ISSN (EN LINEA): 1850 - 1158

NUEVOS DIALOGOS ENTRE DOS CIENCIAS

Roberto Germán Ovejero

Departamento de Física - Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de Salta
Avda. Bolivia 5150 - Salta - Rep. Argentina

Resumen

La Relatividad General de A. Einstein se basa geométricamente en la existencia de un espacio-tiempo tetradimensional dotado de una estructura afín soporte de una métrica pseudo-Riemanniana que permite definir la noción de una distancia que según su signo permite clasificar los intervalos en temporales, espaciales o nulos, lo cual es incompatible con los requerimientos matemáticos de una distancia, que no permiten intervalos nulos, y si bien se presenta como una estructura coherente y bien respaldada por los resultados experimentales, adolece del defecto de no resultar, al menos aparentemente, compatible con la física cuántica.

En este trabajo se sugiere que un cambio en el soporte geométrico de esta teoría, que implica también una reconsideración del soporte matemático de los procesos cuánticos, permitiría compatibilizar ambas ramas de la física.

Palabras clave: Relatividad General, Espacio de Minkowski, Gravedad Cuántica, Espacio Espumoso, Espacio de Fase.

Abstract

The General Relativity of A. Einstein is founded geometrically in the existence of a tetradimensional space-time endowed with an affine structure supporting a pseudo-Riemannian metric that allows to define the notion of a distance that allows to classify the intervals in temporal, spatial or null according to their sign, but the last is incompatible with the mathematical requirements of a distance that don't admit null intervals, and although it is presented like a coherent structure and very supported by the experimental results, it suffers the defect of non to be, at least seemingly, compatible with the quantum physics.

In this work it is suggested that a change in the geometrical support of this theory that also implies a reconsideration of the mathematical support of the quantum processes, would allow to coordinate both branches of the physics.

Key Words: General Relativity, Minkowsky's Space, Quantum Gravity, Foamy Space, Phase Space.

Para realizar este trabajo he elegido referirme al contacto históricamente fecundo de la relación entre la Matemática y la Física.

Ambas ciencias son fundamentalmente diferentes; como dijera alguna vez János Bolyai, uno de los creadores de la Geometría no Euclidea: "de la nada he construido un mundo nuevo". Los matemáticos son demiurgos: tienen el poder de crear. Los físicos, en cambio, deben limitarse a describir las propiedades del mundo que les ha sido dado. El punto de encuentro entre ambas ciencias, es que las dos son producto de la actividad humana, y dentro de este tipo de actividad, a partir de Isaac Newton, la física ha encontrado en la matemática el lenguaje idóneo para expresar sus leyes, pero la utilización de ese lenguaje, ha sufrido y seguirá seguramente sufriendo, la necesidad de adaptarse a las reformas que contínuamente se sucedan en la sintaxis de ese lenguaje, justamente debido a lo prolífico de su capacidad de creación.

Entrando a los aspectos específicos de este trabajo, en homenaje al centenario del "annus mirabilis" de Albert Einstein, entiendo que la formulación matemática de su gran creación, la Relatividad General, debe ser modificada para adaptarse a otro tipo de descripción geométrica, ya que si bien ha sido considerada una teoría matemática y físicamente paradigmática, adolece del defecto de no resultar compatibilizable con el otro gran avance de la Física durante el siglo XX, que es la mecánica cuántica, y al respecto han comenzado a levantarse cuestionamientos acerca incluso de la existencia misma de una estructura geométrica subyacente, como lo expresara Sebastiano Sonego en su artículo "Is there a spacetime geometry?"
(S.Sonego, Phys.let.A 208,1955).

La tesis que sostengo, es que esa geometría existe, pero que no es la propuesta por Minkowski.

Aún a nivel de Relatividad Restringida, que forma parte de los trabajos de Einstein de 1905, esa estructura no se encuentra bien representada por la geometría de Minkowski.

Como se destaca más adelante, aparentemente la estructura geométrica que corresponde al espaciotiempo es la de una variedad simpléctica, lo cual es una muestra de lo antedicho en el sentido que lo prolífico de la matemática al crear nuevas estructuras modifica la sintaxis del lenguaje utilizado para describir los fenómenos físicos, y esto exime de culpa a Minkowski por no haber propuesto una tal estructura para la relatividad de Einstein, ya que el término simpléctico apareció en la literatura científica por primera vez aproximadamente treinta años después de la muerte de Minkowski,en el libro "The classical groups", de H.Weil, publicado por Princeton University Press en 1939, donde en su página 139, el autor, en una nota al pie explica el motivo de la introducción del término.

Debe recordarse que en su trabajo liminar de 1905, Einstein no supuso ninguna estructura geométrica, para desarrollar su trabajo "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento", y sólo posteriormente adoptó las nociones geométricas propuestas por Minkowski. Tanto es así, que en la traducción que realizara Fidel Alsina Fuertes de los trabajos de relatividad de Einstein, que fuera publicada por Emecé, entre la traducción del trabajo de 1905 y la del de 1916, el traductor intercala una sección destinada a desarrollar los aspectos geométricos y su correspondiente representación algebraica, a efectos de introducir al lector en esos aspectos necesarios para abordar la Relatividad General, cuya expresión es necesariamente "à la Minkowski".

Sin entrar a discutir que dado un referencial -el cual no puede ser considerado un entramado de varillas rígidas, ya que la rigidez es incompatible con la relatividad, en virtud de la contracción de Lorentz-, para determinar un evento es necesaria y suficiente una cuaterna numérica, discrepo con que pueda considerarse que dicha cuaterna expresa las coordenadas de un punto en un espacio tetradimensional afín dotado de una noción de distancia euclídea o pseudo euclídea. Teniendo en cuenta una de las consecuencias fundamentales expresada textualmente por Einstein en su trabajo original de 1905, en virtud de la contracción de Lorentz, en el espacio físico esferas se transforman en elipsoides, lo cual resulta totalmente incompatible con una noción de distancia, que es la característica de los espacios euclídeos.

Sin embargo, una tal transformación es perfectamente compatible con las propiedades de un espacio proyectivo tridimensional, que es lo que postulo, al menos localmente, para el espacio físico, y en tal caso, la cuaterna numérica que determina la ubicación de un punto en el espacio tiempo, es la que determina la posición - expresada en las correspondientes coordenadas homogéneasdel punto en el espacio proyectivo tridimensional representativo del espacio físico, de donde resulta que el espaciotiempo es el producto del homeorfismo natural existente entre un espacio proyectivo tridimensional excluido su origen, y un espacio afín tetradimensional.

A este respecto, me parece pertinente recordar lo expresado por Misner, Thorne y Wheeller en su ya clásico texto"Gravitation"(W.H.Freemann &Co., San Francisco, 1973, págs. 1181-1183), del cual traduzco el siguiente párrafo "En todas las difíciles investigaciones que en el transcurso de medio siglo llevaron a alguna comprensión de la dinámica de la geometría, el punto más arduo es también el más simple. El objeto dinámico no es el espacio tiempo. Es el espacio. Sobre este mismo tema a continuación expresan: "Estas consideraciones revelan que los conceptos de espacio tiempo y tiempo no son ideas primarias sino secundarias en la estructura de las teorías físicas".

La diferencia topológica generada por la exclusión del origen permite a través de ese "hueco" introducir las características cuánticas de los procesos físicos a nivel submicroscópico, y revela también que para los objetos masivos representa una "zona de exclusión" alrededor del origen espaciotemporal[1], a la cual la partícula no puede acceder, con lo cual no todo el interior del cono de luz futuro está a su disposición, sino solamente el interior de un hiperboloide tangente a la superficie esférica de la zona de exclusión y asintótica al cono luminoso, lo cual implica automáticamente que el tiempo está cuantizado.

Adimensionalizando el problema mediante la introducción de las unidades naturales de Planck, se destaca sus aspectos puramente geométricos, con lo cual la esfera de prohibición resulta tener como radio la longitud de Planck, que es la longitud de onda de Compton para la masa de Planck, lo cual otorga la estructura espumosa que adquiere el espacio tiempo cuando se intenta cuantificarlo (Cf. Misner et al, op.cit, pp.1202-03, también Smolin L. "Three roads to Quantum Gravity, Basic Books, New York, 2001, pág. 139.), y que representa uno de los cuestionamientos acerca de si puede otor- gársele al espacio tiempo una estructura geométrica.

Puesto que el espaciotiempo construido por el homeomorfismo con el espacio proyectivo tridimensional excluido el origen posee dimensión par, es posible asignarle una estructura simpléctica, como lo hacen Guillemin y Stenberg en "Symplectic techniques in physics", Cambridge University Press.,1993., quienes también muestran cómo las propiedades electromagnéticas del vacío imponen sus características a la geometría tanto del espacio físico cuanto a las del espacio tiempo, como lo muestran en los párrafos que también traduzco:

En la página 131 dicen: "...Por consiguiente, por las propiedades que lo definen, el desplazamiento eléctrico D está dado por una 2-forma en un espacio tridimensional (y no como un campo vectorial como lo prescriben los tratamientos standard)... la relación entre el campo eléctrico E y D en lo que se conoce como un medio homogéneo e isótropo es como sigue: Se postula que existe un sistema de preferencia rectangular (ésto es euclídeo) x, y, z y, por consiguiente un operador bien definido * que relaciona 1-formas a 2-formas

$$dx^* = dy \wedge dz$$
$$dy^* = -dy \wedge dx$$

$$dz^* = dx \wedge dy$$

y por tanto $\mathbf{D} = \epsilon^* \mathbf{E}$, donde ϵ es una función del medio, conocida como su constante dieléctrica. En el vacío, la función ϵ es una constante ϵ_0, conocida como la constante dieléctrica del vacío.

Por tanto, en tres dimensiones el operador * asociado a una métrica Riemanniana determina completamente la métrica.

En la página 140, cuando se refieren al espacio tiempo, dicen. "Las ecuaciones constitutivas pueden escribirse como

$$G = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \times^* F$$

Ahora en cuatro dimensiones el operador * desde Λ^2 a Λ^2 no determina la métrica. La determina a menos de un múltiplo escalar en cada punto. Por consiguiente las propiedades cons- titutivas del vacío determinan la estructura conforme Lorentziana del espacio tiempo." Luego en la página 146, establecen que a través de la fuerza de Lorentz, " El campo electromagnético determina la estructura simpléctica del espacio de fase del espacio tiempo."

La aceptación de la estructura proyectiva para el espacio físico soslaya la incompetencia de una estructura rígida para el establecimiento de un sistema coordenado, pues él se puede introducir utilizando la invariancia de la esfera frente de ondas luminosas para establecer un sistema de referencia en el cual se elige al centro de esa esfera como origen coordenado, su plano polar como plano impropio y las tres aristas de un tetraedro autopolar con un vértice en el origen y los otros tres en el plano impropio como ejes coordenados, a los cuales se parametriza mediante la escala armónica que tiene al cero en el origen, al uno en la intersección con la cuádrica invariante y al punto impropio sobre el plano impropio.

Una ventaja adicional de estas coordenadas, es que permiten automáticamente representar a los vectores de los espacios duales de vectores y covectores (o vectores y 1-formas), mediante familias parametrizadas de puntos sobre una misma recta y familias parametrizadas de planos concurrentes a una misma recta impropia, en forma análoga a lo que hacen Misner et al., en su texto ya citado, donde en vez de hablar de planos parametrizados concurrentes a una misma recta impropia, se refieren a una famila de planos paralelos, lo cual resulta equivalente si la cuádrica es una esfera y el origen coordenado se encuentra en su centro.

Volviendo a la diferencia entre matemáticos y físicos en cuanto a que a los primeros les está permitido crear en forma casi irrestricta, ya que sólo deben respetar la consistencia de sus axiomas, mientras que los segundos deben respetar las normas que se desprenden de la realidad física en la cual están inmersos, un punto esencial, y generalmente omitido, es que si bien el isomorfismo existente entre ambos tipos de espacios, que matemáticamente no tienen uno preferencial o canónico, físicamente esa canonicidad existe para los sistemas linealmente acoplados, siendo su ejemplo más clásico la relación existente entre el vector desplazamiento de una masa adosada a un resorte que satisfaga la ley de Hooke, y la 1-forma fuerza generada por ese desplazamiento, lo cual, en caso de acoplamiento lineal impide elegir como tensor métrico al tensor identidad, confundiendo así con identidad entre ambos espacios el isomorfismo existente entre ellos.[2]

Interpretando el movimiento uniforme como un acoplamiento lineal entre la coordenada espacial y la temporal, surge automáticamente que la relación de acoplamiento es expresable mediante un coseno[3], que para el caso de su aplicación a la relatividad especial implica $\cos\theta = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} \leq 1$, que lleva a simple corolario de la estructura geométrica el postulado Einsteniano de imposibilidad de superar la velocidad de la luz de los cuerpos en movimiento.

Otra consecuencia de tal vez mayor importancia, es que la definición habitual de un espacio de fase como producto cartesiano del espacio de configuración por el espacio de impulsos, resulta inadecuada, dada la diferente naturaleza geométrica de los vectores que los integran: familias de puntos en el caso de los contravariantes pertenecientes al espacio de configuración y de planos, en el de los covariantes pertenecientes al espacio de impulsos, por lo cual previo a la realización de ese producto cartesiano, debe homogeneizarse su naturaleza geométrica, lo cual se logra a través de la dualidad de Hodge que asigna a los vectores de un espacio los de su ortocomplemento, lo cual para el caso de un plano de fase, donde las 2-formas quedan representadas por familias parametrizadas de rectas paralelas concurrentes a un mismo punto impropio, implica la reticulación del plano de fase, lo cual conlleva la posibilidad de definir proyectivamente un área como el número de celdas del retículo encerradas dentro de la curva que delimita el área a medir, a condición de determinar como unitaria al área de la celda del retículo[4].Físicamente, esto es fundamental para la física cuántica, pues otorgando al área de cada celda del retículo representar el cuanto de acción de Planck, la disminución de uno de sus lados implica el proporcional aumento del contiguo, para conservar unitaria al área, y en ésto consiste justamente el principio de Heisenberg.

Este procedimiento manifiesta la ausencia de necesidad de disponer de una longitud para poder definir un área, lo cual ya fue manifestado por Buseman y Kelly en "Projective Geometry and Projective metrics" (MacGraw Hill. New York, 1944), de donde traduzco: "En geometría elemental, el área es definida en términos de distancia. Es destacable sin embargo, que el área puede ser definida en situaciones que son demasiado generales como para permitir una definición de distancia".

Para finalizar con las ventajas del planteo proyectivo para la física cuántica, para así poder volver al tema específico de sus ventajas para la Relatividad General, quiero destacar que los aspectos cuánticos expresados pueden completarse superponiendo a la estructura proyectiva que determina el reticulado del plano de fase, otra correspondiente a una geometría finita sobre la clase de restos módulo 3[5],de lo cual resulta que ese plano, además del reticulado de paralelogramos rectangulares de área unitaria, admite también otro de rombos de igual área, que se integran en hexágonos regulares formado así otro tipo de reticulado admisible. Los rombos integrantes de los hexágonos están compuestos por dos triángulos equiláteros, a los cuales razonablemente debe asignárseles área mitad para cada uno, por lo cual la exigencia de respetar áreas conjuntamente con la de respetar la estructura conforme, permite a la estructura rectangular la existencia de una infinidad numerable de rectángulos de área 1 sobre una misma región de plano, mientras que por el contrario, para el reticulado hexagonal hay un sólo posible triángulo equilátero con área $\frac{1}{2}$ en cada lugar. Puesto que las áreas orientadas son las representativas de las 2-formas, en la interpretación de Misner et al. citada, y físicamente representan el espín de la partícula, en ese lugar pueden coexistir dos triángulos equiláteros recorridos en sentido inverso, que representan a partículas de espin $\frac{1}{2}$, lo cual da soporte geométrico el principio de Pauli.[6]

Retornando a la Relatividad General, en mi opinión su característica geométrica esencial es la curvatura del espaciotiempo, que en su versión Minkowskiana se construye en base al concepto básico de longitud. Alternativamente, puede definirse la curvatura como la relación entre el exceso esférico y el área de un triángulo elemental alrededor del punto del cual se desea conocer su curvatura[7],lo cual permite trabajar utilizando como invariante fundamental al área, al igual que ya lo hiciera hace medio milenio Kepler para expresar su segunda ley.

En varias oportunidades he expresado mis reparos a la forma conque se algebriza habitualmente problemas geométricos[8], pues las propiedades algebraicas pueden no representar fielmente las propiedades geométricas, de donde resulta que se puede utilizar un álgebra incorrecta para una geometría correcta, pero esa falta de fidelidad en la traducción puede operar también en sentido inverso y ocurrir que un álgebra correcta se base en una geometría incorrecta, y estimo que éste es el caso para la Relatividad General, pues si bien insisto en que en el espaciotiempo no se puede definir una distancia, ello no implica que no se pueda definir en cada punto un tensor métrico y obtener a través de él un invariante mediante un producto escalar definido justamente por dicho tensor, pero este producto escalar tiene dimensiones de área y la extracción de su raíz cuadrada para obtener una longitud invariante es sólo lícita si esa área es la de un cuadrado, cosa que evidentemente no ocurre para los versores montados sobre los ejes de un sistema coordenado cualquiera, razón por la cual estimo que no se requiere una modificación esencial para el tratamiento de esta teoría, aún cuando sí para aquellos aspectos que involucren el empleo de distancias invariantes.

APENDICE

Cuando Albert Einstein creó la teoría de la relatividad en el año 1905, intituló su trabajo como "La electrodinámica de los cuerpos en movimiento", y no introdujo ninguna noción geométrica. Posteriormente, Hermann Minkowski verificó que los fenómenos electromagnéticos podían describirse mejor adoptando para la matemática subyacente un espacio tetradimensional, que llamó espacio tiempo, sobre el cual se podía definir un tensor métrico, que como tal permitía pasar del espacio vectorial sobre el cual se modelizaba las posiciones de los puntos de ese espacio, al espacio dual donde debía modelizarse el espacio de las variables dinámicas, representadas por los impulsos conjugados a las variables espaciales. La aplicación de este tensor llevó a la bien establecida expresión del invariante relativista que llamara *"cuadrado del elemento de arco"*, denominación ésta incorrecta,

pues en realidad este invariante posee dimensiones de *área,* que no necesariamente debe ser la de un cuadrado, como ocurre para la representación de los sistemas en movimiento.

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

introduciendo así la noción de *métrica pseudoeuclídea*, de la cual derivó tres clases de intervalos: los temporales, los espaciales y los nulos, cuando $ds = 0$. Es notable que hasta el momento pocos parecen haberse percatado que la definición matemática de distancia, no admite la existencia de intervalos nulos.

Esto no implica una falla en la teoría ni en los métodos matemáticos de su descripción, pero sí en su manera de interpretar algunos aspectos, que conlleva a un error generalizado, y hasta ahora nunca destacado, que consiste en suponer que la existencia de una métrica autoriza automáticamente la existencia de una distancia invariante.

Analizando en detalle, ds^2 que es el invariante de la relatividad, posee dimensiones de área, y en dos dimensiones $ds = +\sqrt{ds^2}$ será un invariante si lo que mide ds^2 es el área de un cuadrado, pero las transformaciones de Lorentz, por tener determinante unitario, si bien conservan las áreas, determinan que el cuadrado unitario en el sistema propio se transforma en un rombo en los sistemas en movimiento, y justamente allí se encuentra la base de sus consecuencias más notables, que son la *contracción de Lorentz* y la *dilatación temporal,* pues al alargarse el metro unidad para permitir que el rombo mantenga su área unitaria, se requiere menos unidades para medir cualquier distancia, y al ser el segundo más largo, se requiere menos segundos para medir un intervalo temporal, que tiende a cero cuando la velocidad del móvil tiende a la de la luz.

La consecuencia de todo ésto, es que si bien la existencia de una métrica introduce naturalmente un invariante, este invariante es el área del paralelogramo construido con los versores del sistema coordenado, cuyo valor coincide con la longitud de cualquiera de sus lados *únicamente si ese sistema es ortogonal,* por lo cual se deduce que la existencia de una métrica no autoriza a introducir una distancia invariante.

Al estudiar la descripción de los fenómenos físicos mediante las correspondientes herramientas matemáticas, encontré un detalle generalmente pasado por alto en los estudios de ambas ciencias, y es que si bien entre los espacios duales de vectores y 1-formas, *matemáticamente* no existe un isomorfismo canónico, cosa que fuera destacada por distintos autores[9], [10], físicamente esa canonicidad existe para los sistemas linealmente acoplados, siendo su ejemplo más clásico la relación entre los *vectores* desplazamiento de una masa adosada a un resorte que satisfa- ga la ley de Hooke, y las *1-formas* fuerzas generadas por esos desplazamientos.

Tradicionalmente se utiliza, tanto en física cuanto en matemática, sistemas coordenados ortogonales, lo cual transforma en *identidad* el *isomorfismo* existente entre los espacios duales mencionados, que resulta matemáticamente justificado ya que la falta de canonicidad expresada anteriormente autoriza a utilizar cualquiera de los tensores métricos que los vinculan, y resulta más cómodo elegir para ello al tensor identidad.

Sin embargo, esa elección resulta peligrosa, pues oculta aspectos que se destacan cuando se mantiene el distingo entre ambos espacios, como ser que la tradicional definición física de *trabajo* como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento, debe reemplazarse por la contracción entre el *vector desplazamiento* con la *1-forma fuerza.*

Matemáticamente, ese ocultamiento es lo que ha mantenido hasta ahora la creencia que la existencia de un tensor métrico implica la existencia de una distancia invariante, cosa que como se destacara previamente es un resultado incorrecto.

La elección del tensor métrico identidad para vincular los espacios duales de vectores y 1-formas, conlleva una pérdida de información que puede inducir, y de hecho ha inducido, a establecer conclusiones erróneas en aspectos importantes de relaciones tanto matemáticas, cuanto físicas.

Referencias.

1. R.Ovejero: “El Soporte Proyectivo de las leyes básicas de la Física”,1^a edición Publicaciones de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNSa., 1991, 5.6 . También en la 2^a edición:

   http://inenco.unsa.edu.ar

   /˜ovejero

2. R.Ovejero,op.cit.,§5.1
3. R.Ovejero,op.cit., §4.2.
4. R.Ovejero,op.cit.,pág. §1.3
5. R.Ovejero,op.cit., §5.5.
6. .R.Ovejero: ,op.cit., §1.8.
7. R.Ovejero,op.cit., Introducción.
8. R.Ovejero: “Sobre ondas y partículas”. Comunicación presentada en la 99^a Reunión Anual de comunicaciones Científicas de la Asociación Física Argentina (Bahía Blanca, 2004), transcripto en en http://inenco.unsa.edu.ar

   /˜ovejero

9. J.Dieudonné: “Algebra lineal”, Publicaciones de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA, Buenos Aires, 1964, pág 17.
10. M.Göckeler & T.Schücker: “Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity”, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, pág 35.
11. R.Ovejero: Op.cit, §3.1.