

Reacción de aniquilación en sistemas cuasiunidimensionales y el envenenamiento en sustratos unidimensionales.

Parrondo, A. L., Martín, H.O.

Fac. Cs. Exactas y Naturales. UNMdP. Funes 3350.
E-mail: parrondo@mdp.edu.ar hmartin@mdp.edu.ar

Estudiamos la densidad de partículas, $\rho(t)$, en función del tiempo para la reacción de aniquilación $A + A \rightarrow 0$ en redes bidimensionales de ancho finito L_y , que denominamos sistemas cuasiunidimensionales. Los resultados provistos por las simulaciones de Monte Carlo muestran un cambio de régimen o "crossover" entre un comportamiento bidimensional a tiempos cortos y un comportamiento unidimensional para grandes tiempos. El tiempo de crossover, t_c , está relacionado con el valor de L_y . Usando argumentos de escala, encontramos un comportamiento universal para redes de anchos diferentes. También obtuvimos el resultado analítico de $\rho(t)$ para el régimen asintótico ($t \gg t_c$). Modificamos el modelo inicial para simular el efecto del envenenamiento para un sustrato unidimensional. En este caso, encontramos un régimen de saturación, donde la reacción se detiene y el número de partículas no varía. Este régimen se caracteriza por una "densidad de saturación" constante ρ_s . Mediante argumentos simples de escala, encontramos una dependencia lineal de ρ_s con la densidad inicial de partículas y una conducta universal de $\rho(t)$ para todo tiempo. Estos resultados fueron confirmados por las simulaciones de Monte Carlo.

We study the particle density $\rho(t)$ as a function of time t for annihilation reaction $A + A \rightarrow 0$, in two-dimensional lattices with finite width L_y . The Monte Carlo results show a "crossover" from a two-dimensional behavior, at short times, to a one-dimensional behavior, at long times. The crossover time t_c is related with the value of L_y . Using scaling arguments an universal behavior for lattices with different widths was found. We also obtain the analytical result of $\rho(t)$ in the asymptotic regime ($t \gg t_c$). The initial model is modified to simulate the effect of poisoning for one-dimensional substrate. In this case, at long times a saturation regime with no change in the number of particles was found. This regime is characterized by a constant "saturation density" ρ_s . Using simple scale arguments we found a linear dependence of ρ_s with the initial particle density, and an universal behavior of $\rho(t)$ for all times. These results were confirmed by Monte Carlo simulations.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo, estudiamos el comportamiento de la densidad, $\rho(t)$, de la reacción de aniquilación $A + A \rightarrow 0$ sobre redes bidimensionales de ancho finito L_y , que denominamos sistemas cuasiunidimensionales.

El resultado para la densidad para este tipo de reacción en una dimensión para una red de celda de longitud 1 y probabilidad de salto $q = 1/2$, en el régimen difusivo, es

$$\rho(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-1/2} \quad t \rightarrow \infty \quad (1)$$

Para dos dimensiones la dependencia real con el tiempo incluye una corrección logarítmica [1,2]:

$$\rho(t) \sim (t / \log t)^{-1} \quad t \rightarrow \infty \quad (2)$$

Es de esperar que los sistemas cuasiunidimensionales presenten inicialmente un comportamiento bidimensional y luego, un comportamiento unidimensional a grandes tiempos. Esto es debido a que las partículas deben difundir un cierto tiempo antes de que "sientan" el efecto del ancho finito de la red. Este tema se desarrolla en la sección 1.

También estudiamos cómo el envenenamiento del sustrato afecta el progreso de la reacción para el caso de una dimensión, los resultados se muestran en la sección 2.

1. REACCIONES DE ANIQUILACIÓN EN SISTEMAS CUASIUNIDIMENSIONALES

1.1 Modelo y Simulación de Monte Carlo

La reacción de aniquilación se realiza entre partículas de una especie A , $A + A \rightarrow 0$. En nuestro modelo, las partículas, difunden en forma independiente y reaccionan instantánea e irreversiblemente, al encontrarse. Éstas efectúan un random walk sobre una red de celda cuadrada larga (10^4 o 10^5 sitios) y ancho L_y , con condiciones de contorno periódicas.

A $t=0$, llenamos cada sitio de la red con partículas con probabilidad ρ_0 (densidad inicial de partículas) y se comienza la difusión. Una partícula (elegida al azar de las $n(t)$ presentes) salta con igual probabilidad (0.25) hacia la izquierda, derecha, arriba o abajo, a un sitio primer vecino, y deja vacío su sitio original. Pueden darse las siguientes situaciones: 1º) si el sitio de destino está ocupado la partícula se encuentra con otra, reaccionan y desaparecen las dos de la red. El número de partículas al tiempo t , $n(t)$, se disminuye en dos $n(t) \rightarrow n(t)-2$ (Aniquilación). 2º) si el sitio está vacío, la partícula lo ocupa.

Una unidad de tiempo recién transcurre cuando se han sorteado $n(t)$ partículas y han tenido posibilidad de saltar. Específicamente se incrementa el tiempo en $1/n$ después de cada salto, donde $n = n(t)$ es el número de partículas de la red al tiempo t . De esta forma logramos que al cabo de t unidades de tiempo todas las partículas se hayan movido

En la figura 3 estudiamos resultados que se obtienen variando la dilución de las interconexiones AB, siguiendo el mismo esquema anterior.

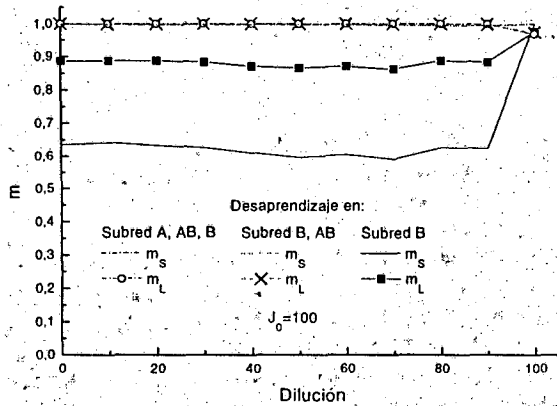


Figura 3: Overlap final de recuperación versus dilución en las interconexiones.

Se observa que para una dilución del 100% el comportamiento converge al mismo punto, y es independiente del desaprendizaje puesto que las subredes ya no forman un sistema interactuante.

2- Características de la cuenca de atracción correspondientes a cada patrón global.

Los resultados se completan con las figuras 4 y 5 donde se muestran en un gráfico tridimensional el overlap de recuperación promedio para diversas condiciones iniciales y de aplicación del desaprendizaje.

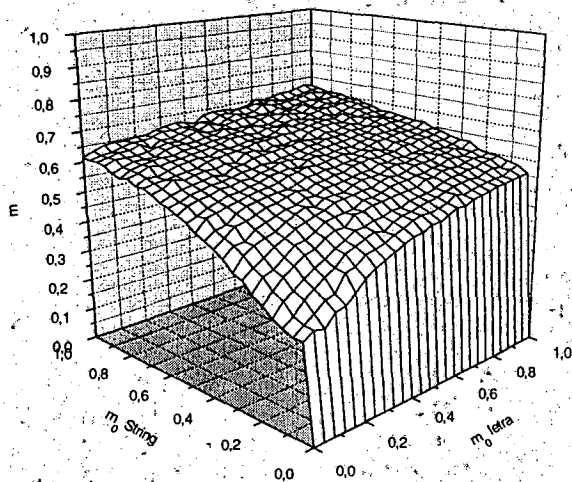


Figura 4: Overlap de recuperación final promedio $m = \frac{m_s + m_L}{2}$, con desaprendizaje en la subred B. $m_0(s$ o $l)$ específica la configuración inicial.

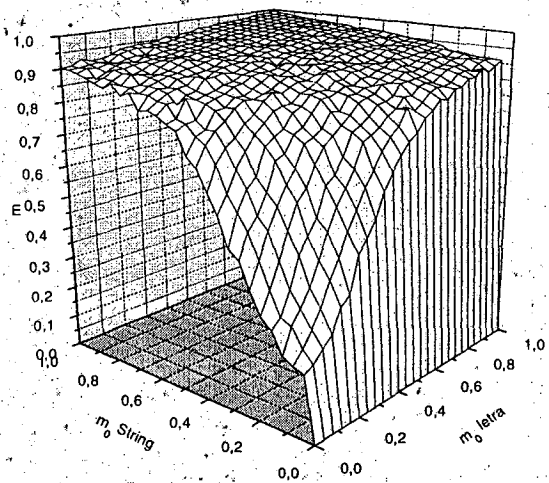


Figura 5: Idem figura 4, con desaprendizaje en la subred B y en las interconexiones AB

CONCLUSIONES

Lo mostrado en este trabajo permite concluir:

- El procedimiento de desaprendizaje aplicado posibilita grabar y recuperar patrones con muy diverso grado de correlación.
- Al efecto de la recuperación es crítico modificar las interconexiones entre las redes siguiendo el procedimiento descrito, y no aumentar su intensidad J_0 o el grado de dilución de las mismas (ver figuras 2 y 3).
- El desaprendizaje produce un agrandamiento notablemente robusto de la cuenca de atracción de cada patrón global (ver figuras 4 y 5).
- El presente modelo permite estudiar la recuperación de subpatrones diferentes, grabados en distintas zonas de una red global.

REFERENCIAS

- 1-Márcia M. Ochi and O.L.T. de Menezes, Int. Journal of Neural Systems, 3, 389-393 (1992)
- 2-Jorge A. Horas and P. Marcelo Passinetti, J. Phys. A: Math. Gen. 31 L463-L471 (1998)
- 3-J. Hopfield; Proc. Acad. USA, 79,2554 (1982)

en promedio t veces. Se recoge y promedian los valores de $\rho(t)$ obtenidos de varias corridas en la misma red.

El caso $L_y=1$ corresponde a una red unidimensional con probabilidad 0,25 de saltar en cada sentido posible y 0,5 de permanecer en su sitio y se obtiene

$$\rho(t) = t^{-1/2} / \sqrt{2\pi} \quad t \rightarrow \infty \quad (3)$$

Notar que las ecs. (1) y (3) difieren en un factor constante pues corresponden a distinto valor de q . Esto es razonable porque el proceso de difusión y aniquilación es el mismo, pero se lleva a cabo con mayor lentitud.

1.2 Tiempo de "crossover"

Si consideramos que una partícula en la red, que ha difundido en dos dimensiones durante un tiempo t : $\langle x^2 \rangle \sim t$ y $\langle y^2 \rangle \sim t$, la relación

$$t_c \sim \langle y^2 \rangle \cong L_y^2 \quad (4)$$

determina un tiempo crítico o de "crossover", t_c . El sistema recoge información sobre el tamaño finito del ancho de la red L_y .

En los datos de la densidad, provistos por las simulaciones, se presentó inicialmente un comportamiento bidimensional (ec.(2)) que resultó independiente del valor considerado de L_y , y se produjo un cambio a un régimen unidimensional, $\rho(t) \sim t^{-1/2}$, relacionado con el ancho finito de la red, a un tiempo t_c , que llamamos de *crossover*. Proponemos que

$$t_c = C L_y^\gamma \quad (5)$$

donde C es una constante. De la ec. (4) vemos que el valor teórico del exponente de la ec. (5) es $\gamma=2$.

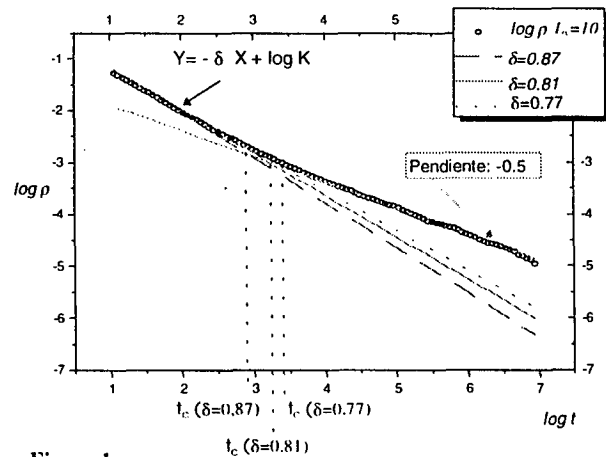


Figura 1
Método para calcular el tiempo de "crossover" en gráfico ρ vs t para una red de ancho $L_y=10$, en escala \log_{10} - \log_{10}

Observamos que las gráficas de $\log(\rho(t))$ vs $\log t$ para todo L_y , a una densidad fija ρ_0 , coinciden, en la primera parte, con la curva que se halla al graficar estas variables para dos dimensiones.

Por lo tanto,

$$\rho_c = K (t_c)^\delta \quad (6)$$

donde K es una constante, y su valor y el de δ se obtienen de los resultados para la red cuadrada. Si bien el valor teórico δ_i es 1 (ec. (2)). Los valores para δ considerados (ver fig. 1) difieren de la unidad, por dos razones: el

sistema no permanece el tiempo suficiente con régimen bidimensional para considerar comportamiento difusivo y porque la variable utilizada para graficar no posee la corrección logarítmica característica de dos dimensiones. Según los primeros puntos de la red cuadrada que se consideraron, los valores de δ varían de 0.77 a 0.87. Elegimos 3 valores para realizar el análisis y verificar cuál sería el mejor.

Los datos para tiempos grandes, mostraban una pendiente $-1/2$ (ver fig. 1) y los aproximamos por una recta

$$\log \rho = -\frac{1}{2} \log t + s \quad (7)$$

donde el valor de s se obtuvo por el método de mínimos cuadrados, aplicado a los últimos puntos de las curvas para cada L_y .

La abscisa de intersección de estas rectas nos da el tiempo de *crossover* t_c , como indica la fig.1. Los gráficos log-log de t_c vs L_y , para cada δ , nos suministró el exponente γ de la ec. (6), obteniendo los resultados indicados en la Tabla I.

Tabla I

δ	K	γ	C	$\gamma(\delta-1/2)$
0.77	0.36	3.7	0.59	0.999
0.81	0.39	3.2	1.02	0.992
0.87	0.51	2.7	1.90	0.999

Los valores de γ y δ difieren de los teóricos. Sin embargo, $\gamma(\delta-1/2)$ para los valores teóricos, $\gamma_i = 2$ y $\delta_i = 1$, es igual a 1 y está acuerdo con los resultados presentados en última columna de la tabla I.

1.3 Escaleo

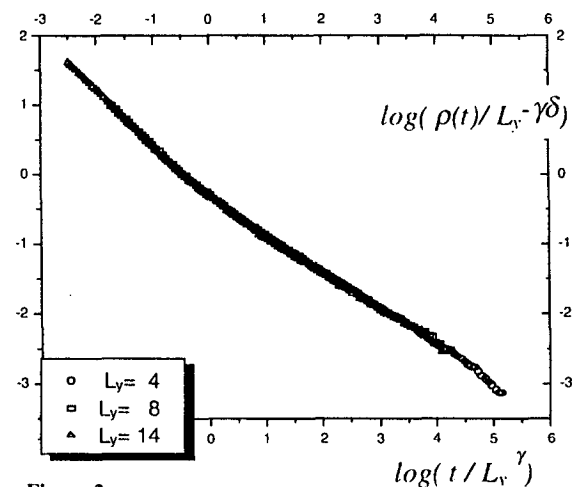


Figura 2
Escaleo realizado para la densidad ρ vs variable t en escala log-log. Los parámetros en este caso son: $\delta = 0.81$, $\gamma = 3.2$

Debido a la forma que presentan las curvas de la fig. 1 y las ecs. (5) y (6), es posible colapsarlas en una sola utilizando el método de escaleo [3,4,5], el cual consiste en una transformación de los ejes del gráfico, en los cuales esté involucrado el ancho L_y de las redes, de tal forma que la curva resultante sea independiente de esta cantidad. Esto nos permitió hallar un comportamiento universal para todo L_y . La transformación de los ejes es la siguiente:

$$\begin{aligned} \log \rho(t) &\rightarrow \log(\rho(t)/\rho(t_c)) &\rightarrow \log(\rho(t)/L_y^{-\delta}) \\ \log(t) &\rightarrow \log(t/t_c) &\rightarrow \log(t/L_y^\gamma) \end{aligned}$$

Los resultados se muestran en la fig. 2.

1.4 Resultado analítico

Encontramos un comportamiento para $\rho(t)$ al considerar el rol de la difusión en una red cuasiunidimensional de ancho L_y .

Consideremos una porción de largo d_x , tal que $d_x \sim t$ con $t \gg t_c$. A $t=0$ existirán $\rho_0 L_y d_x$ partículas en ella. A medida que el proceso avanza las partículas reaccionan y se aniquilan. De la ec. (4), encontramos que cuando las partículas han difundido durante un tiempo $t_c \sim L_y^2$, ya han recorrido todo el ancho de la red; y para un tiempo $t \gg t_c$, tal que $t \sim d_x^2$, sólo quedará del orden de una partícula en un área $L_y d_x$ y la densidad

$$\rho(t) \sim \frac{1}{d_x L_y} \sim \frac{1}{L_y} t^{-1/2} \quad (8)$$

Basándonos en este resultado, sugerimos la siguiente solución general del comportamiento de la densidad de partículas para las redes *cuasiunidimensionales* para tiempos $t \gg t_c$,

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L_y^{-1} t^{-1/2} \quad t \rightarrow \infty \quad (9)$$

donde la constante $1/\sqrt{2\pi}$, se obtiene de la ec. (3).

Este comportamiento coincide con el régimen unidimensional observado para tiempos grandes en este tipo de redes. En la fig. 3 observamos tres simulaciones numéricas para la densidad, tres anchos de red diferentes, acompañadas de la recta correspondiente a la ec. (9). Observamos un muy buen ajuste de la simulación Monte Carlo con la solución analítica sugerida en la ec. (9), para todo L_y .

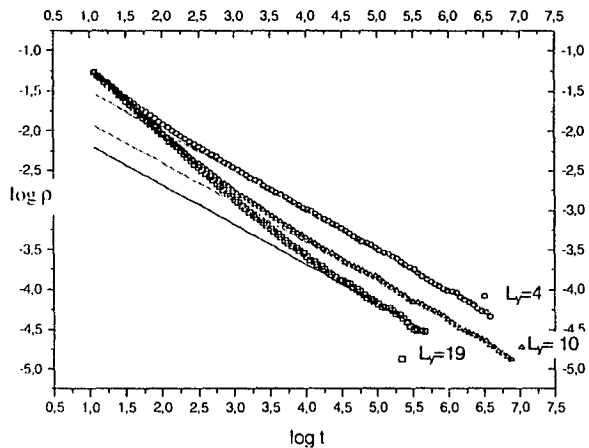


Figura 3

Comparación del gráfico densidad ρ vs tiempo t en escala log-log de la simulación con el resultado analítico (ec. (9)). Los anchos L_y graficados son 4, 10 y 19. Los símbolos indican los resultados de la simulación, mientras que las líneas indican los resultados analíticos.

Por otro lado, la ec. (9) especializada en los tiempo de crossover para dos valores de L_y diferentes y utilizando las ecs. (5) y (6), nos lleva al siguiente resultado:

$$\gamma \left(\delta - \frac{1}{2} \right) = 1 \quad (10)$$

Hemos mencionado que para los valores teóricos, δ y γ , esta relación se cumple. Es importante notar que en los resultados presentados en la Tabla 1; no se utilizó el resultado presentado por la ec. (9) y se aproximaron los comportamientos asintóticos de $\rho(t)$ a tiempos largos por rectas de pendiente $-1/2$ para cada valor de L_y . Esta aproximación podría diferir del resultado analítico de la ec. (9) y dependería del buen criterio utilizado para aproximar para cada L_y el comportamiento de $\rho(t)$ por una recta. Sin embargo, los resultados así obtenidos de γ ($\delta-1/2$) mostrados en la Tabla 1 están en excelente acuerdo con el resultado demostrado en la ec. (10).

2. ENVENENAMIENTO EN UNA DIMENSIÓN

2.1 Modelo y simulación.

El programa simula el fenómeno de envenenamiento en la red lineal, las partículas efectúan un *random walk* sobre una red larga (10^4 , 10^5 , 5×10^5 sitios), con condiciones de contorno periódicas. El llenado de la red y la difusión se realiza como está descrita en la sección 1.1. La variación aparece cuando el sitio de destino de la partícula que salta está ocupado, existen dos posibilidades: a) la partícula se encuentra con otra, reaccionan y permanecen las dos en la red, inmóviles. De esta manera, la red se envenena. El número de partículas móviles al tiempo t , $n(t)$, se disminuye en dos $n(t) \rightarrow n(t)-2$. b) la partícula se encuentra con otra que ya ha reaccionado, en cuyo caso vuelve a su posición anterior al salto y sigue formando parte de las partículas móviles; $n(t)$ sigue teniendo el mismo valor. El tiempo se incrementa en $1/n(t)$ donde $n(t)$ es el número de partículas móviles al tiempo t . Se recoge y promedian los valores de $\rho(t)$ obtenidos de dos o tres muestras en la misma red. Los resultados se muestran en la fig. 4.

Las partículas, cuando se encuentran, se transforman en inertes (no vuelven a reaccionar) y se fijan en la red. Con el tiempo, estas partículas *fijas* envenenan la red y conforman una grave molestia para el encuentro de las que aún difunden, o *móviles*, llegando en algunos casos, a encerrarlas dentro de verdaderas jaulas como vemos en la figura 4.1 Cuando queda una o ninguna partícula móvil por jaula, la cantidad de estas partículas permanece constante y por lo tanto su densidad en la red no varía, y se alcanza lo que llamamos un "régimen de saturación", como podemos observar en la curva superior de la fig. 4.2. La densidad primero decrece de la misma forma que para la reacción de aniquilación, pero luego la disminución se atenúa. Las partículas "móviles" quedan atrapadas por otras que se han fijado a la superficie (fig. 4.1) y no pueden difundir para reaccionar entre sí, la densidad de estas partículas termina por ser constante.

Definimos *densidad de saturación*, ρ_s ,

$$\rho_s = \rho(t = \infty) \quad (11)$$

Debido a la misma geometría de la red, vemos que siempre existe una densidad de saturación de partículas móviles en redes lineales, que depende de la densidad inicial de partículas colocadas en la red. A medida que la densidad inicial es menor, las partículas tardan más en

alcanzar el régimen de saturación y la densidad de saturación será menor (Fig. 5).

2.2 Análisis del problema unidimensional

Al analizar el problema de aniquilación sin veneno podemos tratar de entender el comportamiento difusivo, cuando la densidad es baja (la distancia entre partículas es mucho mayor que la celda de la red), fijándonos en la situación de cada partícula. Supongamos que una partícula comienza a difundir a $t=0$ y está a distancias l_a y l_b de los sitios a y b , donde pueden estar las otras dos partículas más cercanas.

Como $\langle x^2 \rangle = 2Dt$, la probabilidad de que la partícula alcance la posición a , si suponemos la posición x una variable continua, está dada por

$$P_{l_a} = P(l_a, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \frac{e^{-l_a^2/4Dt}}{\sqrt{t}} \quad (12)$$

y se obtiene una ecuación similar para la probabilidad de hallarse en la posición b . Puesto que en nuestro modelo las partículas reaccionan instantánea e irreversiblemente, esta probabilidad es también la probabilidad de reaccionar con otra partícula en las posiciones a y b respectivamente.

De la ec. (12), esperamos que la probabilidad relativa de que la partícula reaccione en la posición a y b , P_{l_a}/P_{l_b} , no cambie si realizamos una dilatación de la red, tal que $l \rightarrow \lambda l$, $\lambda \geq 1$, y a su vez variamos t según $t \rightarrow \lambda^2 t$. O sea que

$$\frac{P_{l_a}(t)}{P_{l_b}(t)} = \frac{P_{\lambda l_a}(\lambda^2 t)}{P_{\lambda l_b}(\lambda^2 t)} \quad (13)$$

En nuestro modelo, todas las partículas se mueven, aquellas situadas en la posición a y b también. En este caso, suponemos que los argumentos anteriores no cambian. Al efectuar la dilatación (el largo de la red aumenta en un factor λ), la densidad de partículas en la red dilatada cumple

$$\rho_\lambda(\lambda^2 t) = \frac{\rho(t)}{\lambda} \quad (14)$$

donde ρ es la densidad de la red original.

En particular, para $t=0$,

$$\rho_{0\lambda} = \frac{\rho_0}{\lambda} \quad (15)$$

La ec. (14) se verificó numéricamente para el caso sin envenenamiento. Para el caso con envenenamiento, los argumentos anteriores siguen siendo válidos. Por ejemplo, cuando se alcanza la densidad de saturación, ρ_s una dilatación solo producirá "jaulas" (ver fig. 4.1) de mayor tamaño, pero de todas formas las partículas móviles estarán encerradas y no podrán reaccionar entre sí. Es decir:

$$\rho_{s\lambda} = \frac{\rho_s}{\lambda} \quad (16)$$

que está de acuerdo con la ec. (14) para tiempos grandes donde se alcanza la densidad de saturación. Dividiendo la ec. (16) por la (15),

$$\frac{\rho_s}{\rho_0} = \frac{\rho_{s\lambda}}{\rho_{0\lambda}} = k \quad (17)$$

donde k es una constante. O bien

$$\rho_s = k \rho_0 \quad (18)$$

Para comprobar este resultado, tomamos los datos de la densidad de saturación, ρ_s , para cada densidad inicial, ρ_0 , que presentamos en la fig. 5 y graficamos ρ_s vs ρ_0 . Obtenemos una recta que tiene una pendiente de 0.136 y como ordenada al origen -0.00028. Por lo tanto para redes unidimensionales,

$$\rho_s = 0.136 \rho_0 \quad (19)$$

que está de acuerdo con la ec. (15).

La ecuación (14) sugiere que un cambio de escala en el gráfico de la fig. 5 tal que

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \rho / \rho_0 \\ t &\rightarrow t \rho_0^2 \end{aligned} \quad (20)$$

colapsaría las curvas (tomamos $\lambda=1/\rho_0$). Esto se muestra en la fig. 6. Observamos que todas las curvas saturan al mismo valor de $\rho_s/\rho_0=0.136$ ($\log(\rho_s/\rho_0)=0.87$), que es el valor de densidad de saturación ρ_s que se registra en la fig. 5 y se obtiene de la ecuación (19), para $\rho_0=1$. El colapso de las curvas no es perfecto, probablemente es debido a que en los argumentos teóricos, utilizados para llegar a la ec. (14), se ha supuesto una red continua, mientras que la red es discreta.

CONCLUSIONES

En este trabajo se simula la difusión y aniquilación de partículas según la reacción $A + A \rightarrow 0$ en redes cuasiunidimensionales, fajas infinitas de ancho L_y . Se muestra cómo la densidad en función del tiempo, cambia su comportamiento bidimensional a unidimensional a un tiempo, que llamamos de *crossover*, t_c . Este tiempo está relacionado con la llegada de la información del ancho finito de la red, $t_c \sim L_y^2$.

Debido a que el comportamiento a tiempos grandes el sistema es unidimensional, $\rho(t) \sim t^{-1/2}$ para $t \gg t_c$ y para $t \ll t_c$ donde aún no se alcanza el régimen difusivo, propusimos $\rho(t) \sim t^{-\delta}$, donde el valor teórico de δ sería $\delta_t = 1$. El tiempo t_c se determina por un método gráfico y se encuentra que $t_c = C L_y^\gamma$, con $\gamma \equiv \gamma_t = 2$. Se obtiene una relación entre exponentes, $(\delta - 1/2) \gamma = (\delta_t - 1/2) \gamma_t = 1$ que se verifica para todos los valores de δ y γ que se trabajaron.

La relación anterior también se obtuvo a partir del resultado analítico que hallamos para el comportamiento asintótico de la evolución temporal de la densidad en redes cuasiunidimensionales [6].

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L_y^{-1} t^{-\frac{1}{2}} \quad t \rightarrow \infty$$

Otra parte de nuestro trabajo fue modelar la reacción de aniquilación con el envenenamiento de la red, para el caso $L_y=1$ y analizar el efecto que éste produce sobre la evolución temporal de la densidad. Se observa que siempre se alcanza un régimen de saturación donde las partículas, que aún pueden difundir, quedan aisladas. La

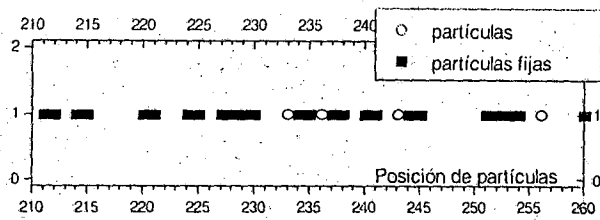


Fig 4.1

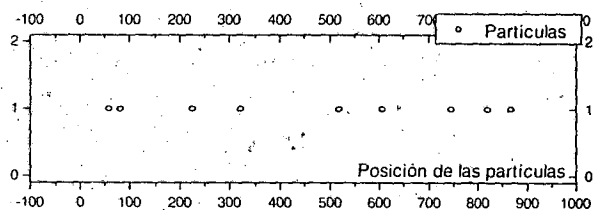


Fig 4.3

Figura 4

Se muestra el efecto del envenenamiento en una reacción de aniquilación en una red lineal con densidad inicial $\rho_0=0.5$. En la figura 4.1 y 4.3 se muestran las situaciones a las cuales corresponde cada curva para $t=10^5$. La fig. 4.3 muestra fenómeno de aniquilación sin envenenamiento (Ver curva II en fig. 4.2). Las partículas en la red aún pueden reaccionar. El rectángulo indica una porción de red que corresponde a una región similar a la de la fig. 4.1.

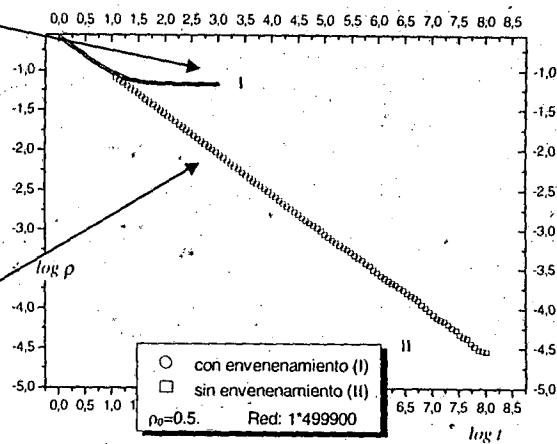


Fig 4.2

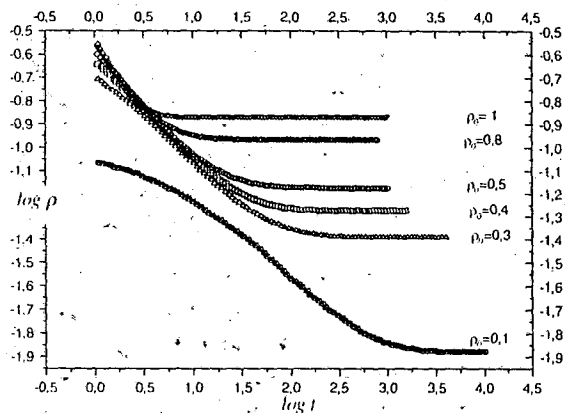


Figura 5

Densidad ρ vs tiempo t en escala log-log para una red lineal. A medida que la densidad inicial ρ_0 es menor la densidad de saturación también lo es.

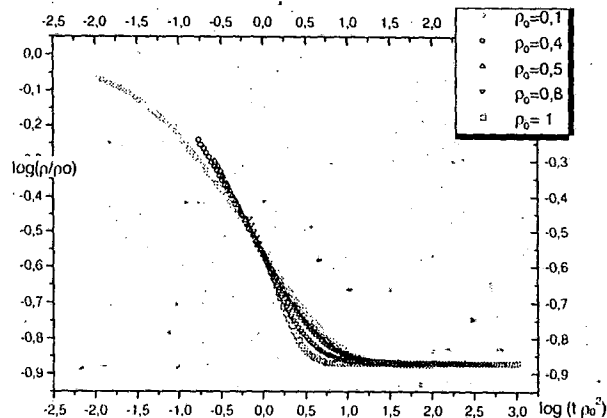


Figura 6

Cambio de escala para la gráfica de la fig. 5. Las curvas saturan al mismo valor $\log(\rho_s/\rho_0)=0.87$.

densidad en este régimen, la densidad de saturación ρ_s cumple $\rho_s = 0.136 \rho_0$ [6].

Utilizando apropiados cambios de escalas, se obtuvieron comportamientos universales de la densidad de partículas, tanto para el caso sin envenenamiento y redes cuasiunidimensionales, como para el caso con envenenamiento para redes unidimensionales.[6].

Referencias

- [1] Raoul Kopelman. Sci, **241**, 1620 (1988).
- [2] D. Ben Avraham, M. A. Burschka y C.R. Doering. J. Stat. Phys, **60**, 695 (1990).
- [3] A. L. Barabási, H. E. Stanley, *Fractal Concepts in surface growth*, Cambridge University Press (1995).
- [4] *Reacciones de aniquilación y coagulación imperfectas con difusión anómala*. Tesis doctoral de Miguel Hoyuelos (Mar del Plata, Diciembre de 1995).
- [5] M. Hoyuelos y H.O. Martín. Langmuir, **12**, 61.(1996).
- [6] *Reacciones de aniquilación y envenenamiento en redes bidimensionales de ancho finito*. Trabajo de diploma de Licenciatura de A.L.Parrondo (Mar del Plata, Febrero de 1998).