

# LÍNEAS DE TRANSMISIÓN. UNA INTRODUCCIÓN DIDÁCTICA PARA CURSOS BÁSICOS

R. Vieytes<sup>1,2\*</sup> y C. Moreno<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física FCEyN-UBA INFIP-PLADEMA  
<sup>2</sup>Escuela Superior Técnica Grl. De Div. Manuel N Savio-IESE  
e-mail: [rvieytes@focuslab.lfp.uba.ar](mailto:rvieytes@focuslab.lfp.uba.ar)

En el presente trabajo se exponen didácticamente, y a partir de modelos sencillos, algunas de las características principales de las líneas de transmisión como ser: el significado de su impedancia característica, la velocidad de fase, y la reflexión de señales en los puntos donde hay un salto abrupto de la impedancia característica. También se presenta un estudio de las resonancias que aparecen en los circuitos donde ellas formen parte.

In the present work, and in a didactical approach, starting from very simple models, some of the relevant characteristics for the transmission lines are reported. The lined characteristics are the line impedance, the phase velocity, and the signal reflection at the point where the line impedance is discontinued. Also the resonance that appears in circuits containing transmission lines are studied.

## I. INTRODUCCIÓN

En los textos básicos<sup>(1)</sup> de electricidad y magnetismo se calcula el valor de la capacidad e inductancia, por unidad de longitud, de un sistema formado por dos cilindros conductores coaxiales, al cual comúnmente se lo denomina línea de transmisión coaxial, pero no se discute cómo es el comportamiento de estos sistemas cuando por ellos se transmiten ondas electromagnéticas. En otros textos de electricidad y magnetismo<sup>(2,3)</sup> o enfocados al estudio de la propagación de ondas, por ejemplo la referencia (4), se discuten las características de las líneas de transmisión y en la referencia (5) se puede encontrar una presentación del tema partiendo de una base eléctrica; pero en ninguno de los casos se incluye el estudio del comportamiento de los circuitos en los que las líneas de transmisión forman parte.

Las líneas de transmisión tienen una importante aplicación en el campo de las descargas pulsadas y el de las comunicaciones (transmisión de datos, Ethernet o televisión por cable), es por tanto interesante introducir a los alumnos, a nivel elemental, en el estudio de estos sistemas. Para lograr este objetivo, en la parte II de este trabajo se presenta un modelo para la línea de transmisión desde el punto de vista circuital; éste es lo bastante detallado como para que, a nivel elemental, se puedan explorar algunas de las características principales de estos sistemas. En la parte III se deduce la ecuación diferencial que rige la evolución temporal de la tensión o corriente en la línea. En la parte IV se presenta la propagación de las ondas por ellas, encontrándose expresiones para la impedancia de entrada y de carga de la línea, como así también se introducen el coeficiente de reflexión y transmisión de voltaje, desde el punto de vista circuital. En la parte V se estudian las resonancias en circuitos que contienen líneas, mostrando que el carácter de su impedancia (resistiva, capacitiva o inductiva) se puede modificar variando su longitud (para un estado de carga dado). En la parte VI se detallan los puntos importantes de este modelo, como así también se aclaran algunos

conceptos que usualmente quedan confusos en una primera aproximación al tema por parte de los alumnos.

## II. MODELO CIRCUITAL DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN

Para estudiar la propagación de ondas, o pulsos electromagnéticos, por una línea de transmisión o estudiar el comportamiento de un circuito del cual forme parte, es necesario contar con un modelo para describirla. Si bien alcanzaría con utilizar las ecuaciones de Maxwell con las condiciones de contorno adecuadas, resulta más conveniente recurrir a un modelo circuital de parámetros diferenciales distribuidos. Este modelo será aplicable cuando la longitud característica de la línea:  $d$  (su diámetro, por ejemplo), es mucho menor que la longitud de onda ( $\lambda$ ) de la señal electromagnética que por ella se propaga; de otra manera, la línea de transmisión se podrá aproximar por un modelo de parámetros concentrados para frecuencias menores que una límite  $\nu_b$ , que por ejemplo si  $d \sim 10^{-3}$  m resulta  $\sim 10^{10}$  Hz.

Se propone modelar a la línea de transmisión por una sucesión de celdas de longitud diferencial  $LRCG$  como se muestra en la figura 1.

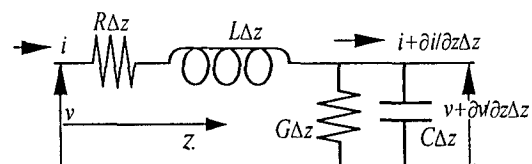


Figura 1: Modelo de parámetros diferenciales distribuidos de una línea de transmisión

Lo habitual es considerar a las magnitudes  $L$  (inductancia),  $R$  (resistencia),  $C$  (capacidad) y  $G$  (conductancia), como cantidades por unidad de longitud. Estas cantidades se pueden calcular a partir de la geometría del sistema, las propiedades de los materiales involucrados y la distribución de corrientes que existan en él. Así, si se utiliza un tester para medir la resistencia de uno de los conductores de la línea obtendríamos como

\* Autor a quién debe dirigirse la correspondencia.

resultado  $IR$  donde  $l$  es la longitud de la misma y si ella esta abierta en sus extremos, utilizando un capacitmetro se mediaría  $IC$ .

Cada uno de los elementos considerados en el modelo tiene en cuenta algún proceso físico a nivel microscópico:  $R$  y  $G$  tienen en cuenta las pérdidas de potencia que ocurren en la línea:  $R$  las que ocurren en los conductores y  $G$  en el dieléctrico.  $R$  aumenta con la frecuencia ya que la corriente tiende a distribuirse en una fina capa desde la superficie del conductor (efecto pelicular o *skin*), en cambio  $G$  tiende a disminuir notablemente en alta frecuencias debido al aumento de la conductividad eléctrica del dieléctrico.

### III. ECUACIÓN DEL VOLTAJE Y LA CORRIENTE EN LA LÍNEA

Las ecuaciones para las diferencias de voltaje,  $v$  y corriente,  $i$ , al cruzar la celda (ver figura 1, en la cual se define también el sistema de referencia) resultan ser:

$$v - \left[ v + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z \right] = (R\Delta z)i + (L\Delta z) \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

$$i - \left[ i + \frac{\partial i}{\partial z} \Delta z \right] = (G\Delta z)v + (C\Delta z) \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2)$$

Tomando el límite para  $\Delta z \rightarrow 0$  se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = - \left( Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = - \left( Gv + C \frac{\partial v}{\partial t} \right) \quad (4)$$

Derivando la ecuación (3) respecto del tiempo  $t$ , la ecuación (4) respecto de la coordenada espacial  $z$  y resolviendo para la variable  $v$  o  $i$  se llega a la denominada ecuación del telegrafista:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = (RG)\zeta + (RC + LG) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (LC) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}; \quad (5)$$

donde  $\zeta$  representa a  $v$  o a  $i$ . Si se considera que las variaciones del voltaje y la corriente a lo largo de la línea son sinusoidales, las soluciones de la ecuación (5) se pueden buscar proponiendo una solución tipo  $v(z,t) = V(z) e^{j\omega t}$ ,  $i(z,t) = I(z) e^{j\omega t}$ . Encontrándose que  $V(z)$  cumple con la ecuación:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) V \quad (6)$$

cuyas soluciones son de la forma

$$V(z) = A e^{-\gamma z} + B e^{+\gamma z} \quad (7)$$

Donde  $A$  y  $B$  se deben obtener a partir de las condiciones de contorno impuestas a los extremos de la línea. El parámetro

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} \\ &\approx j\omega\sqrt{LC} \sqrt{\left[ 1 - j \left( \frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right) \right]} \end{aligned} \quad (8)$$

se denomina constante de propagación de la línea. En general es un número complejo. Su parte real vale

$$\alpha \approx \frac{\sqrt{LC}}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \quad (9)$$

recibe el nombre de constante de atenuación, e indica cuánto decrece la amplitud de la señal por unidad de longitud como consecuencia de una resistencia y/o una conductancia no nula. Su parte imaginaria:

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \quad (10)$$

conocida como constante de fase, está asociada con la rapidez del cambio de fase de la onda.

Cada uno de los sumandos de la ecuación (7), multiplicados por la exponencial compleja del tiempo, representan ondas de voltaje propagantes, hacia las  $z$  crecientes (la primera) y desde las  $z$  crecientes (la segunda). Si se desea conocer el valor de  $v(z,t)$  a partir de  $V(z)$  se debe emplear alguna de las siguientes relaciones

$$v(z,t) = \text{Re}[V(z) e^{j\omega t}], \text{ o } v(z,t) = \text{Im}[V(z) e^{j\omega t}] \quad (11)$$

dependiendo de la fase inicial empleada. Cabe remarcar que la función  $V(z)$  es en general compleja.

La expresión que se obtiene para  $I(z)$  resulta ser:

$$I(z) = \frac{A e^{-\gamma z} - B e^{+\gamma z}}{Z_0} \quad (12)$$

La cantidad que figura en el denominador de la ecuación (12), se conoce con el nombre de impedancia característica  $Z_0$ , y su expresión en términos de los parámetros de la línea es:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (13)$$

Al igual que  $\gamma$ ,  $Z_0$  depende de la geometría de la línea, el material con que está construida y la frecuencia de trabajo.

En general los valores de  $Z_0$  están estandarizados. Para líneas coaxiales los valores más usados son 50  $\Omega$  (radio difusión y Ethernet), 75  $\Omega$  (televisión por cable), 93  $\Omega$  (vídeo); y para la vieja televisión, o las antenas de FM las bifilares de 300  $\Omega$ .

La velocidad de fase, de las ondas que se propaguen por la línea está dada por  $v_\phi = \omega/\beta$ . Esto quiere decir que si  $l$  es la longitud total de la línea, el tiempo que tarda en recorrerla un punto arbitrario de la onda será

$$t_r = l/v_\phi = \beta l/\omega \quad (14)$$

Este tiempo, que también se conoce como tiempo de retraso, tránsito o longitud eléctrica de la línea, resulta ser dependiente de la geometría y materiales con que esta construida la línea.

Lo discutido hasta aquí, debe ser ampliado, ya que en todo lo hecho se consideró que los parámetros ( $RLGC$ ) son constantes, y como se ha comentado pueden depender de la frecuencia. Sin embargo, el modelo presentado, seguirá siendo válido mientras que la línea sea uniforme, tanto en su geometría como en su composición, es decir, que, matemáticamente, los parámetros del modelo  $R, L, G$  y  $C$  no dependen de  $z$  ni de  $t$ . Las ecuación (5) y su soluciones ((7) y (12)) serán validas para cada frecuencia.

Si la línea tiene pérdidas, la velocidad de fase es función de la frecuencia, lo cual indicaría que si se pretende estudiar la propagación de un pulso (compuesto

por una distribución de frecuencias  $A(\omega)$  cada componente lo hará a una velocidad diferente con lo cual, al cabo de un tiempo, el pulso se deformará. El estudio de la propagación de ondas o pulsos en líneas con pérdidas está fuera de los alcances de este trabajo, por lo tanto nos centraremos al caso sin pérdidas.

Una línea se dice sin pérdidas cuando  $\omega L \gg R$  y  $\omega C \gg G$ , es decir, cuando  $\alpha \sim 0$ .

En esta aproximación, una onda viaja por la línea sin modificar su amplitud. La impedancia característica de la línea será real e independiente de la frecuencia

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (15)$$

La velocidad de fase en este caso es

$$v_\phi = \sqrt{LC} \quad (16)$$

la cual también es independiente de la frecuencia, dicho de otra manera, todas las frecuencias se propagan con la misma velocidad, con lo cual los pulsos no se deforman al propagarse.

Para el caso de la línea sin pérdidas existe una relación sencilla, entre la inductancia y la capacidad total de la línea con la impedancia característica y el tiempo de tránsito, estas son

$$lC = t_r / Z_0 \quad (17)$$

$$lL = Z_0 t_r \quad (18)$$

#### IV. PROPAGACIÓN DE ONDAS EN LÍNEAS

Cuando una línea de transmisión con parámetros  $(RLCG)_1$  se une con otra de parámetros  $(RLCG)_2$  el comportamiento del sistema se obtiene resolviendo la ecuación (5), en cada línea y aplicando las condiciones de contorno adecuadas, que para este caso son pedir la continuidad de la corriente y la tensión en el punto de empalme; físicamente este fenómeno se interpreta diciendo que cuando la onda llega al punto de empalme, parte de ella se transmite, y parte se refleja, es el conocido problema de los "rebotes". Desde el punto de vista circuital, tendremos un medio con impedancia característica  $Z_0$  unido a otro de impedancia característica  $Z_0'$ . Las ondas de tensión (o corriente) que se generan en el punto de empalme, hacen que la razón entre la tensión y la corriente en un punto cualquiera de la línea  $z_a$ , ya no sea  $Z_0$  sino que además de ser función de los parámetros de la línea, dependerá de la impedancia de la otra línea, la frecuencia y la distancia del punto  $z_a$  al punto de empalme. En lo que sigue se calculará esta impedancia y los coeficientes de reflexión y transmisión en los puntos de discontinuidad de  $Z_0$  desde un punto de vista circuital.

##### Coefficiente de reflexión, transmisión e impedancia de entrada de una línea cargada con una impedancia $Z_L$

Supóngase tener una línea, de longitud  $l$ , unida por uno de sus extremos a un generador y por el otro a una impedancia arbitraria  $Z_L$ . Para aplicar los resultados obtenidos se fijará  $z = 0$  en la posición de la carga y la dirección negativa del eje  $z$  de manera tal que el generador se encuentra en  $z = -l$ .

La impedancia de la línea en un punto arbitrario  $z$ , vista desde el generador será entonces

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{A e^{-\gamma z} + B e^{+\gamma z}}{A e^{-\gamma z} - B e^{+\gamma z}} \quad (19)$$

Evaluando esta expresión para  $z = -l$  se obtiene la impedancia de entrada de la línea ( $Z_i$ ), y en  $z = 0$ , la impedancia de carga ( $Z_L$ ):

$$Z_i = Z_0 \frac{A e^{+\gamma l} + B e^{-\gamma l}}{A e^{+\gamma l} - B e^{-\gamma l}}, \quad Z_L = Z_0 \frac{A + B}{A - B} \quad (20)$$

De la última expresión se puede obtener el valor del cociente  $B/A$ , denominado coeficiente de reflexión para el voltaje (en el punto de carga) y se simboliza con  $\rho_v$

$$\rho_v = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (21)$$

Este coeficiente evalúa la fracción del voltaje que se refleja en la carga. Se puede probar que la fracción del voltaje que se transmite (llamada coeficiente de transmisión del voltaje  $\tau_v$ ) vale:

$$\tau_v = 1 + \rho_v = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0} \quad (22)$$

Inmediatamente se ve que si  $Z_L = Z_0$  resulta que  $\rho_v = 0$  y  $\tau_v = 1$ , es decir, la onda no se refleja. Desde el punto de vista de la potencia transmitida por la línea significa que toda la carga recibe toda la potencia, es decir, el generador "ve" a la línea como si fuera de longitud infinita.

Esta es la razón por la cual hay que terminar correctamente los cables que llevan las señales a medir a las entradas de un osciloscopio o una placa de adquisición, de otra manera se estará midiendo la señal de interés más la sucesión de rebotes que se generan en el sistema. También las redes Ethernet tienen un terminal de  $50 \Omega$  en el primer y último elemento de la red; de esta manera las ondas "no se dan cuenta de los extremos", si uno de estos terminales falta, o una placa cambia su impedancia de entrada, se producirán rebotes que rápidamente harán colapsar la red.

Nótese que como en general  $Z_L$  depende de la frecuencia  $\rho_v$  y  $\tau_v$  serán también función de ésta, por lo tanto si por éste sistema se propaga un pulso, cada componente de Fourier de tendrá un coeficiente de reflexión/transmisión distinto, con lo cual el pulso cambiará de forma.

De la ecuación (20) se puede obtener  $Z_i$  en términos de  $Z_0$ ,  $Z_L$ ,  $\gamma$  y  $l$  resultando:

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma l)}{Z_0 - Z_L \tanh(\gamma l)} \quad (23)$$

y si la línea no tiene pérdidas  $\gamma = j\beta$ , entonces la impedancia  $Z_i$  se podrá reescribir como

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 j \tan(\beta l)}{Z_0 - Z_L j \tan(\beta l)} \quad (23')$$

La impedancia de entrada  $Z_i$ , de una línea con una carga puramente resistiva ( $Z_L$  real e independiente de la frecuencia), resulta ser función de la frecuencia. Su carácter (reactivo o resistivo) dependerá del producto  $\beta l$ , o lo que es lo mismo  $\omega t_r$ , en otros términos, la línea podrá comportarse como una resistencia, un capacitor o una

inductancia dependiendo de su longitud y de la frecuencia de la onda que por ella se propaga. También se puede decir que la ecuación (23) o (23') no sólo permite calcular la impedancia de entrada de la línea, sino también la impedancia  $Z_x$  vista en cualquier punto de la línea, sustituyendo en lugar de  $l$  la distancia que hay entre dicho punto y la carga. Es ilustrativo especializar la ecuación (23) en dos casos límites: cuando la línea en  $z = 0$  esta a circuito abierto ( $Z_L = \infty$ ) y cuando esta en cortocircuito ( $Z_L = 0$ )

$$Z_{ca} = Z_0 \coth(\gamma l) \quad (Z_L = \infty) \quad (24)$$

$$Z_{cc} = Z_0 \tanh(\gamma l) \quad (Z_L = 0) \quad (25)$$

A partir de estas últimas ecuaciones se llega a que el producto de la impedancia de la línea cuando está en circuito abierto y cuando está en circuito cerrado es una cantidad igual al cuadrado de la impedancia característica:

$$Z_0^2 = Z_{ca} Z_{cc} \quad (26)$$

Si la línea no tiene pérdidas ( $\alpha \sim 0$ ), las ecuaciones 24 y 25 escritas en función de la frecuencia se reducen a:

$$Z_{ca} = -j Z_0 \cot(\omega t_r); \quad (27)$$

$$Z_{cc} = j Z_0 \tan(\omega t_r). \quad (28)$$

## V. RESONANCIAS EN CIRCUITOS CON LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

El hecho que la impedancia de entrada de una línea sea función de la frecuencia, de su impedancia característica, de su longitud, y de la impedancia de carga, hace que aparezcan fenómenos interesantes cuando se las considera como parte de un circuito eléctrico. En efecto, consideremos un circuito como el presentado en la figura 2, a la línea se la considerará en circuito abierto o cortocircuitada. Las frecuencias de resonancia ( $\omega$ ) de éstos circuitos resultan ser los ceros de la ecuación:

$$\frac{1}{j \omega C} + j \omega L' + R' + Z_i(\omega) = 0 \quad (29)$$

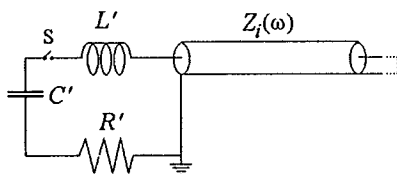


Figura 2: Circuito eléctrico para estudiar las resonancias de una línea de transmisión

La ecuación (29), tiene un número infinito de soluciones las cuales son complejas:  $\omega = \omega_r + j \omega_i$ , y no resultan ser múltiplos de una "frecuencia fundamental" Las frecuencias  $\omega$  resultan ser las frecuencias propias del circuito. La parte real  $\omega_r$  está asociada con la frecuencia de oscilación y la parte imaginaria  $\omega_i$  con la atenuación de dicha oscilación.

Si puede suponerse que  $\omega_r t_r \ll 1$  (aproximación de línea corta) y que la línea no tiene pérdidas, para la configuración en donde está a circuito abierto se encuentra que la primera frecuencia de resonancia es aproximadamente

$$\omega_r^0 + j \omega_i^0 = \sqrt{\frac{1}{L'} \left( \frac{Z_0}{t_r} + \frac{1}{C} \right) - \left( \frac{R'}{2L'} \right)^2} + j \frac{R'}{2L'} \quad (30)$$

La cantidad  $\omega_r^0$  tiene una interpretación muy sencilla, ya que puede reescribirse como:

$$\omega_r^0 = \sqrt{\frac{1}{L'} \left( \frac{1}{lC} + \frac{1}{C} \right) - \left( \frac{R'}{2L'} \right)^2} \quad (31)$$

Esta frecuencia es justamente la correspondiente a la resonancia que resulta en un circuito que tiene dos capacitores ( $C$  y  $lC$  en paralelo) y una inductancia  $L'$ .

Si la línea está terminada en un cortocircuito, la primera frecuencias de resonancia, en la aproximación de línea corta, resulta:

$$\omega_r^0 + j \omega_i^0 = \sqrt{\frac{1}{(L' + Z_0 t_r) C} - \left( \frac{R'}{2(L' + Z_0 t_r)} \right)^2} - j \frac{R'}{2(L' + Z_0 t_r)} \quad (32)$$

La parte real de esta cantidad corresponde a la frecuencia de resonancia de un circuito que tiene una sola capacidad ( $C$ ) y dos inductancias en serie  $L'$  y  $lL$ .

Como último punto se presentaran dos casos muy particulares de resonancia. Se estudiaran dos circuitos, en los que en un análisis simplificado no debería haber resonancias. El primer circuito (A) es similar al de la figura 2, en el cual no está el capacitor  $C$  y la línea esta en cortocircuito. Podría pensarse que el circuito esta formado por dos inductancias:  $L'$  y la de la línea, pero como la impedancia de ésta viene dada por la ecuación (28), habrá un rango de valores para  $\omega t_r$ , tal que  $\tan(\omega t_r) > 0$ , y la línea se comportará como un capacitor, pudiéndose lograr entonces las condiciones para la resonancia. El otro circuito (B), será uno en el que  $L'$  es nula y la línea se encuentra a circuito abierto. Nuevamente un análisis simplificado diría que el circuito esta formado por dos capacitores ( $C$  y el de la línea), y no debería resonar, pero al igual que en el caso (A) habrá un rango de  $\omega t_r$ , para el cual  $\cot(\omega t_r) < 0$  y la línea se comportará como una inductancia. Las frecuencia de resonancia para el circuito (A) y (B) respectivamente resultan de

$$j \omega L' + R' + j Z_0 \tan(\omega t_r) = 0 \quad (33)$$

$$\frac{1}{j \omega C} + R' - j Z_0 \cot(\omega t_r) = 0. \quad (34)$$

## VI. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Algunos puntos importantes a discutir sobre las consecuencias de este modelo son los siguientes:

La impedancia característica, aún en el caso de línea sin pérdidas, no es una magnitud que se pueda medir con un ohmetro (aunque tenga unidades de ohm). La impedancia representa la razón entre la amplitud de la onda de tensión y la amplitud de la onda de corriente en un punto dado, y no el cociente entre la tensión aplicada a la línea y la corriente que por ella circula. Si la línea no tiene pérdidas, la impedancia característica es real y vale  $(L/C)^{1/2}$ , sólo depende de su geometría y el material dieléctrico que la ocupa y es independiente de la resistividad de los conductores.

Las señales en la línea de transmisión se propagan con la velocidad  $v_\phi$  que es menor que la velocidad de la luz en el vacío y esto es importante al momento de querer sincronizar eventos. Para un cable coaxial del tipo RG58 (el utilizado en la mayoría de los laboratorios) la velocidad  $v_\phi$  es de aproximadamente 0,2 m/ns; luego si la señal se genera en un instante  $t_0$  y viaja por un cable de 10 m de longitud, llegará al sistema de medición con un retraso ( $t_r$ ), si registramos varias señales simultáneamente se deberá tener en cuenta estos retrasos (y los propios de los transductores) para ordenar temporalmente los eventos. Estas diferencias son fácilmente medibles con los osciloscopios que se encuentran en los laboratorios de alumnos actuales.

Si la impedancia de carga de una línea de transmisión es resistiva y mayor que su impedancia característica, de la ecuación (21) surge que la onda reflejada tendrá la misma fase que la onda incidente. De la ecuación (22) se obtiene que la onda de voltaje sobre la carga tiene la misma fase y una amplitud mayor que la de la onda incidente, este valor está acotado por  $2A$  cuando la resistencia de carga es mucho mayor que la impedancia característica de la línea. En cambio, si la resistencia de carga es menor, en la onda reflejada habrá un cambio de fase en  $\pi$  (es decir, el voltaje reflejado será de signo opuesto al incidente) y el voltaje sobre la carga no cambiará de signo. Lo comentado hace imprescindible, aun si no se trabaja con pulsos de corta duración, la correcta terminación de los cables que llevan la señal a los sistemas de medición. En efecto, si por un cable de  $50 \Omega$  se lleva al osciloscopio una señal para medir su amplitud, aunque esta sea de baja frecuencia, y si el canal no está terminado en  $50 \Omega$ , se producirá a la entrada del instrumento un rebote, la señal transmitida tendrá una amplitud, aproximadamente el doble que la que llegó a dicho canal y esto muy probablemente introduce un error sistemático en la medición.

Como la impedancia de entrada de una línea depende de su estado de carga, resulta que la unión o bifurcación de líneas no sea una cosa sencilla; los divisores de señal, muy comunes por estos días es las instalaciones hogareñas de TV por cable, no son simples T's, son acopladores de impedancia, de manera que la línea madre (de entrada) "ve" su impedancia característica y se evita así los rebotes que disminuirían la potencia transferida a las distintas ramas de la instalación.

Si la línea, que puede suponerse sin pérdidas, se termina en un cortocircuito o en un circuito abierto, su impedancia de entrada es puramente reactiva ( $\sim jX_i$ ) ecuaciones (27) y (28). En cualquiera de los dos casos, la reactancia puede ser inductiva o capacitiva, dependiendo del valor de  $\beta l = \omega t_r$ , ya que las funciones  $\tan(\omega t_r)$  y

$\cot(\omega t_r)$  pueden tomar valores positivos o negativos. Una línea a circuito abierto se comportará como un capacitor cuando su longitud sea tal que  $(n-1)\lambda/4 < l < n\lambda/4$  (con  $\lambda = 2\pi c/\omega$  la longitud de onda y  $n=1,2,3,\dots$ ), pero se comportará como una inductancia cuando su longitud sea tal que  $n\lambda/4 < l < (n+1)\lambda/4$  ( $n=1,2,3,\dots$ ). Es interesante notar que la reactancia de entrada de líneas terminadas en circuito abierto o cortocircuitadas, son idénticas cuando sus longitudes difieren entre sí por un múltiplo impar de  $\lambda/4$ .

Las frecuencias de resonancia que aparecen en circuitos con líneas de transmisión tienen un período  $T = 2\pi/\omega_r$ , que no se corresponde en forma directa con el tiempo de tránsito en la línea  $t_r$ .

La cantidad de modos que se podrán observar depende del tiempo característico de la excitación del sistema, que en el circuito de la figura 2, es el tiempo de cierre de la llave S. Las frecuencias de resonancia de alto orden, podrán no verse, aún en el caso de contar con un sistema de adquisición adecuado, debido a que la hipótesis de línea sin pérdidas deja de ser válida para altas frecuencias.

El lector interesado en profundizar el tema de las resonancias en circuitos con líneas y el efecto de cierre finito de las llaves puede hacerlo en las referencias 6 y 7 respectivamente.

#### Agradecimientos

Este trabajo se financió parcialmente con fondos del PLADEMA y del subsidio de la Universidad de Buenos Aires (EX071).

#### Referencias

- 1- Feynman R. Leighton R. Sand M. "Física Volumen II: Electromagnetismo y materia" Addison-Wesley Iberoamericana. (1987). Capítulo 24.
- 2- Purcell E. M. "Electricidad y magnetismo" en Berkeley physics Course, volumen 2. Editorial Reverte, Barcelona (1987) Reimpresión 2001.
- 3- Kurrelmayer B. y Mais W., Electricity and Magnetism. van Nostrand, Princeton, NJ, 1967, Capítulo 16.
- 4- Crawford F. Ondas, Berkeley physics course volumen 3. Ed Reverte, Barcelona (1971). Reimpresión 1994.
- 5- Harnwell, G. Principios de electricidad y electromagnetismo. Selecciones científicas. Torres Quevedo, Madrid (1961). Capítulo 14.
- 6- Bruzzone H., Kelly H, Moreno C. IEEE Trans. on Plasma Sci. **18**, (4) pp 689-694, (1990).
- 7- Bruzzone H., Kelly H. y Moreno C. Am. J. Phys. **57**, (1), pp 63-66, (1989).