

Modelos Desacoplados de Caminatas Aleatorias para Superdifusión

Carlos E. Budde, Domingo P. Prato, Miguel A. Ré

Facultad de Matemática, Astronomía y Física - Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria - (5010) - Córdoba - Argentina
e-mail: re@roble.fis.uncor.edu

El comportamiento difusivo de numerosos sistemas dinámicos se caracteriza a través de la dependencia temporal del ancho de la distribución espacial de las partículas al tiempo t , estimado usualmente por el desplazamiento cuadrático medio, según la ley de potencia $\langle x^2 \rangle \sim t^\alpha$ para tiempos largos. El valor $\alpha = 1$, correspondiente a difusión normal, separa los regímenes subdifusivo ($\alpha < 1$) y superdifusivo ($\alpha > 1$). En trabajos previos se ha establecido que en el esquema de caminatas aleatorias de tiempo continuo es necesario que la densidad de tiempos de pausa sea acoplada para obtener procesos superdifusivos con desplazamiento cuadrático medio finito. En la presente comunicación presentamos un criterio generalizado para caracterizar los procesos difusivos, considerando estimadores alternativos del ancho de la distribución y analizando su dependencia temporal para tiempos largos. Esta elección de estimadores alternativos permite la inclusión de densidades de tiempo de pausa desacopladas aún para procesos superdifusivos. En particular se verifica que cuando las densidades de probabilidad para el largo de salto en procesos de un paso exhibe un comportamiento tipo Levy para longitudes de salto grandes se obtiene un comportamiento superdifusivo para densidades de tiempo de pausa totales exponenciales. La discusión planteada se conecta con la estadística generalizada de Tsallis, considerando en particular el segundo momento generalizado de las distribuciones de probabilidad para saltos de un paso. Se verifica que el segundo momento generalizado en función del tiempo, que en este caso resulta finito, puede considerarse como un estimador del ancho de la distribución, exhibiendo la dependencia temporal esperada.

Diffusive behaviour of dynamic systems is often characterized by the temporal dependence of the width of the probability distribution for position at time t , usually estimated by the variance, at long times: $\langle x^2 \rangle \sim t^\alpha$. The value $\alpha = 1$, corresponding to normal diffusion, separates the subdiffusive regime ($\alpha < 1$) and the superdiffusive regime ($\alpha > 1$). As it has been established in previous work in the literature, in the Continuous Time Random Walk scheme it is imperative to use a coupled Waiting Time Density in order to obtain a finite variance in the superdiffusive regime. In this communication we propose a generalization for the analysis criteria by considering alternative finite estimators for the distribution width when the variance diverges and their time dependence at long times. The choice of alternative estimators of the distribution width allows us to consider decoupled waiting time densities even for superdiffusive processes. Particularly it is verified that when the distribution for the one jump length is of Levy type a superdiffusive regime is got for total transition rates with finite mean time. The results are connected with Tsallis' generalized statistics by considering the second generalized moment as the width estimator, which exhibits the right temporal dependence.

Pacs N^o 05.40+j; 05.60.+w; 02.50+Ey; 82.20 Hf

1 Introducción

Una gran variedad de procesos dinámicos en medios desordenados presentan un comportamiento difusivo denominado anómalo⁽¹⁻⁶⁾. Usualmente estos fenómenos son caracterizados por una dependencia no lineal de la desviación standard con el tiempo de la forma $\langle x^2 \rangle \sim t^\alpha$. El valor $\alpha = 1$, correspondiente a difusión normal, separa los regímenes subdifusivo ($\alpha < 1$) y superdifusivo ($\alpha > 1$). Esta denominación es común dado que, para procesos con valor medio nulo, $\langle x^2 \rangle(t)$ es un estimador usual del ancho cuadrático medio de la distribución de probabilidades correspondiente.

Existen numerosos ejemplos de fenómenos subdifusivos observados en sistemas amorfos, tales como

materiales porosos, cristales dopados y estructuras fractales⁽⁷⁻¹⁰⁾.

La difusión anómala superdifusiva es menos frecuente y aparece en la dinámica caótica en sistemas Hamiltonianos y flujos turbulentos en fluidos⁽¹¹⁻¹⁴⁾. Este último caso ha sido estudiado por Monin y Yaglom⁽¹¹⁾ hallando valores de γ cercanos a tres que implican, desde el punto de vista de la dinámica de fluidos, ecuaciones de evolución de tercer orden en el tiempo. La dinámica caótica en el espacio de las fases de sistemas Hamiltonianos, mencionada inicialmente, ha dado origen a ecuaciones cinéticas fraccionarias y es objeto de intenso análisis en la actualidad⁽³⁾.

En trabajos previos⁽⁴⁻⁶⁾ se ha establecido que, en el esquema de caminatas aleatorias de tiempo continuo, es necesario que la densidad de tiempos de

pausa sea acoplada para obtener procesos superdifusivos con desplazamiento cuadrático medio finito. En el presente artículo presentamos un criterio generalizado para caracterizar los procesos difusivos, considerando estimadores alternativos del ancho de la distribución y analizando su dependencia temporal para tiempos largos. Esta elección de estimadores alternativos permite la inclusión de densidades de tiempo de pausa desacopladas aún para procesos superdifusivos. En particular se verifica que cuando las densidades de probabilidad para el largo de un salto exhibe un comportamiento tipo Levy para longitudes de salto grandes se obtiene un comportamiento superdifusivo para densidades de tiempo de pausa totales exponenciales. Estos resultados pueden extenderse para procesos con tiempo medio de transiciones finito. La discusión planteada se conecta con la estadística generalizada de Tsallis^(1,2), considerando en particular el segundo momento generalizado de las distribuciones de probabilidad para saltos de un paso. Se verifica que el segundo momento generalizado en función del tiempo, que en este caso resulta finito, puede considerarse como un estimador del ancho de la distribución, exhibiendo la dependencia temporal esperada. También hemos comenzado el estudio de procesos con tiempo medio entre saltos no definidos o infinitos (denominados también procesos de "cola larga"). Si bien el análisis de estos casos presenta dificultades mayores, nuestros resultados preliminares sugieren una ley potencial para el ancho de la distribución proporcional a $t^{\beta/\gamma}$, donde $0 < \beta < 1$ es el exponente de la distribución para tiempos de saltos y $0 < \gamma < 2$ el exponente de la distribución para el largo de los saltos.

2 El Modelo CTRW

Consideramos una partícula que realiza una caminata aleatoria en un espacio unidimensional infinito acorde a la densidad de tiempos de pausa separable

$$\Psi(x, t) = p(x) \psi(t) \quad (1)$$

donde $p(x)$ corresponde a la densidad de probabilidad para el largo del salto y $\psi(t)$ a la densidad de probabilidad para el intervalo de tiempo entre saltos. Supondremos en general que la densidad de probabilidad $p(x)$ es una función par en x (consideramos una caminata aleatoria simétrica) y que corresponde a los procesos denominados de autoescala caracterizados por el comportamiento asintótico

$$p(x) \sim A^\gamma / |x|^{1+\gamma} \quad (2)$$

para $x \rightarrow \infty$, con $0 < \gamma < 2$ con lo cual estas distribuciones no tienen segundo momento finito. Prato y Tsallis⁽²⁾ han obtenido, partiendo de un principio variacional en el esquema de la termostadística no extensiva, una familia de funciones que presentan este comportamiento asintótico. Estas distribuciones tienen además una expresión analítica explícita en la representación espacial, y dependen de un parámetro q

(ver⁽²⁾) que identifica a cada función, de forma tal que para $\frac{5}{3} < q < 3$ obtenemos valores para el parámetro γ entre 0 y 2, relacionados por $\gamma = (3 - q) / (q - 1)$. Por el momento no supondremos ningún comportamiento particular para la densidad $\psi(t)$, salvo la condición obvia de normalización.

Prato y Tsallis⁽²⁾ han resuelto el problema de la caminata aleatoria de tiempo discreto obteniendo una expresión para la densidad de probabilidad para la posición al cabo de N saltos

$$P_N(x) = p\left(x/N^{1/\gamma}\right) / N^{1/\gamma} \quad (3)$$

en términos de la densidad de probabilidad para el largo de un salto, cuando $0 < \gamma \leq 2$. Para el caso $\gamma \geq 2$ el exponente $1/\gamma$ se reemplaza por $1/2$, aunque no consideraremos aquí dicha situación, ya que la misma no da origen a un comportamiento superdifusivo, como se desprende del tratamiento que sigue a continuación. El resultado se obtiene en el límite de N grande y muestra un cambio de escala en la distribución de probabilidades con N .

Para extender los resultados obtenidos en⁽²⁾ a caminatas de tiempo continuo y prosiguiendo con un trabajo iniciado por los autores⁽¹⁶⁾, consideramos una densidad de probabilidad para el tiempo entre saltos general $\psi(t)$, a partir de la cual introducimos la probabilidad $\Phi_N(t)$ de que se hayan efectuado N saltos al tiempo t , donde

$$\Phi_0(t) = \int_t^\infty dt' \psi(t') \quad (4)$$

es la probabilidad de que el caminante no haya efectuado ningún salto hasta el tiempo t , en tanto que la probabilidad para $N \geq 1$ saltos está dada por el producto de convolución de orden N

$$\Phi_N(t) = \Phi_0(t) * [\psi(t) *]^N \quad (5)$$

Usando estas definiciones y suponiendo (3) válida para todo $N \geq 1$ la extensión a tiempo continuo es directa mediante la expresión

$$P(x; t) = \Phi_0(t) \delta(x) + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\Phi_N(t)}{N^{1/\gamma}} p\left(\frac{x}{N^{1/\gamma}}\right) \quad (6)$$

que determina la probabilidad de encontrar al caminante en el sitio x al tiempo t , independientemente del número de pasos realizados, dado que llegó en $t = 0$ al origen. El primer término toma en cuenta aquellas realizaciones en las que el caminante no ha efectuado salto alguno hasta el tiempo t . Desde que el resultado (3) es válido en general para N grande, la aproximación dada por la ecuación (6) resultará válida en particular para valores de t grandes, cuando los primeros $\Phi_N(t)$ hayan decaído, de forma tal que los valores de N pequeños no contribuyan significativamente a la suma.

Si en particular suponemos que el tiempo entre saltos está descrito por un proceso de Poisson determinado por $\psi(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$, con λ la recíproca

del tiempo medio entre saltos, obtenemos

$$\Phi_N(t) = \frac{(\lambda t)^N}{N!} e^{-\lambda t} \quad (7)$$

con lo cual la transformada de Fourier de (6) resulta

$$P(k; t) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \left[\exp(\lambda t e^{-|k|^\gamma}) - 1 \right] \quad (8)$$

En esta expresión hemos separado la contribución de las realizaciones en las que el caminante no efectúa saltos hasta el tiempo t , en el primer término, de las demás contribuciones en las que el caminante ha efectuado al menos un salto. Si consideramos esta última contribución por separado, encontramos que a tiempos largos ($\lambda t \gg 1$) sólo contribuyen a la transformada inversa de Fourier valores de k pequeños, con lo cual resulta

$$P(x; t) \sim \frac{1}{(\lambda t)^{1/\gamma}} p\left(\frac{x}{(\lambda t)^{1/\gamma}}\right) \quad (9)$$

Vemos así que la densidad de probabilidad para la posición de las partículas al tiempo t (en el límite $\lambda t \gg 1$), exhibe la misma transformación de escala que la obtenida en tiempo discreto, donde el número de saltos N debe sustituirse por λt , el número medio de saltos al tiempo t . Por lo tanto cualquier estimador alternativo a $\langle x^2 \rangle$ que nos permita asignar un valor finito al ancho de la distribución $p(x)$ puede utilizarse para definir el ancho de $P(x; t)$ que a tiempos largos crecerá proporcionalmente a $(\lambda t)^{1/\gamma}$. Algunos criterios posibles para estimar el ancho de la distribución son la recíproca de $\tilde{P}(x; t) = P(x; t) - \delta(x) \Phi_0(t)$ (descontamos la contribución de las realizaciones en las que no se efectuaron saltos hasta el tiempo t) evaluada en $x=0$ o el valor $x_{1/2}$ tal que $\tilde{P}(x_{1/2}; t) = 1/2 P(x=0; t)$. Se verifica en forma relativamente sencilla que estos estimadores presentan el comportamiento temporal apropiado en el caso de una distribución de saltos gaussiana. Esta discusión puede extenderse para tiempos largos a cualquier densidad de tiempos de pausa que tenga tiempo medio finito: $\lambda^{-1} = \int_0^\infty dt t \psi(t)$.

Tenemos en estos casos que, tomando cualquier definición alternativa del ancho de la distribución (que arroje un valor finito), estaremos en presencia de un proceso superdifusivo cuando $\gamma \leq 2$.

Si consideramos en particular la familia de funciones obtenida en⁽²⁾, ya mencionada, puede establecerse como un criterio alternativo para la estimación del ancho de la distribución el cálculo del segundo "q-momento" (ver⁽²⁾) definido como

$$\langle x^2 \rangle_q(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 [P(x; t)]^q}{\int_{-\infty}^{\infty} dx [P(x; t)]^q} \quad (10)$$

bajo la restricción

$$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 [p(x)]^q}{\int_{-\infty}^{\infty} dx [p(x)]^q} \quad (11)$$

que para el caso de densidades de tiempo de pausa con valor medio finito, resulta

$$\langle x^2 \rangle_q(t) \sim \sigma^2 (\lambda t)^{2/\gamma} \quad (12)$$

a tiempos largos, como surge de sustituir el comportamiento asintótico (9) en (10).

Hemos comenzado también con el análisis del comportamiento a "tiempos largos" para densidades de probabilidad temporales que no tienen tiempo medio finito. Supondremos en general para este conjunto de funciones un comportamiento asintótico de la forma

$$\psi(t) \sim \frac{1}{t(\lambda t)^\beta} \quad (13)$$

a tiempos grandes, con $0 < \beta \leq 1$. Notamos que para este comportamiento asintótico el número medio de saltos al tiempo t crece proporcionalmente a $(\lambda t)^\beta$. Para estos casos el análisis resulta más dificultoso debido, precisamente, a la inexistencia de un tiempo medio finito entre saltos, por lo que el estudio se ha restringido a considerar sólo el comportamiento de $\tilde{P}(x=0; t)$. Partiendo de la transformada de Laplace temporal de la aproximación (6) y usando la definición (5) para $\Phi_N(t)$ junto al teorema de convolución para la transformada de Laplace obtenemos

$$\tilde{P}(x=0; u) = \Phi_0(u) p(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(u)^n}{n^{1/\gamma}} \quad (14)$$

Usando un teorema Abeliano para el cálculo de la suma y un teorema Tauberiano para el cálculo del comportamiento asintótico a tiempos largos (obtenible del comportamiento para $u \rightarrow 0$ encontramos⁽²⁵⁾

$$\tilde{P}(x=0; t) \sim \frac{p(0)}{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)} \frac{1}{(\lambda t)^{\beta/\gamma}} \quad (15)$$

para $0 < \gamma < 2$.

Para el caso $\gamma = 1$ un procedimiento similar nos permite obtener el comportamiento

$$P(x=0; t) \sim \frac{p(0)}{(\lambda t)^\beta \Gamma(1-\beta)} \left[\ln((\lambda t)^\beta) + \frac{1}{1-\beta} \right] \quad (16)$$

El caso $\gamma < 1$ se encuentra aún en estudio, pero estos resultados preliminares nos sugieren un crecimiento del ancho de la distribución, estimado como $[\tilde{P}(x=0; t)]^{-1}$, proporcional a $(\lambda t)^{\beta/\gamma}$, consistente con la sustitución del valor de N en tiempo discreto por su valor medio al tiempo t en tiempo continuo en el límite de tiempos largos. Por supuesto esperamos una convergencia más lenta que en el caso de tiempo medio finito para estas distribuciones de autoescala. Continuamos el análisis de este caso mediante simulaciones de Monte Carlo en la siguiente sección.

3 Resultados

Como ilustración de los resultados obtenidos consideramos aquí algunos casos particulares. Ilustramos en

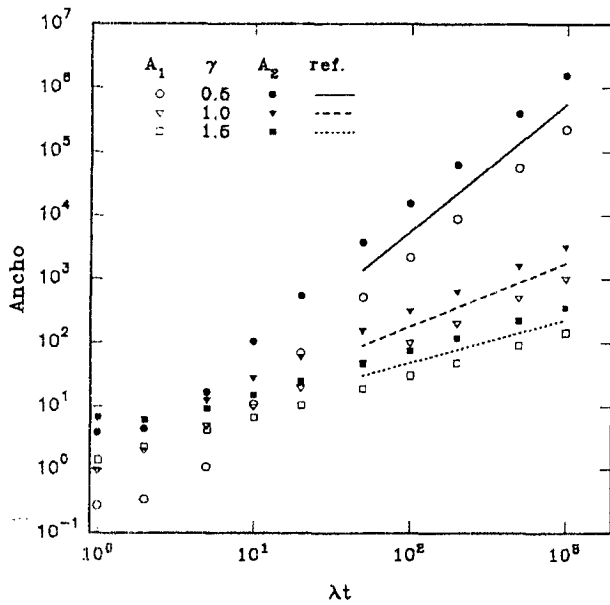


Figura 1: Ancho de la densidad de probabilidad $P(x;t)$ definido a partir de los criterios: 1) $A_1 = 1/\bar{P}(x=0;t)$ y 2) $A_2 = x_{1/2}$, ancho a la altura mitad tomado como $P(x_{1/2};t) = 1/2\bar{P}(x=0;t)$ para tres densidades de probabilidad para el largo de un salto con comportamiento asintótico tipo Levy. Notar el comportamiento lineal (en el gráfico de escala logarítmica), exhibido por ambos criterios en el límite $\lambda t \gg 1$. Las pendientes ilustradas por las rectas de referencia son consistentes con el valor $1/\gamma$ predicho por la teoría.

primer término el caso de un proceso de Poisson para el intervalo de tiempo entre saltos y diversos valores de γ en la figura 1. En la misma hemos considerado dos criterios alternativos para la estimación del ancho: 1) la recíproca de $\bar{P}(x=0;t)$; la probabilidad de encontrar al caminante en el origen descontadas las contribuciones de las realizaciones con cero saltos y 2) $x_{1/2}$ definido como el valor que cumple

$$P(x_{1/2};t) = \frac{1}{2}\bar{P}(0;t) \quad (17)$$

i.e. el ancho a la altura mitad. Para el cálculo de los valores hemos invertido numéricamente la expresión asintótica (8), suponiendo válida la misma para todo t : $\bar{P}(k;t) = P(k;t) - \exp(-\lambda t)$. Aún cuando ambos conjuntos de valores no coincidan exactamente entre sí, observamos en el gráfico de escala logarítmica la coincidencia en los valores de las pendientes con las predicciones de la teoría desarrollada.

Las rectas de referencia incluídas tienen la pendiente (en el gráfico de escala logarítmica) predicha por la teoría, acorde al comportamiento $t^{1/\gamma}$.

En las figuras 2 y 3 hemos incluído los resultados obtenidos para el caso de distribuciones de tiempo de pausa totales con valor medio infinito. Los valores incluídos en los gráficos se obtuvieron de simulaciones

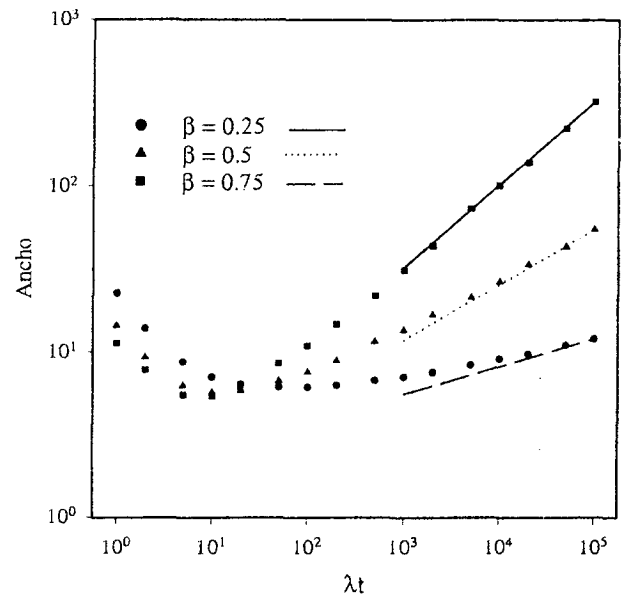


Figura 2: Ancho de la densidad de probabilidad $P(x;t)$ estimado como la recíproca de $\bar{P}(x=0;t)$. Los valores se obtuvieron de simulaciones por Monte Carlo para 10^4 realizaciones y se ilustran para el caso $\gamma = 1.5$ y tres valores distintos de β (ver texto). Las rectas (en el gráfico de escala logarítmica) de pendiente β/γ se han incluído como referencia. De la comparación con la figura 1, se nota la mayor demora en alcanzar el régimen asintótico para estos procesos con tiempo medio entre saltos infinito.

por el método de Monte Carlo para 10^4 partículas inicialmente en el origen y densidad de probabilidad para el largo de salto como en⁽²⁾

$$p_\gamma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi\gamma}} \frac{\Gamma(\frac{1+\gamma}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})} \frac{1}{\left[1 + \frac{x^2}{\sigma^2\gamma}\right]^{(1+\gamma)/2}} \quad (18)$$

que exhiben el comportamiento (2), donde σ^2 es el segundo q -momento (en la estadística de Tsallis) de la distribución.

Para los tiempos de pausa totales hemos usado la función

$$\psi(t) = \frac{1-b^\beta}{b^\beta} \sum_{j=1}^{\infty} b^{(1+\beta)j} \exp(b^j \lambda t) \quad (19)$$

El ancho para la distribución se ha estimado como la recíproca de $\bar{P}(x=0;t)$, evaluado en este caso como la fracción de partículas contenidas en un intervalo de ancho $10^{-2}\sigma\sqrt{\gamma}$ centrado en $x=0$. Reiteramos aquí que sólo consideramos aquellas partículas que han efectuado al menos un salto de acuerdo con la definición dada para \bar{P} . La figura 2 corresponde al valor $\gamma = 1.5$ para tres valores distintos de β . Se nota en este caso la convergencia más lenta que en el caso poissoniano al valor asintótico cuya dependencia temporal se ilustra con las rectas de referencia incluídas en el gráfico en

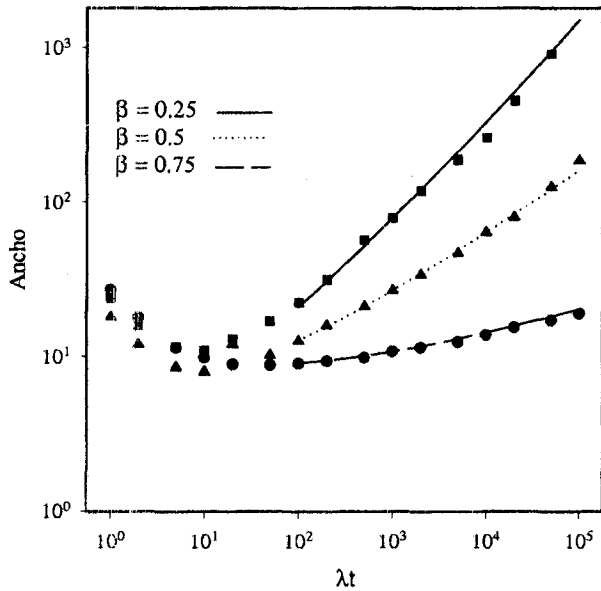


Figura 3: Ancho de la densidad de probabilidad para $P(x; t)$ estimado por $1/\tilde{P}(x=0; t)$ para el caso particular $\gamma = 1$ (distribución de Cauchy para el largo de los saltos). Los valores se obtuvieron como en el caso anterior (figura 2) y se han incluido las curvas de referencia con el comportamiento $(\lambda t)^{\beta/\gamma} / \ln [(\lambda t)^{\beta/\gamma}]$, determinado por la teoría.

escala logarítmica. Este comportamiento puede entenderse debido al decaimiento más lento en el tiempo de las funciones $\Phi_N(t)$ lo que prolonga la contribución de los primeros términos de la serie (6).

Finalmente, en la figura 3 hemos incluido el caso particular $\gamma = 1$, en cuyo caso el comportamiento asintótico para $\tilde{P}(x=0; t)$ está dado en (16). Las curvas de referencia incluidas corresponden al comportamiento asintótico.

4 Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado la posibilidad de modelar el proceso de superdifusión, definido como un proceso en el que el ancho de la distribución de probabilidad crece con el tiempo en una proporción mayor que en el caso gaussiano, mediante el esquema de Caminatas Aleatorias de Tiempo Continuo con densidades de tiempo de pausa separables. En estos modelos hemos considerado densidades de probabilidad para el largo de saltos que tienen el comportamiento asintótico de las funciones de Levy como se explicitó en (2). Para el análisis del comportamiento difusivo ha sido necesaria la consideración de estimadores alternativos del ancho de la distribución.

El análisis ha sido efectuado siguiendo la discusión de Prato y Tsallis⁽²⁾ para tiempo discreto, en el marco de la estadística no extensiva. En particular para distribuciones de probabilidad para el tiempo entre saltos con primer momento finito hemos visto que el segundo

momento de orden q , en el lenguaje de la estadística no extensiva, constituye una alternativa para la estimación del cuadrado del ancho y su evolución temporal asintótica permite caracterizar el proceso difusivo. Podemos mencionar además, en este contexto, una diferencia con la extensión asumida en⁽²⁾ para tiempo continuo. En efecto, según lo obtenido en este trabajo, la extensión corresponde a la sustitución de N (el número de saltos en tiempo discreto) por el valor medio del número de saltos al tiempo t en tiempo continuo, proporcional a t^β con β el exponente en el comportamiento asintótico de $\psi(t)$ como se expresa en (13) para distribuciones con primer momento infinito o $\beta = 1$ para distribuciones con tiempo medio finito. De esta forma el crecimiento del ancho, en tiempo discreto como $N^{1/\gamma}$, resulta proporcional a $t^{\beta/\gamma}$ para el caso de tiempo continuo. De esta forma tenemos que valores de $\gamma < 2$ no necesariamente darían lugar a un comportamiento superdifusivo, contrariamente a lo concluido para tiempo discreto. De acuerdo con el comportamiento encontrado, debemos comparar el cociente β/γ con el valor $1/2$, correspondiendo a superdifusión el caso $\beta/\gamma > 1/2$.

El análisis efectuado para el comportamiento fractal de $\psi(t)$ ha sido parcial sin embargo, restando considerar los casos $\gamma < 1$. Este trabajo se encuentra en desarrollo y será motivo de una comunicación futura. Un resultado importante es que nuestro análisis puede encuadrarse en el marco de la estadística no extensiva desarrollada por Tsallis y colaboradores. Cálculos preliminares y el análisis de simulaciones realizadas por el método de Monte Carlo realizadas recientemente sugieren que, cuando la densidad de probabilidad total para el tiempo de salto no tiene tiempo medio finito (distribuciones con "cola larga", con comportamiento asintótico $\psi(t) \sim t^{-1-\beta}$ y $\beta < 1$ para tiempos largos) el comportamiento asintótico del ancho de la distribución de probabilidad para la posición sería proporcional a $t^{\beta/\gamma}$, donde γ corresponde al exponente del comportamiento asintótico de las distribuciones de Levy (ver texto).

Agradecimientos: Los autores agradecen el financiamiento de CONICOR y SeCyT-UNC para este proyecto. También agradecemos al Dr. Oscar Bustos la fructífera discusión de algunos aspectos de este trabajo.

Referencias

- [1] C. Tsallis, S.V.F. Levy, A.M.C. Souza and R. Maynard. Phys. Rev. Lett. **75**, 3598 (1995). [Erratum: Phys. Rev. Lett. **27**, 5442 (1996)].
- [2] D. Prato and C. Tsallis. Phys. Rev. E. **60**, 2398 (1999).
- [3] G. M. Zaslavsky, Physica D, **76**, 110 (1994).
- [4] J. Klafter, A. Blumen and M.F. Shlesinger. Phys. Rev. A **35**, 3081 (1987).

- [5] A. Blumen, G. Zumofen and J. Klafter. Phys.Rev. A 40, 3964 (1989).
- [6] G. Zumofen, A. Blumen and M.F. Shlesinger. J.Stat.Phys.54, 1519 (1989).
- [7] H. Scher and E.W. Montroll. Phys. Rev. B, 12, 2455 (1975).
- [8] M.F. Shlesinger. J. Stat. Phys. 10, 421 (1974).
- [9] S. Alexander and R. Orbach. J. Phys. (Paris) Lett.43, L625 (1982).
- [10] A. Blumen, J. Klafter and G. Zumofen, in *Optical Spectroscopy of Glasses*, edited by I. Zschokke. (Reidel, Dordrecht. Holland, 1986). p. 199.
- [11] A.S. Monin and A.M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics*. (MIT, Cambridge, MA, 1971), Vol.I; (1975), Vol. II.
- [12] G.K. Batchelor. Proc. R. Soc. London, Ser. A. 110, 709 (1926).
- [13] S. Grossmann and I. Procaccia. Phys. Rev. A 29, 1358 (1984).
- [14] M.F. Shlesinger and J. Klafter. Phys. Rev. Lett. 54, 2551 (1985).
- [15] E.W. Montroll and G.H. Weiss. J. Math. Phys. 6,167 (1965).
- [16] C.E. Budde, D.P. Prato y M.A.Ré aceptado en Phys. Lett. A (2000)
- [17] E.W. Montroll and B.J. West, in *Fluctuation Phenomena*, E.W. Montroll and J.L. Lebowitz, eds. (North Holland, Amsterdam, 1979).
- [18] H. Scher and M. Lax. Phys. Rev. B, 7, 4491; 7, 4502 (1975).
- [19] J.K.E. Tunaley. Phys. Rev. Lett. 33, 1037 (1974).
- [20] J.W. Haus and K.W. Kehr. Phys. Rep. 150, 263 (1987).
- [21] G.H. Weiss and R.J. Rubin. Adv. In Chem. Phys. 52, 363 (1983).
- [22] A. Ott, J.P. Bouchaud, D. Langevin and W.Urbach; Phys. Rev. Lett. 65, 2201 (1990).
- [23] N.G. Van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland. Amsterdam (1981).
- [24] C. Tsallis. J. Stat. Phys. 52, 479 (1988).
- [25] G. H. Weiss *Aspects and applications of the Random Walk*. North Holland (1994).