIVERGENCIA SEMICLÁSICA DE KULLBACK–LEIBLER

Los resultados obtenidos en las dos secciones previas nos motiva a indagar más en las diferencias entre la distribución de Husimi $\mu(z)$ y su distribución de Husimi escolta asociada $\gamma_q(z)$, mirando las “distancias” entre ambas en el espacio de las probabilidades. Para este fin usamos las bien conocida Divergencia de Kullback–Leibler (DKL) como una medida de la distancia d entre estas dos distribuciones [45]. El primer trabajo donde se trabajó con la DKL en un contexto q fue en Ref. [46]. Para algunas aplicaciones más recientes, véanse por ejemplo, Refs. [47–49].

La DKL se puede formular en forma simétrica. Para simplificar la notación omitiremos el subíndice T en la expresión de γ_q en Ec. (23). Se tiene

$$d(\mu, \gamma_q) = K(\mu \parallel \gamma_q) + K(\gamma_q \parallel \mu), \quad (48)$$

con la divergencia semiclásica de Kullback–Leibler $K(\mu \parallel \gamma_q)$ definida de acuerdo a

$$K(\mu \parallel \gamma_q) = \int d\Omega \mu(z) \ln \left\{ \frac{\mu(z)}{\gamma_q(z)} \right\}, \quad (49)$$

que luego de un poco de álgebra puede reescribirse como

$$K(\mu \parallel \gamma_q) = -(1 - q) - \ln q, \quad (50a)$$

mientras que

$$K(\gamma_q \parallel \mu) = \frac{1}{q} + \ln q - 1. \quad (50b)$$

Finalmente, reemplazando Ecs. (50a), (50b) en Ec. (48), la distancia $d(\mu, \gamma_q)$ llega a ser

$$d(\mu, \gamma_q) = \frac{(1 - q)^2}{q}, \quad (51)$$

que es independiente de la temperatura T . Esta ecuación puede considerarse como una generalización del resultado reportado en la Ec. (20) de la Ref. [49]. Cuando el índice q tiende a la unidad, $d(\mu, \gamma_q) = 0$, como es de esperar.

La distribución $P_0(z) = \gamma_{1,0}(z) = \mu_{1,0}(z)$ es una referencia “natural” para indagar cómo “evolucionan” las correspondientes distribuciones de probabilidad con q y con T . Estudiamos la divergencia de Kullback entre μ_q ó γ_q y P_0 . Las distancias asociadas en el espacio de probabilidades $d(\gamma_q \parallel P_0)$ y $d(\mu_q \parallel P_0)$ definen una superficie en el espacio tridimensional (q, T, d) .

Todas las distancias son calculadas entre una distribución dada en el espacio (x, p) y la distribución P_0 , y son expresadas en unidades U

$$U = d[\mu_{1,1}, P_0]. \quad (52)$$

En la Fig. 5 mostramos $d(\gamma_q, P_0)$ y en Fig. 6 mostramos $d(\mu_q, P_0)$. Vemos que, para la DP μ_q , la distancia es $d = 0$ en $(q, t) = (1, 0)$, y crece monótonamente para ambas

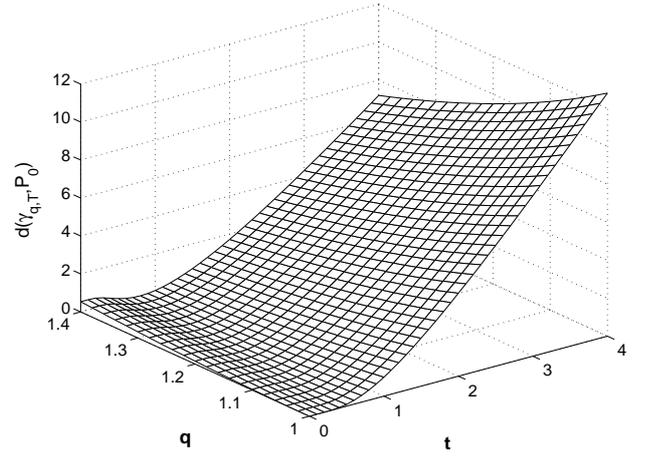


Figura 5: $d(\gamma_q \parallel P_0)$ vs q y T , en unidades de U

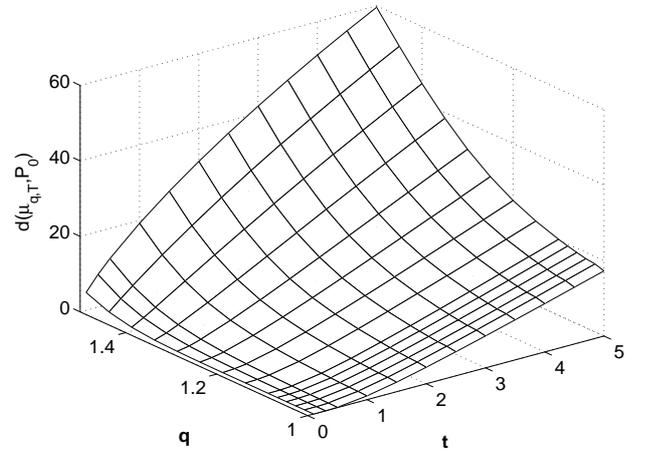


Figura 6: $d(\mu_{q,T} \parallel P_0)$ vs q y T , en unidades de U

variables. Mientras que para la DP γ_q , si $q > 1$ y $T = 0$, la distribución tiene un pico más concentrado que la DP de referencia de modo que sus distancias a P_0 son mayores que cero. Su dispersión aumenta con T hasta que coincide con P_0 para un cierto valor de T . Si T continúa creciendo la dispersión de γ_q se hace mayor que la de P_0 y la distancia entre ambas crece nuevamente. Como resultado de este comportamiento, es que observamos un “valle” en el espacio $q, T, d(\gamma_q, P_0)$. El fondo de este valle corresponde a los valores (q, T) para los cuales $d = 0$ y por lo tanto γ_q es igual a P_0 .

VII. CONCLUSIONES

Hemos estudiado las conexiones entre (1) la aplicación directa del concepto de distribución de Husimi escolta γ_q para un parámetro real q , enfatizando su rol en la localización en el espacio de fases, y (2) la distribución de Husimi μ_q que se obtiene via MaxEnt, de una matriz

densidad deformada ρ_q . Se han obtenido varios resultados nuevos. En particular, enfatizamos los siguientes

- Se estableció una cota inferior $q = 1$ sobre q que se origina en la entropía de Wehrl deformada y en la distribución de Husimi escolta.
- En la sección IV se asignaron cotas superiores a q , sobre la base de una “razón de participación” \mathcal{R}_q , asignada a la distribución de Husimi escolta γ_q . \mathcal{R}_q crece con T pero disminuye a medida que q aumenta.
- El poder de localización de γ_q crece con q .
- En la sección V se derivaron y analizaron distribuciones de Husimi no extensivas μ_q originadas vía MaxEnt cuyas razones de participación tienden a comportarse como la \mathcal{R}_q de la Sección IV frente

a cambios en la temperatura, pero aumentan, en vez de decrecer a medida que q crece. Encontramos diferentes comportamientos frente a q para

1. las distribuciones de Husimi escolta γ_q , construidas de acuerdo a la definición matemática del concepto de distribución escolta, y
2. las distribuciones μ_q obtenidas de acuerdo a la metodología MaxEnt.

Agradecimientos

Los autores agradecen las útiles discusiones con el Prof. A.R. Plastino. F. Pennini agradece el financiamiento parcial de DGIP-UCN 2006. G. Ferri agradece el financiamiento parcial por parte de la FCEN de la UNLPam.

-
- [1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [2] Special Issue, Europhysics-news, **36** (2005); M. Buchanan, *New Scientist* **187**, (2005) 34.
- [3] J. A. Wheeler in *Complexity, entropy and the physics of information*, edited by W. H. Zurek (Adison-Wesley, NY, 1990), p. 3.
- [4] A. Plastino, *Physica A* **340** (2004) 85.
- [5] F. Pennini, A.R. Plastino, and A. Plastino, *Physica A* **258** (1998) 446.
- [6] R.P. Di Sisto, S. Martinez, R.B. Orellana, A.R. Plastino, A. Plastino, *Physica A* **265** (1999) 590.
- [7] C. Tsallis, R.S. Mendes and A.R. Plastino, *Physica A* **261** (1998) 534.
- [8] C. Beck and F. Schlögl, *Thermodynamics of chaotic systems* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993).
- [9] F. Pennini and A. Plastino, *Phys. Lett. A* **326** (2004) 20.
- [10] F. Pennini and A. Plastino, *Phys. Rev. E* **69** (2004) 057101.
- [11] B.R. Frieden, *Physics from Fisher information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1998); *Science from Fisher information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004).
- [12] B.R. Frieden, B.H. Soffer, *Phys. Rev. E* **52** (1995) 2274.
- [13] J. Naudts, *Physica A* **316** (2002) 323.
- [14] E. T. Jaynes in *Statistical Physics*, ed. W. K. Ford (Benjamin, New York, 1963); A. Katz, *Statistical Mechanics*, (Freeman, San Francisco, 1967).
- [15] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52** (1988) 479.
- [16] M. Gell-Mann and C. Tsallis, Eds. *Nonextensive Entropy: Interdisciplinary applications* (Oxford University Press, Oxford, 2004), y referencias que allí se mencionan.
- [17] J. Havrda and F. Charvát, “Quantification method of classification processes. Concept of structural α -entropy”, 1967 *Kybernetika* (Prague) **3** 30.
- [18] I. Vajda, “Igor Axioms for α -entropy of a generalized probability scheme”, 1968 (Czech) *Kybernetika* (Prague) **4** 105.
- [19] Z. Daróczy, “Generalized information functions”, 1970 *Information and Control* **16** 36.
- [20] S. Abe and Y. Okamoto, Eds. *Nonextensive statistical mechanics and its applications* (Springer Verlag, Berlin, 2001).
- [21] A. Wehrl, *Rep. Math. Phys.* **16** (1979) 353.
- [22] S. Gnuzmann, K. Życzkowski, *J. Phys. A* **34** (2001) 10123.
- [23] A. Anderson and J.J. Halliwell, *Phys. Rev. D* **48** (1993) 2753.
- [24] R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.
- [25] J.R. Klauder and B.S. Skagerstam, *Coherent states* (World Scientific, Singapore, 1985).
- [26] J. Schnack, *Europhys. Lett.* **45** (1999) 647.
- [27] K. Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **22** (1940) 264.
- [28] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics* (Pergamon Press, Exeter, 1993).
- [29] E.P. Wigner, *Phys. Rev.* **40** (1932) 749.
- [30] H. W. Lee, *Phys. Rep.* **259** (1995) 147.
- [31] J.J. Włodarz, *Int. J. Theor. Phys.* **42** (2003) 1075.
- [32] R.F. O’Connell and E.P. Wigner, *Phys. Lett. A* **85** (1981) 121.
- [33] S.S. Mizrahi, *Physica A* **127** (1984) 241.
- [34] W. H. Zureck, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 715.
- [35] N. Balazs and B.K. Jennings, *Phys. Rep.* **104** (1984) 347.
- [36] M. Hillery, R.F. O’Connell, M.O. Scully, and E.P. Wigner, *ibid.* **106** (1984) 121.
- [37] E.H. Lieb, *Commun. Math. Phys.* **62** (1978) 35.
- [38] W.J. Munro, D.F.V. James, A.G. White, and P.G. Kwiat, *Phys. Rev. A* **64** (2003) 03030202.
- [39] J. Batle, A.R. Plastino, M. Casas, and A. Plastino, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002) 10311.
- [40] F. Pennini, A. Plastino and G.L. Ferri, *Phys. Lett. A* **359** (2006) 14.
- [41] El oscilador armónico es mucho más que un *mero ejemplo*. Actualmente es de particular interés para la dinámica de átomos fermiónicos o bosónicos contenidos en trampas magnéticas [50–52], y también para sistemas con niveles equidistantes en la vecindad del estado fundamental, como núcleos, o líquidos de Luttinger. Además, la

teoría cuántica de campos está basada en la aproximación armónica [53].

- [42] A.R. Plastino and A. Plastino, *Phys. Lett. A* **177** (1993) 177.
- [43] S. Martínez, F. Nicolás, F. Pennini and A. Plastino, *Physica A* **286** (2000) 489.
- [44] S. Martínez, F. Pennini, A. Plastino and M. Portesi, *Physica A* **332** (2004) 230.
- [45] S. Kullback, *Information Theory and Statistics* (Dover, New York, 1997).
- [46] L. Borland, A.R. Plastino, and C. Tsallis, *J. Math. Phys.* **39** (1998) 6490.
- [47] A. Kowalski, M. T. Martin, A. Plastino, O. A. Rosso, *Int. J. of Mod. Phys.* **19** (2005) 2273.
- [48] M. T. Martin, A. Plastino, O. Rosso, *Phys. Lett. A* **311** (2003) 126.
- [49] Sumiyoshi Abe, *Phys. Rev. E* **68** (2003) 031101.
- [50] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269** (1995) 198.
- [51] K.B. Davis, M.O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3969.
- [52] C.C. Bradley, C.A. Sackett, and R.G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 985.
- [53] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell* (Princeton University Press, Oxford, England, 2003).