

## El columpio

Carlos A. Perazzo<sup>1</sup> y Julio Gratton<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup>Universidad Favaloro, Solís 453, 1078, Buenos Aires, Argentina

<sup>2</sup>INFIP-CONICET, Dpto. de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pab. I, Buenos Aires, Argentina.

Los niños aprenden a poner en movimiento el columpio por sus propios medios, es decir sin que nadie los empuje y sin apoyarse en el suelo con los pies, y a gobernar a voluntad la amplitud de las oscilaciones. Sin embargo muchos estudiantes no logran entender en que se funda esta habilidad, y el tema no se trata en los cursos elementales de Física. Aquí presentamos un análisis simplificado del columpio al alcance de los estudiantes de dichos cursos, que pone en evidencia los efectos que permiten poner en movimiento al columpio y regular la amplitud de sus oscilaciones.

Children learn to set in motion the swing on their own, without help and without pushing on the ground with their feet, and to vary at will the amplitude of the oscillations. However many students cannot explain how this is achieved, and the subject is not discussed in the basic Physics courses. Here we present a simplified analysis of the swing for students of these courses, that shows the effects that allow to set in motion the swing and to regulate the amplitude of its oscillations.

### I. INTRODUCCIÓN

Pese a que todos conocen el columpio, muchos no logran explicar en que mecanismos físicos se funda. Los principios físicos involucrados en este juego, esto es, el péndulo doble y la excitación paramétrica, no se suelen tratar en los cursos elementales y sólo se encuentran en textos más avanzados [1]. Discusiones de carácter más simple y cualitativo se pueden encontrar en [2-6] pero se limitan a discutir la excitación paramétrica. Vale la pena pues explicar el funcionamiento del columpio en base a las leyes de Newton y sin cálculos excesivamente complicados. Hay dos aspectos en este problema. El primero es cómo hacer oscilar al columpio a partir del reposo, cuya explicación se puede dar a partir del modelo de un péndulo doble. El segundo es como variar a voluntad la amplitud de las oscilaciones una vez comenzadas, que tiene que ver con la excitación paramétrica.

Recordemos como hace un niño para arrancar a partir del reposo. Supongamos que está sentado (Fig. 1R). Primero echa el torso hacia adelante y recoge las piernas (Fig. 1A) y luego echa el torso hacia atrás y estira las piernas (Fig. 1B). Con esto el columpio se pone a oscilar. El mismo efecto lo consigue si está de pie y sus movimientos consisten en echar hacia adelante la parte superior del cuerpo y hacia atrás la parte inferior, y al revés. ¿Porqué estos movimientos provocan la oscilación del columpio? Observemos la Fig. 1A. El punto  $P$  indica donde las manos toman las cadenas. Cuando el niño realiza el movimiento A la parte inferior del columpio se va hacia atrás y la parte superior hacia adelante. Cuando hace el movimiento B los desplazamientos son al revés (Fig. 1B). Vemos así que el sistema se asemeja al péndulo doble (Fig. 2a), que fue estudiado hace casi tres siglos por Euler y Daniel Bernoulli y merece una breve discusión.

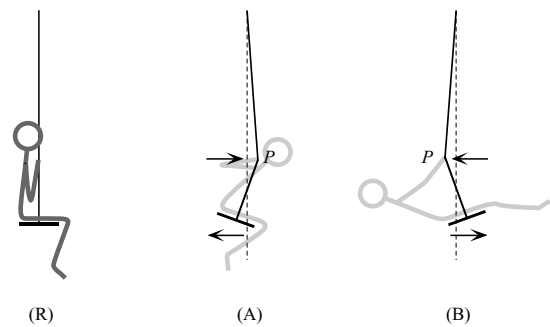


Figura 1: Para salir del reposo (R) el niño echa el torso hacia adelante y recoge las piernas (A), luego echa el torso hacia atrás y estira las piernas hacia adelante (B).

### II. EL PÉNDULO DOBLE

Si  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son muy pequeños las ecuaciones de movimiento del péndulo doble son

$$\begin{pmatrix} (1 - \mu) \frac{d^2}{dt^2} + \omega_1^2 & -\mu\omega_1^2 \\ -\omega_2^2 & (1 - \mu) \frac{d^2}{dt^2} + \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

Las cantidades que figuran en (1) están definidas en la Fig. 2a,  $\omega_{1,2}^2 = g/l_{1,2}$ ,  $\mu = m_2/m$  y  $m = m_1 + m_2$ . Para hallar los modos normales buscamos soluciones del tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos \omega t \\ B \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad A, B = \text{cte.} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2 - (1 - \mu)\omega^2 & -\mu\omega_1^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_2^2 - (1 - \mu)\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

\*Correo electrónico: jgratton@tinfiplfp.uba.ar

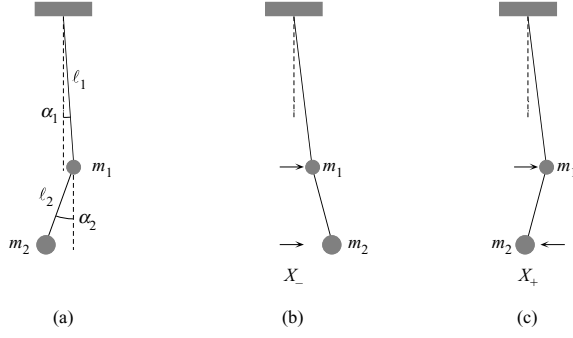


Figura 2: El péndulo doble (a) tiene dos modos normales: (b) en el de baja frecuencia  $X_-$  las masas se mueven en el mismo sentido y (c) en el de alta frecuencia  $X_+$  en sentido opuesto.

Las raíces del polinomio característico son

$$\omega_{\mp}^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{1 - \mu} \left[ 1 \mp \sqrt{1 - 4(1 - \mu) \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2}} \right] \quad (4)$$

Es fácil verificar que  $\omega_-^2$  y  $\omega_+^2$  son siempre reales y positivas. De la (3) resulta

$$\begin{aligned} [\omega_1^2 - (1 - \mu)\omega_-^2] A_- &= \mu\omega_1^2 B_- \\ [\omega_1^2 - (1 - \mu)\omega_+^2] A_+ &= \mu\omega_1^2 B_+ \end{aligned} \quad (5)$$

o bien

$$\begin{aligned} \omega_2^2 A_- &= [\omega_2^2 - (1 - \mu)\omega_-^2] B_- \\ \omega_2^2 A_+ &= [\omega_2^2 - (1 - \mu)\omega_+^2] B_+ \end{aligned} \quad (6)$$

Por lo tanto los modos propios son de la forma

$$\begin{aligned} X_- &= \begin{pmatrix} [\omega_2^2 - (1 - \mu)\omega_-^2] \cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ \omega_2^2 \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{pmatrix} \\ X_+ &= \begin{pmatrix} \omega_1^2 \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \\ [\omega_1^2 - (1 - \mu)\omega_+^2] \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $\varphi_-$  y  $\varphi_+$  son constantes. Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - (1 - \mu)\omega_-^2 &> 0, \quad \omega_2^2 - (1 - \mu)\omega_-^2 > 0 \\ \omega_1^2 - (1 - \mu)\omega_+^2 &< 0, \quad \omega_2^2 - (1 - \mu)\omega_+^2 < 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Luego en el modo  $X_-$  ambas masas se mueven en el mismo sentido (Fig. 2b) y en el modo  $X_+$  oscilan en sentido opuesto (Fig. 2c). En general el movimiento es una combinación lineal de  $X_-$  y  $X_+$  de la forma

$$X = a_- X_- + a_+ X_+ \quad (9)$$

donde las constantes  $a_-$  y  $a_+$  y las fases  $\varphi_-$  y  $\varphi_+$  dependen de las condiciones iniciales.

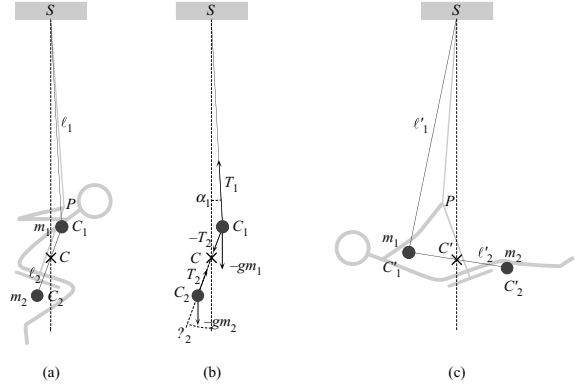


Figura 3: (a): posición de  $m_{1,2}$  y  $C$  para la configuración A; (b): fuerzas sobre  $m_{1,2}$  cuando el niño afloja los brazos; (c): posición de  $m_{1,2}$  y  $C$  para la configuración B.

### III. EL ARRANQUE DEL COLUMPIO

Nuestro sistema no consiste de masas puntiformes ni es un sólido rígido. De hecho los cambios de configuración en los movimientos A y B son esenciales para lograr el efecto deseado. Luego la descripción exacta del arranque es casi imposible. La forma más sencilla de modelar el aspecto esencial del problema (el cambio de la configuración del niño) es mediante dos masas puntuales. Luego dividiremos el sistema en dos partes. En la configuración A la parte 1 (masa  $m_1$ ) consiste de la cabeza, el torso y los brazos (Fig. 3a); sea  $l_1$  la distancia entre el punto de suspensión  $S$  y el punto  $C_1$  donde está concentrada  $m_1$  (notar que  $l_1$  no es la longitud de la parte  $SP$  de las cadenas por encima de  $P$ ). La parte 2 consiste de las piernas y el asiento del columpio; indicaremos con  $m_2$  su masa y con  $l_2$  la distancia entre  $C_1$  y  $C_2$  donde está concentrada  $m_2$ . En la configuración B procederemos igual, pero está claro que ahora  $m_1$  no está concentrada en  $C_1$  sino en otro punto  $C'_1$  y  $m_2$  está concentrada en  $C'_2$  y no en  $C_2$ ; por lo tanto  $l'_1 \equiv SC'_1 \neq l_1$  y  $l'_2 \equiv C'_1 C'_2 \neq l_2$  (Fig. 3c).

Mientras el niño mantiene su configuración el sistema se puede tratar como un péndulo doble. Notar que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son los ángulos entre  $SC_1$  y  $C_1 C_2$  y la vertical y no tienen porqué coincidir con los ángulos entre la vertical y las partes de las cadenas por encima y por debajo de  $P$ . Indicaremos con  $C$  el centro de masa del sistema. Para que el columpio oscile es preciso que el centro de masa, que inicialmente está en reposo (Fig. 1R), se ponga a oscilar. Pero no es evidente que esto se pueda lograr sin una fuerza externa y por el sólo hecho de haber adoptado la configuración A o B. Para ver esto escribamos la ecuación de movimiento del centro de masa. Puesto que  $\alpha_{1,2}$  son pequeños el movimiento de  $C$  (si lo hay) es horizontal. Sea  $x_C = l_1 \alpha_1 + \mu l_2 \alpha_2$  su coordenada horizontal medida a partir de la vertical por  $S$ . La tensión  $T_1 = mg$  es la única fuerza externa cuya componente horizontal

$-mg\alpha_1$  no es nula. Luego

$$\ddot{x}_C = -g\alpha_1 \quad (10)$$

Claramente para mantener el columpio en la posición indicada en las Figs. 3(a) o 3(c) el niño debe ejercer con los brazos una fuerza igual y opuesta a  $-mg\alpha_1$ . Mientras lo hace el sistema queda en reposo, pero tan pronto afloja los brazos  $C$  se acelera. Este es el resultado crucial: basta adoptar la configuración A o la B y dejar al sistema en libertad de moverse para acelerar a  $C$ .

El movimiento que así se produce es una combinación lineal de  $X_-$  y  $X_+$ . Para entender sus características conviene mirar el modelo del péndulo doble desde otro punto de vista, analizando el sistema como un *único* punto material, el centro de masa  $C$ , cuya posición está determinada por su distancia  $l_C$  al punto de suspensión y por el ángulo  $\alpha_C$  entre  $SC$  y la vertical; pero ese punto material tiene un grado de libertad *interno*, descrito por la distancia  $l_2$  entre  $C_1$  y  $C_2$  y por el ángulo  $\alpha_i \equiv \alpha_2 - \alpha_1$  entre  $C_1C_2$  y  $SC$ . Esta forma de interpretar el modelo es equivalente a la anterior, pero facilita la comprensión.

Si el niño no cambia su configuración y oscila pasivamente  $l_C$  y  $l_2$  son constantes y el movimiento del sistema proviene de las variaciones de  $\alpha_C$  y  $\alpha_i$ . Si  $\alpha_1, \alpha_2$  (y  $\alpha_C, \alpha_i$ ) son pequeños se tiene  $l_C = l_1 + \mu l_2$ ,  $x_C = l_C \alpha_C$ ,  $\alpha_1 = \alpha_C - \mu l_2 \alpha_i / l_1$  y  $\alpha_2 = \alpha_C - \alpha_i$ . Usando estas relaciones las (1) se pueden escribir como

$$\ddot{\alpha}_C + \omega_1^2 \frac{l_1}{l_C} \alpha_C - \omega_1^2 \frac{\mu l_2}{l_C} \alpha_2 = 0, \quad (11)$$

$$\ddot{\alpha}_i - \omega_1^2 \frac{l_1}{l_C} \alpha_C + \omega_1^2 \left[ \frac{\mu l_2}{l_C} \alpha_2 + \frac{l_C}{(1-\mu)l_2} \right] = 0$$

que tienen la ventaja que nos permiten entender como varían  $\alpha_C$  y  $\alpha_i$  en los modos  $X_-$ ,  $X_+$ . En términos de  $\alpha_C$  y  $\alpha_i$  los modos propios se expresan como

$$\begin{pmatrix} \alpha_C \\ \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \cos \omega t \\ H \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad G, H = \text{cte.} \quad (12)$$

Sustituyendo en la (11) obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2 \frac{l_1}{l_C} - \omega^2 & -\omega_1^2 \frac{\mu l_2}{l_C} \\ -\omega_1^2 \frac{\mu l_1}{l_C} & \omega_1^2 \left[ \frac{\mu l_2}{l_C} + \frac{l_C}{(1-\mu)l_2} \right] - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} = 0 \quad (13)$$

cuyo polinomio característico tiene las mismas raíces  $\omega_-$ ,  $\omega_+$  dadas por (4). De cualquiera de las (13) resulta

$$\frac{G_-}{H_-} = \frac{\omega_1^2 \mu l_2}{\omega_1^2 l_1 - \omega_-^2 l_C}, \quad \frac{G_+}{H_+} = \frac{\omega_1^2 \mu l_2}{\omega_1^2 l_1 - \omega_+^2 l_C} \quad (14)$$

Es razonable suponer  $\mu \approx 1/2$  y  $l_1/l_2 \approx 5 - 10$ ; con  $\mu = 1/2$  y  $l_1/l_2 = 7$  resulta

$$\begin{aligned} \omega_-/\omega_1 &\cong 0.96, & \omega_+/\omega_1 &\cong 3.88, \\ G_-/H_- &\cong 15, & G_+/H_+ &\cong -0.005 \end{aligned} \quad (15)$$

Luego el movimiento del centro de masa ( $\alpha_C$ ) y el movimiento interno ( $\alpha_i$ ) están acoplados débilmente, de modo que  $X_-$  (para el cual las amplitudes de  $\alpha_C$  y  $\alpha_i$  son  $G_-$  y  $H_-$ ) es básicamente un movimiento del *centro de masa* en el cual el grado de libertad interno juega un rol secundario pues  $\alpha_i \ll \alpha_C$ . En cambio el modo  $X_+$  es esencialmente un movimiento *interno* porque  $|\alpha_C| \ll |\alpha_i|$ .

Es fácil verificar que si el columpio está en reposo en la configuración A o B y en  $t = 0$  el niño afloja los brazos, el movimiento resultante es de la forma  $X = a_- X_- + A_+ X_+$  con  $a_-/a_+ \approx 0.075$ , que la amplitud de  $\alpha_C$  es del orden del valor inicial de  $\alpha_1$  y su frecuencia es menor pero cercana a  $\omega_1$ . En cuanto al movimiento interno su amplitud es aproximadamente seis veces la de  $\alpha_C$  pero su frecuencia es mucho mayor (del orden de  $\omega_+$ ).

En conclusión los movimientos iniciales del niño excitan el modo  $X_-$  y por lo tanto hacen oscilar el centro de masa, con lo cual el columpio arranca.

#### IV. LA AMPLIFICACIÓN DE LAS OSCILACIONES

Para controlar la amplitud de oscilación hay que aumentar la amplitud de  $X_-$  que es responsable del movimiento del centro de masa. Esto se logra acercando o alejando  $C$  de  $S$  al compás de las oscilaciones. Como la frecuencia de  $X_-$  es muy diferente a la del modo  $X_+$ , a medida que  $X_-$  se amplifica las oscilaciones de alta frecuencia presentes en el arranque pierden relevancia y finalmente desaparecen. Ya que el grado de libertad interno juega un rol secundario en  $X_-$  al discutir la amplificación podemos prescindir del modelo del péndulo doble y tratar el sistema como un péndulo simple cuya longitud  $l$  es variable pues depende de la distancia entre  $C$  y  $S$ . Notar que cuando la amplitud de las oscilaciones se hace grande la aproximación de ángulos pequeños deja de valer, luego para tratar la amplificación no podemos usar el método de los modos propios sino que se requiere un tratamiento no lineal. En síntesis, para estudiar la amplificación trataremos al sistema como un péndulo simple no lineal de *longitud variable*.

Estudiaremos el movimiento desde el referencial (no inercial) del columpio. Supongamos que el niño se hamaca parado y que la masa está concentrada en  $C$ . Sea  $l$  la distancia entre  $C$  y el eje de giro en la posición de piernas encogidas (punto 1 de la Fig. 4). En el referencial móvil la energía mecánica es  $E = V_g + V_c$  donde  $V_g = mgl(1 - \cos \alpha)$  es la energía potencial gravitatoria y  $V_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2$  es la energía potencial centrífuga; las fuerzas en la dirección de  $l$  son la componente del peso  $F_g = mg \cos \alpha$  y la fuerza centrífuga  $F_c = ml\dot{\alpha}^2$ . Ambas se equilibran con la tensión de las cuerdas. Al llegar al punto más bajo de su trayectoria (punto 2 de la Fig. 4) el niño extiende las piernas,  $C$  se acerca al eje de giro y  $l$  toma el valor  $l' = l - \delta l$ . Supondremos que  $\delta l$  es pequeño y que el cambio de configuración es instantáneo. Si  $l$  varía  $F_g$  y  $F_c$  trabajan y los cambios de  $V_g$  y  $V_c$  son

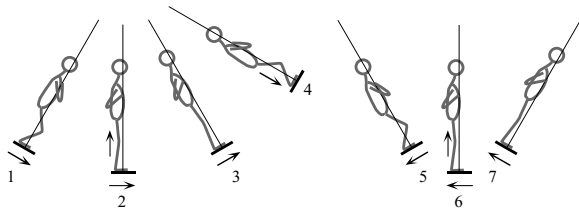


Figura 4: Al estirar (2 y 6) y encoger (4) las piernas el niño acerca y aleja  $C$  del eje de giro y varía la energía mecánica del sistema.

$\delta V_g = F_g \delta l$  y  $\delta V_c = F_c \delta l$ . En el punto 2 se tiene que  $\alpha = 0$  y  $\dot{\alpha}^2 = 2g(1 - \cos \alpha_0)/l$ , donde  $\alpha_0$  es la amplitud de la oscilación. Por lo tanto la variación de la energía mecánica es

$$\delta E' = \delta V_g + \delta V_c = mg\delta l[1 + 2(1 - \cos \alpha_0)] > 0 \quad (16)$$

Al llegar al punto de máxima elongación  $\alpha = \alpha_0$  (punto 4 en la Fig. 4) el niño flexiona las piernas y con eso aleja en  $\delta l$  al centro de masa del eje de giro, volviendo a la distancia inicial. Pero ahora  $\dot{\alpha} = 0$  y por lo tanto  $\delta V_g = mg\delta l \cos \alpha_0$ ,  $\delta V_c = 0$  y la variación de la energía mecánica es

$$\delta E'' = -mg\delta l \cos \alpha_0 < 0 \quad (17)$$

Así el niño recuperó su configuración inicial, pero la energía sufrió un aumento neto

$$\delta E = \delta E' + \delta E'' = 3mg\delta l(1 - \cos \alpha_0) \quad (18)$$

Esa es la ganancia de energía en la media oscilación hacia adelante. Si se repiten los movimientos en la siguiente media oscilación (puntos 5, 6 y 7 en la Fig. 4) se tendrá otro aumento igual de la energía mecánica. Luego en una oscilación completa el aumento de energía es

$$\Delta E = 2\delta E = 6mg\delta l(1 - \cos \alpha_0) \quad (19)$$

La energía mecánica total es  $E = mgl(1 - \cos \alpha_0)$  luego su variación relativa es

$$\Delta E/E = 6\delta l/l \quad (20)$$

Este proceso (denominado excitación paramétrica) es muy eficiente pues la energía aumenta en progresión geométrica, lo que explica porqué con pocos enviones se logran oscilaciones de gran amplitud.

Si el niño realiza los movimientos al revés, esto es si encoge las piernas cuando llega a 2 y las estira al llegar a 4 los signos de  $\delta E'$ ,  $\delta E''$  y  $\Delta E$  se invierten: el columpio pierde energía y disminuye la amplitud de las oscilaciones. Conviene aclarar que el niño puede lograr la excitación paramétrica columpiándose sentado, pero el desplazamiento del centro de masa es menor y por lo tanto la magnitud del efecto es también menor.

## V. CONCLUSIONES

Si bien el funcionamiento del columpio es un problema complejo nuestra discusión permite poner en evidencia a un nivel sencillo los aspectos esenciales. El arranque del columpio se puede explicar en términos de la excitación de los modos propios de un péndulo doble, debida a la configuración que adopta el niño. La amplificación, o más en general, la regulación de la amplitud de las oscilaciones, se explica en términos del proceso no lineal de excitación paramétrica debido a los cambios de posición del centro de masa que resultan de los movimientos del niño. Es así como con movimientos sencillos se gobiernan las oscilaciones del columpio. Es importante aclarar que la excitación paramétrica funciona sólo si el columpio está ya oscilando. No sirve para partir del reposo. Para eso es preciso recurrir a la excitación del péndulo doble.

Agradecemos los subsidios PIP 02230 del CONICET, X031 de la Universidad de Buenos Aires y PICTR2002-00094 de la ANPCYT. CAP agradece el apoyo de la Fundación Universitaria Dr. R. G. Favaloro.

- [1] Ver D. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics*, Pergamon, Oxford, 1971; N. Minovski, *Introduction to Non-Linear Mechanics*, J.W. Edwards, Ann Arbor, 1947; E. Routh, *Dynamics of a System of Rigid Bodies*, Dover, New York, 1960; E. Routh, *Dynamics of a System of Rigid Bodies, Advanced Part*, Macmillan, London, 1930; V. Haag, *Oscillatory Motions*, Wadsworth, Cal., 1962.
- [2] S.M. Curry, How Children Swing, *Am. J. Phys.* **44**, 924-926, 1976.

- [3] J. Walker, *The Flying Circus of Physics With Answers*, John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [4] J. Gratton, El columpio, *Física* **1** N° 5, 44-48, 1986.
- [5] J. Walker, How to Get The Playground Swing Going: A First Lesson in The Mechanics of Rotation, *Sci. Ame.* **260**, 106-109, March 1989.
- [6] <http://aci.mta.ca/TheUmbrella/Physics/P3401/Investigations/RealSwing.html>