

EFFECTO DE LA CORRIENTE EN TRANSICIONES DE ISING Y KOSTERLITZ-THOULESS EN REDES DE JUNTURAS JOSEPHSON

Verónica I. Marconi*, Daniel Domínguez
 Centro Atómico Bariloche, 8400 S. C. de Bariloche, Río Negro, Argentina
 (*marcov@cab.cnea.gov.ar)

Estudiamos la dinámica de vórtices en una red cuadrada de Junturas Josephson (RJJ), en un sistema completamente frustrado, $f = 1/2$. Caracterizamos los efectos de la corriente aplicada dc, en las transiciones de fase de Ising y Kosterlitz-Thouless¹. Calculamos el parámetro de orden de Ising, módulo de helicidad en la dirección perpendicular a la corriente aplicada, correlaciones, voltaje longitudinal, vorticidad, parámetro de orden staggered y calor específico. Observamos dos compartamientos bien diferenciados. A corrientes bajas $I < I_c(0)$ se observa una marcada histéresis en las corrientes críticas que explicaría las diferencias entre experimentos, teoría y simulaciones existentes.²⁻⁴ Ambas transiciones ocurren simultáneamente. A corrientes altas $I > I_c(0)$, por encima de la corriente crítica a temperatura nula, las transiciones se separan ampliamente a diferencia de lo muy discutido a corriente nula^{5,6}. Se observa que la temperatura donde se pierde la coherencia superconductor a crece con la corriente aplicada y la temperatura donde cae el orden de Ising decae con la misma.

We study the vortex dynamics in a square Josephson Junction array (JJA), for fully frustrated systems, $f = 1/2$. We characterize current effects for Ising and Kosterlitz-Thouless phase transitions¹. Ising order parameter, helicity modulus perpendicular to the current applied, correlations, longitudinal voltage, vorticity, staggered order parameter and specific heat were calculated. Two different well characterized behaviors were observed: at low currents $I < I_c(0)$ a remarkable hysteresis in critical currents appears. It results a good explanation for the previous differences among experiments, theory and simulations²⁻⁴. Both transitions occur simultaneously. At high currents $I > I_c(0)$, for greater currents than the critical current at zero temperature, the transitions are clearly separated, on the contrary to the widely discussed at zero current^{5,6}. It has been seen an increment with current of the temperature at which superconducting coherence is lost and an opposite behavior in current for the temperature at which Ising order is lost.

I INTRODUCCION

Una red cuadrada bidimensional de Junturas Josephson (RJJ) en un campo magnético perpendicular y uniforme, con medio cuanto de flujo por plaqueta ($f = 1/2$) es una realización del modelo XY completamente frustrado. En este modelo son posibles dos tipos de excitaciones térmicas: a) *Tipo Kosterlitz-Thouless*, posibles debido a la degeneración continua del estado fundamental, es decir, a la rotación global de todas las fases que existe para todo campo magnético aplicado (para todo f). Este tipo de transición consiste de la disociación de pares vórtice-antivórtice (vórtices enteros). A campo nulo¹ ($f = 0$), existe un salto universal en la helicidad del sistema en T_{KT} (Fig.1a)), tal que, $\lim_{T \rightarrow T_{KT}^-} \Upsilon(T) = \frac{2}{\pi} T_{KT}$. b) *Tipo Ising*, estas son excitaciones fraccionarias (paredes de dominio, Fig.1b)), posibles debido a la degeneración del estado fundamental, tipo tablero de damas. Un tema en discusión es la clase de universalidad de la transición a corriente nula en sistemas completamente frustrados.

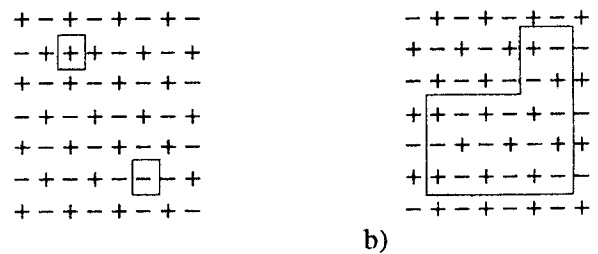


Figura 1. Excitaciones topológicas: (a) Tipo Kosterlitz-Thouless. (b) Tipo Ising.

Aún no existe acuerdo sobre si ambas transiciones van juntas $T_I = T_{KT}$ ⁵, y pertenece la transición a otra clase de universalidad distinta a la de Ising y KT, ó se hallan separadas $T_I > T_{KT}$ ⁶, con una separación muy pequeña. Pero *qué ocurre con las transiciones a corriente finita I?*, responder a esta pregunta es el fin de este trabajo. Principalmente es de gran interés caracterizar las transiciones cuando se aplican al sistema corrientes altas, por encima de la corriente crítica a temperatura nula.

II MODELO

Estudiamos la dinámica de una RJJ utilizando el modelo RSJ^{7,8} para una red cuadrada de junturas. La corriente entre dos islas superconductoras se modela como la suma de una supercorriente Josephson y una corriente normal:

$$I_\mu(\mathbf{n}) = I_0 \sin \theta_\mu(\mathbf{n}) + \frac{\hbar}{2eR_N} \frac{d\theta_\mu(\mathbf{n})}{dt} + \eta_\mu(\mathbf{n}, t) \quad (1)$$

siendo I_0 la corriente crítica de la juntura entre los sitios \mathbf{n} and $\mathbf{n} + \mu$, ($\mu = \hat{x}, \hat{y}$), R_N la resistencia en el estado normal, $\theta_\mu(\mathbf{n}) = \theta(\mathbf{n} + \mu) - \theta(\mathbf{n}) - A_\mu(\mathbf{n}) = \Delta_\mu \theta(\mathbf{n}) - A_\mu(\mathbf{n})$ la diferencia de fase invariante de medida y el último, un término de ruido blanco. $A_\mu(\mathbf{n}, t) = A_\mu^0(\mathbf{n}) - \alpha_\mu(t)$ es el potencial vector, tal que en presencia de un campo magnético externo, $\Delta_\mu \times A_\mu(\mathbf{n}) = 2\pi f$, siendo $f = Ha^2/\Phi_0$ y a el parámetro de red. $\alpha_\mu(t)$ es un término que permite fluctuaciones del voltaje total compatibles con condiciones de contorno periódicas⁹. Utilizando además conservación de corriente en cada nodo: $\Delta_\mu \cdot I_\mu(\mathbf{n}) = \sum_\mu I_\mu(\mathbf{n}) - I_\mu(\mathbf{n} - \mu) = 0$ y medida de Landau ($A_x^0(\mathbf{n}) = -2\pi f n_y$, $A_y^0(\mathbf{n}) = 0$), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones dinámicas de Langevin a simular:

$$\frac{d\theta(\mathbf{n})}{dt} = -\Delta_\mu \cdot [S_\mu(\mathbf{n}) + \eta_\mu(\mathbf{n}, t)], \quad (2)$$

$$\frac{d\alpha_\mu}{dt} = I_\mu - \frac{1}{L^2} \sum_{\mathbf{n}} S_\mu(\mathbf{n}) + \eta_\mu(\mathbf{n}, t), \quad (3)$$

donde $S_\mu(\mathbf{n}) = I_0 \sin[\Delta_\mu \theta(\mathbf{n}) - A_\mu^0(\mathbf{n}) - \alpha_\mu]$, con corrientes normalizadas a I_0 , el tiempo a $\tau_J = 2eR_N I_0/\hbar$, y la temperatura a $I_0 \Phi_0/2\pi k_B$. Este sistema de ecuaciones fue resuelto utilizando el algoritmo de Runge-Kutta-Helfand-Greenside de segundo orden con un paso de tiempo $\Delta t = 0.1\tau_J$. Calculamos las siguientes cantidades físicas: *Coherencia superconductoras transversal* o módulo de helicidad: $\Upsilon_x = \partial^2 F/\partial \delta_x^2$ en la dirección transversal a la corriente dc aplicada:

$$\Upsilon_x = \frac{1}{L^2} \left\langle \sum_{\mathbf{n}} \cos \theta_x(\mathbf{n}) \right\rangle - \frac{1}{TL^4} \left\{ \left\langle \left[\sum_{\mathbf{n}} \sin \theta_x(\mathbf{n}) \right]^2 \right\rangle - \left\langle \left[\sum_{\mathbf{n}} \sin \theta_x(\mathbf{n}) \right] \right\rangle^2 \right\} \quad (4)$$

donde $\Upsilon_x = 0$ implica resistividad finita y $\Upsilon_x \neq 0$ implica coherencia superconductoras. *Transporte*: calculamos la respuesta de transporte de una RJJ como el promedio temporal del voltaje total en la dirección de la corriente aplicada $\mathbf{I} = I\hat{y}$:

$$V = V_y = \langle v_y(t) \rangle = \langle d\alpha_y(t)/dt \rangle \quad (5)$$

con voltajes normalizados por $R_N I_0$. *Estructura de vórtices*: calculamos la vorticidad en la plaqueta $\hat{\mathbf{n}} = (n_x + 1/2, n_y + 1/2)$ como: $b(\hat{\mathbf{n}}) = -\Delta_\mu \times \text{nint}[\theta_\mu(\mathbf{n})/2\pi]$

y el parámetro de orden staggered, útil para visualizar las paredes de dominio, que se define como: $\hat{b}(\hat{\mathbf{n}}) = (-1)^{i+j} b(\hat{\mathbf{n}})$. *Parámetro de orden de Ising*: $|P|^2 = \langle |2/L^2 \sum_{ij} (-1)^{i+j} (b(\hat{\mathbf{n}}) - 1/2)|^2 \rangle$. *Funciones de correlación*: $C_x = 2\langle b_{i,j} b_{i+1,j} \rangle$, $C_y = 2\langle b_{i,j} b_{i,j+1} \rangle$. Estas correlaciones a primeros vecinos son una medida de la longitud de las paredes de dominio en cada dirección.

III RESULTADOS

Realizamos simulaciones numéricas en RJJ completamente frustradas, es decir, correspondientes a un campo magnético alto, $f = 1/2$. Las simulaciones fueron realizadas para distintos tamaños $L \times L$, con $L = 16, 24, 32, 64, 128$. Los resultados que se presentan corresponden en su mayoría a $L=32$ y número total de iteraciones $N_t = 3 \times 10^4$ sumado a un tiempo de equilibración $N_t/2$.

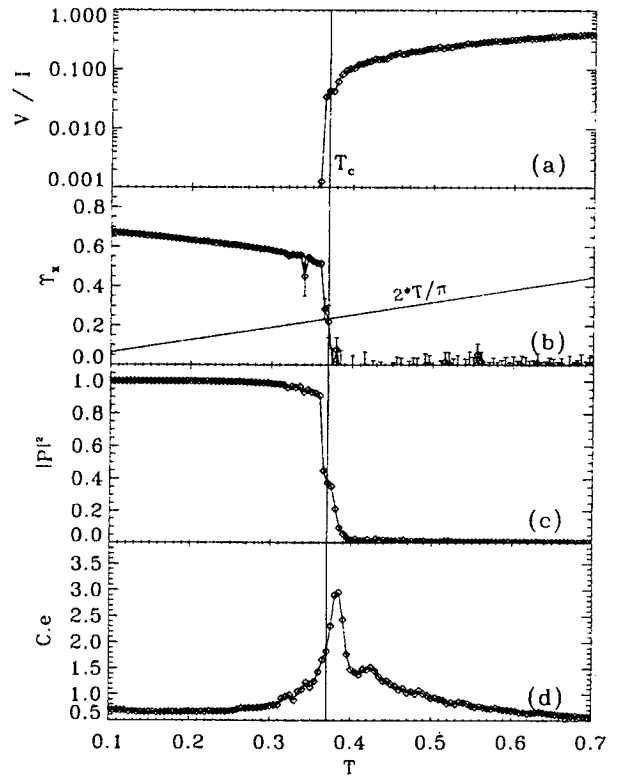


Figura 2. Análisis de distintas magnitudes en función de temperatura, a corrientes bajas $I = 0.1$, en sistemas de 32×32 junturas: (a) Resistividad (V/I). (b) Módulo de helicidad transversal Υ_x . (c) Parámetro de orden de Ising $|P|^2$. (d) Calor específico.

Se estudiaron en función de temperatura dos regímenes de corriente, bajas, correspondientes a $I < I_c(0)$ y corrientes altas, i.e., $I > I_c(0)$, donde $I_c(0)$ es la corriente crítica a temperatura nula. a) *Corrientes bajas*: partiendo del estado fundamental a temperatura nula, conocido como tablero de damas², se subió lentamente la temperatura en pasos $\Delta T = 0.005$ para distintas corrientes

aplicadas. En la Fig.2 mostramos los resultados a corrientes aplicadas muy bajas, $I \ll I_c(0)$, $I = 0.1$. En la Fig.2 a) se observa a una dada temperatura crítica $T_c(I)$ un salto abrupto en la resistividad V/I de casi dos órdenes de magnitud, a la misma temperatura un salto del orden de $2/\pi$ en la coherencia superconductor en la dirección transversal a la corriente aplicada (Fig.2 b)), un caída abrupta a cero del orden de Ising (Fig.2 c)) y un máximo en el calor específico por encima de T_c , el cual crece y se acerca a T_c con tamaños mayores a 32×32 . Es destacable que en todas las magnitudes se evidencia la transición a una misma temperatura T_c .

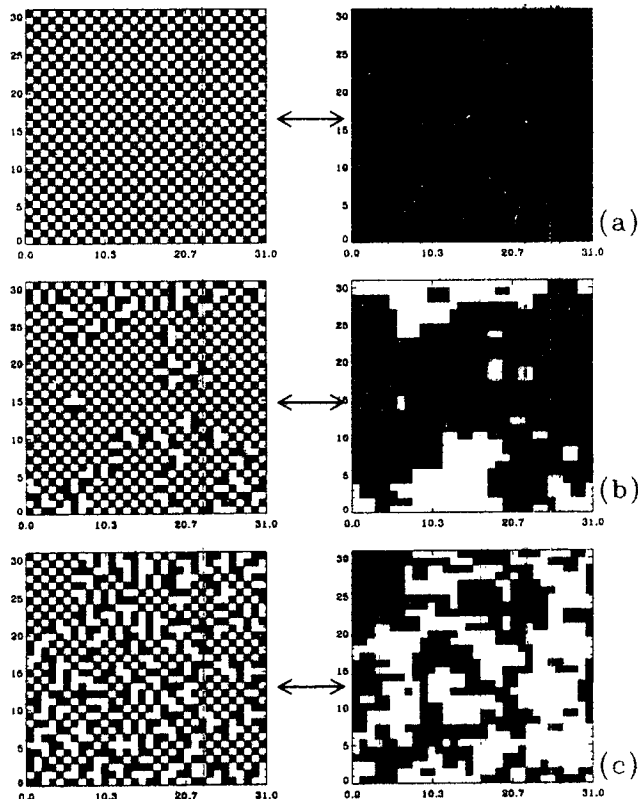


Figura 3. Imágenes de vorticidad (izquierda) y parámetro de orden staggered (derecha) para $I=0.1$. a) $T = 0.2$, $T < T_c$, b) $T = T_c = 0.37$ y c) $T = 0.5$, $T > T_c$.

Para analizar la estructura de vórtices se calcularon vorticidad y parámetro de orden staggered en función de temperatura, los cuales se muestran para $I = 0.1$ en la Fig.3 (a-c). Se observa para $T < T_c$ una estructura completamente ordenada, tipo tablero de damas, como el conocido estado fundamental para $f = 1/2$, y en $T = T_c$ comienzan a surgir las paredes de dominio cuya proliferación aumenta con la temperatura para $T > T_c$.

Para este regimen de corrientes se estudiaron en detalle ciclos de histéresis, con el fin de aclarar las discrepancias conocidas respecto a las corrientes críticas²⁻⁴. Los ciclos en temperatura, tanto para los voltajes como para parámetros de orden de Ising, se muestran en la Fig.4 comparando ciclos a dos corrientes $I = 0.2$ (Fig.4 a) y

b)) e $I = 0.3$ (Fig.4 c) y d)). Se observa que los ciclos de histéresis crecen al subir la corriente, y a medida que la corriente se acerca a $I_c(0) = 0.41$, como en el caso mostrado $I = 0.3$, el estado ordenado no se recupera. Los ciclos fueron realizados de dos modos distintos: i) desde el estado fundamental se subió lentamente la temperatura y al alcanzar un estado de temperatura alta, se volvió a bajar, con igual paso en temperatura al estado fundamental. Estos ciclos son mostrados en la Fig.4, donde se obtiene una $T_{c1}(I)$ bajando en temperatura y una $T_{c2}(I)$ subiendo, tal que $T_{c1}(I) < T_{c2}(I)$. ii) Proceso inverso: partiendo desde un estado desordenado a temperaturas altas, se bajó lentamente la temperatura hasta $T = 0$ y desde el estado alcanzado se volvió a subir la temperatura. De este último modo se obtienen los mismos resultados para $T_{c1}(I)$ y $T_{c2}(I)$ que en el caso i), tanto en el voltaje como en el parámetro de orden de Ising. Es decir que las temperaturas críticas obtenidas no dependen del sentido en que se realice el ciclo de histéresis ni de la cantidad de ciclos.

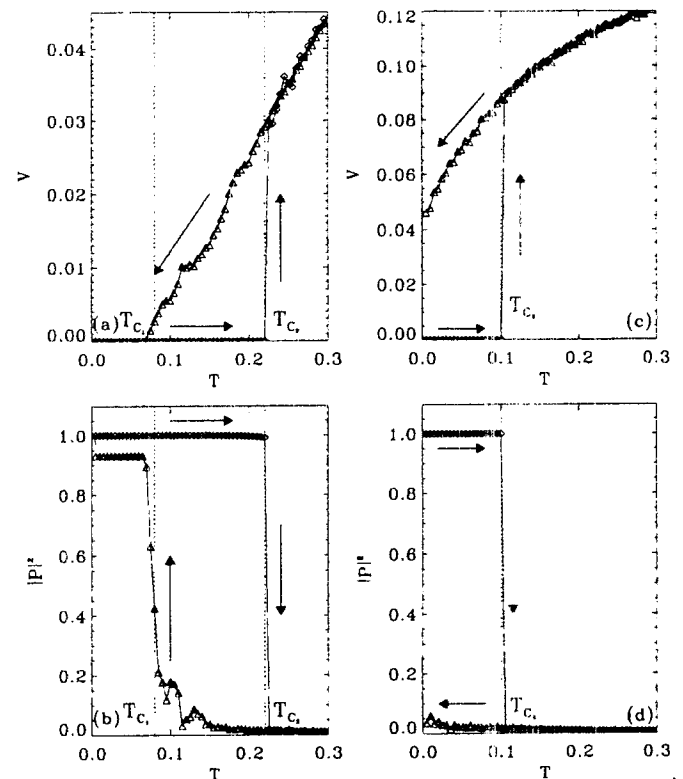


Figura 4. Ciclos de histéresis en temperatura para corrientes bajas, $I < I_c(0)$: (a) voltaje longitudinal, $I = 0.2$, (b) parámetro de orden de Ising, $I = 0.2$, (c) voltaje longitudinal, $I = 0.3$, (d) parámetro de orden de Ising, $I = 0.3$.

Con el fin de comprobar que el comportamiento histéretico en función de la corriente es semejante al encontrado en función de la temperatura, se calcularon curvas corriente-voltaje (IV) y parámetro de orden de Ising vs. corriente para distintas temperaturas. Los resultados para dos dadas temperaturas, se muestran en la Fig.5. A

temperatura baja, $T = 0.02$, se encuentra una corriente crítica $I_{c1}(T)$ al bajar en corriente menor a la $I_{c2}(T)$ obtenida al subir la corriente (Figs. 5 a) y b)). Las corrientes críticas obtenidas de las curvas IV's y del parámetro de orden de Ising son idénticas para todas las temperaturas calculadas. En las Figs.5 c) y d) pueden observarse el mismo tipo de curvas para una temperatura mayor, $T = 0.2$, notando que el ciclo se reduce apreciablemente: I_{c1} se acerca a I_{c2} hasta coincidir para $T > 0.4$. Es notable que en estas cantidades calculadas a temperatura fija, las corrientes críticas encontradas no dependen tampoco del modo en que se realice el ciclo, es decir, comenzando desde un estado ordenado a corriente nula o de uno desordenado a corrientes muy altas, los resultados son los mismos.

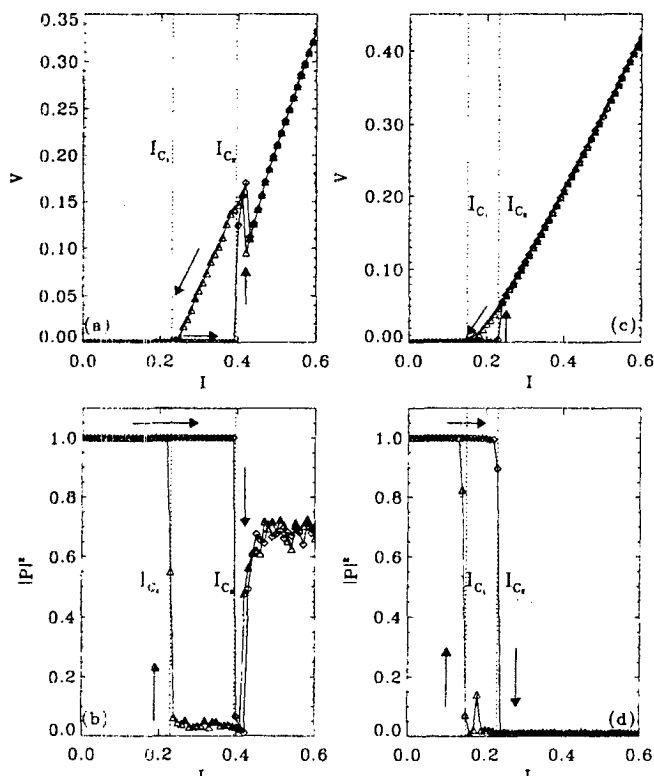


Figura 5. Ciclos de histéresis en corriente a temperatura fija: (a) curva voltaje-corriente (IV), $T = 0.02$, (b) parámetro de orden de Ising, $I = 0.2$, (c) curva IV, $I = 0.2$, (d) parámetro de orden de Ising, $I = 0.2$.

Obtuvimos para este régimen de corrientes bajas, un diagrama de fases corriente-temperatura (I-T), con los valores de $I_{c1}(T)$ e $I_{c2}(T)$ obtenidos de curvas como las mostradas en la Fig.5 y las temperaturas críticas $T_{c1}(I)$ y $T_{c2}(I)$ obtenidas de curvas de voltaje, Υ_x , y parámetro de orden de Ising en función de temperatura, como las mostradas en las Fig.2 y Fig.4. Claramente se observa que a corriente fija las temperaturas críticas coinciden con las corrientes críticas obtenidas en las curvas de transporte a temperatura finita. Este diagrama de fases muestra la existencia de una histéresis considerable a

temperaturas bajas, la cual disminuye al subir la temperatura, hasta llegar a ser despreciable si $T \gtrsim 0.4$. Esto explicaría las diferencias obtenidas a $T = 0$, ya que algunos autores encontraban $I_c(0) = 0.35$ y otros $I_c(0) = 0.41$, lo cual es factible si las condiciones iniciales de la simulación son distintas. Nuestras simulaciones, fueron realizadas tanto para condiciones de contorno periódicas (resultados mostrados) como para condiciones semi-periódicas, es decir, periódicas en la dirección de la corriente aplicada y abiertas en la perpendicular a ésta. Los resultados obtenidos no dependen de las condiciones de contorno elegidas. Se puede concluir de estos resultados que para $I < I_c(0)$ las transiciones de pérdida del orden de Ising y ausencia de coherencia superconductor ocurren *simultáneamente* a una dada T_c , pero con una fuerte dependencia en la historia previa.

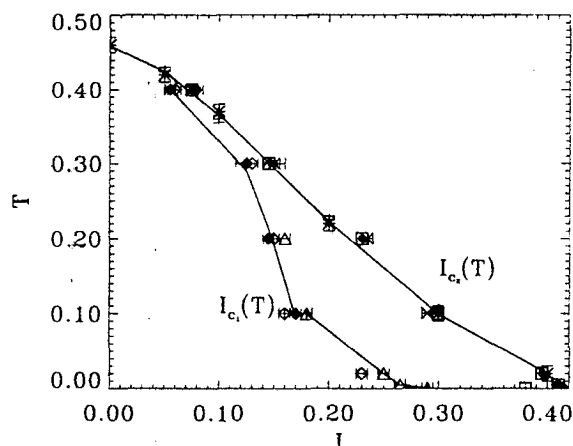


Figura 6. Diagrama de fases a corrientes bajas obtenido de $I_{c1}(T)$ e $I_{c2}(T)$ para distintas temperaturas y de $T_{c1}(I)$ y $T_{c2}(I)$ para distintas corrientes aplicadas.

b) *Corrientes altas*: a corrientes por encima de la corriente crítica se hicieron cálculos semejantes a los mostrados en el régimen de corrientes bajas, observándose una clara diferencia. A corriente finita e $I > I_c(0)$ existen dos transiciones notablemente separadas en temperatura. Primero se pierde el orden de Ising en $T_I(I)$ y a una temperatura mayor $T_{KT}(T)$ se pierde la coherencia superconductor. Esto se evidencia en curvas como las mostradas en la Fig.7, donde se observa para $I = 1.5$ un salto abrupto en la resistividad (Fig.7 a) a la misma temperatura donde se pierde el orden de Ising T_I (Fig.7 b)). A esta temperatura el módulo de helicidad permanece finito hasta anularse, o comenzar a oscilar entorno a cero a una temperatura mayor T_{KT} . En T_I surgen las excitaciones térmicas tipo Ising o paredes de dominio, cuyo movimiento se observa que contribuye fuertemente al aumento brusco de la resistividad. Comparando estos resultados con los mostrados para $I = 0.1$ (Fig.2) se ve que las transiciones se separan ampliamente para el régimen de altas corrientes. De curvas como las mostradas en

la Fig.7 para distintas corrientes, se obtuvo el diagrama de fases correspondiente a este regimen, mostrado en la Fig.8. Se evidencia la separación de las transiciones, la cual es mayor a corrientes más altas, donde el orden de Ising se pierde casi completamente. Resulta interesante destacar que $T_I(I)$ presenta un máximo a corrientes bajas, en $I \sim 0.7$, para luego decaer, casi hasta anularse a corrientes muy altas, $I > 3$. En cambio, $T_{KT}(I)$ crece suavemente con la corriente hasta saturar a un valor constante a corrientes altas. Estudiamos también en este regimen la estructura de vórtices, mediante la vorticidad y parámetro de orden staggered. Por medio de este análisis se obtiene para $T < T_I(I)$ un estructura ordenada, tipo tablero de damas. En $T = T_I(I)$ comienzan a surgir paredes de dominio altamente anisotrópicas y recién para $T > T_{KT}$ se observa cómo surgen además de las excitaciones tipo paredes de dominio, las excitaciones pares vórtice-antivórtice.

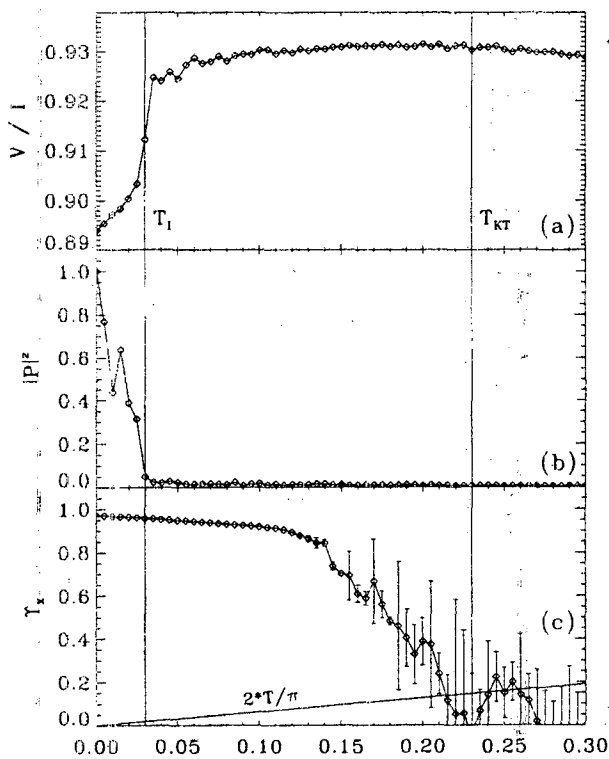


Figura 7. Análisis de distintas magnitudes en función de temperatura, a corrientes altas $I = 1.5$, en sistemas de 32×32 junturas, corriente a la cual las transiciones se separan ampliamente: (a) Resistividad V/I . (b) Parámetro de orden de Ising $|P|^2$. (c) Módulo de helicidad transversal γ_x .

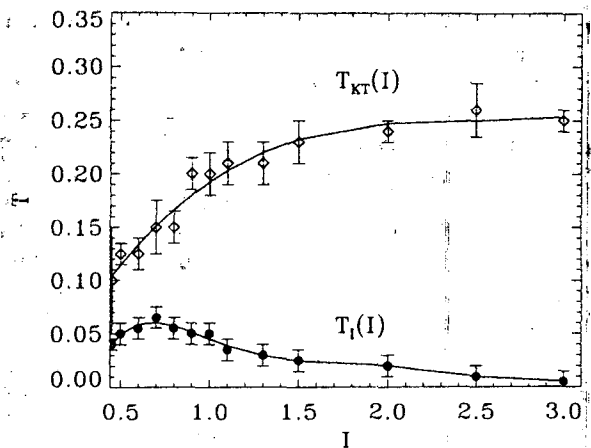


Figura 8. Diagrama de fases a corrientes altas obtenido de $T_{KT}(I)$ y $T_I(I)$ para distintas corrientes aplicadas.

En la Fig.9 se muestran las correlaciones vs. temperatura a corrientes altas, $I = 0.9$. Estas son una medida de la longitud de las paredes de dominio en la dirección correspondiente. Se muestra en la Fig.9 b), la notable anisotropía de los dominios en temperatura, la cual es máxima cuando se pierde el orden de Ising, es decir en $T_I(T)$. Este es otro modo de caracterizar la pérdida del orden de Ising.

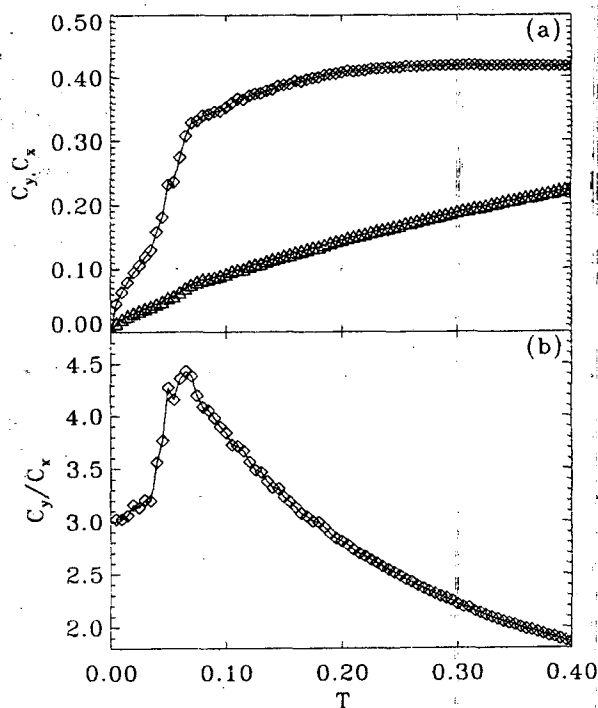


Figura 9. Correlaciones vs. temperatura para $I > I_c(0)$, $I = 0.9$ en un sistema de 32×32 junturas. (a) $C_x(\Delta)$, $C_y(\circ)$, (b) C_y/C_x .

IV CONCLUSIONES

A *corrientes bajas* $I < I_c(0)$: Ambas transiciones ocurren simultáneamente $T_I = T_{KT} = T_c$. Existe una marcada histéresis obtenida en ambos sentidos: (i) a temperatura fija y variando corriente, (ii) o a corriente fija y variando temperatura. A *corrientes altas* $I > I_c(0)$: Las transiciones se separan ampliamente, y *notablemente* la pérdida del orden de Ising es anterior a la caída de la coherencia superconductora, i.e., $T_I < T_{KT}$. Resulta interesante destacar la fuerte anisotropía de las paredes de dominio en función de temperatura, la cual es máxima en T_I , y es útil como caracterización de la transición tipo Ising.

- ¹ J.M. Kosterlitz, D.J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973), J.M. Kosterlitz, **7**, 1046 (1974), D.R. Nelson, and J.M. Kosterlitz, Phys. Rev. Lett **39**, 1201 (1977).
- ² S. Teitel and C. Jayaprakash, Phys. Rev. Lett **51**, 1999 (1983).
- ³ S.P. Benz, M.S. Rzechowski, M. Tinkham, and C.J. Lobb, Phys. Rev. B **42**, 6165 (1990).
- ⁴ K.H. Lee, D. Stroud, and J.S. Chung, Phys. Rev. Lett **64**, 962 (1990), M.V. Simkin, Phys. Rev. B **57**, 7899 (1998), B.J. Kim and P. Minnhagen, Phys. Rev. B **60**, 588 (1999).
- ⁵ G. Ramirez-Santiago and J.V. José, Phys. Rev. B **49**, 588 (1994).
- ⁶ P. Olsson, Phys. Rev. B **52**, 4511, 4526 (1995).
- ⁷ J. S. Chung, K. H. Lee, and D. Stroud, Phys. Rev. B **40**, 6570 (1989); F. Falo *et al.*, Phys. Rev. B **41**, 10983 (1990); N. Grønbech-Jensen *et al.*, Phys. Rev. B **46**, 11149 (1992), P.H.E. Tiesinga *et al.*, Phys. Rev. Lett. **798**, 519 (1997).
- ⁸ D. Domínguez *et al.*, Phys. Rev. Lett. (1991) **67**, 2367; D. Domínguez, Phys. Rev. Lett. **72**, 3096 (1994).
- ⁹ V.I. Marconi, D. Domínguez, preprint cond-mat/0008125.