

ANÁLISIS ESPECTRAL DE UNA ONDA DE GRAVEDAD SIMPLE

M. Pulido*, M. Lamfri, M. Scavuzzo, G. Caranti

Facultad de Matemática Astronomía y Física (FaMAF)- Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria (5000)-Córdoba-Argentina
e-mail: pulido@roble.fis.uncor.edu

Las observaciones de movimientos horizontales en la atmósfera a diferentes latitudes y altitudes muestran una tendencia universal de K^{-3} en la cola del espectro. Al momento existen varias teorías alternativas para justificar este comportamiento. Apuntando a este problema se analiza el espectro de ondas simples las cuales tienen una cola del espectro (grandes números de onda), con forma de potencias inversas, que van entre -2 y -4. De la misma manera, se consideran las dependencias en altura que producen el viento medio y/o la frecuencia de Brunt Vaisala, sobre una onda de gravedad. Se hizo un desarrollo teórico para este tipo de ondas llegando a una forma espectral para la cola que tiene un desarrollo en forma de potencias inversas. Estos efectos son contaminantes al observar espectros reales, y tienen amplitudes del orden de las observadas, demostrando que las técnicas espectrales, son limitadas para análisis cualitativos finos.

Observations of horizontal wind perturbation in the atmosphere at different latitudes and altitudes show the so called universal spectrum (K^{-3}) especially in the tail. Presently there are several alternative theories to explain this behavior. In this work we have analyzed the spectrum a simple non harmonic wave. The spectrum tail can be expressed as powers -2 to -4 of K . Also, the effects of the background wind and the Brunt Vaisala frequency on the wavelength are studied. A theoretical formulation for these waves is carried out leading to expansions of inverse powers of K that describe the spectrum tail. When an actual spectrum is observed these effects enter as contaminants through the spectral technique showing that the techniques are limited as far as qualitative analysis is concerned.

I. INTRODUCCIÓN

Las power spectral densities (PSD) de vientos horizontales a distintas alturas y diferentes puntos geográficos, tienen comportamientos universales para el rango de longitudes de onda de 40m a 1km, con amplitudes similares y pendientes espectrales cercanas a -2.4, el reporte de estos comportamientos fue realizado por Van Zandt (1982)⁽¹⁾, posteriores mediciones sugirieron una pendiente espectral media de -3, pero con significantes variaciones de esta pendiente (Fritts et al., 1988⁽²⁾, Allen and Vincent, 1995⁽³⁾), el rango de pendientes observadas va desde -2.4 a -3.5.

Paralelamente a estas observaciones se han desarrollado teorías que tratan de explicar esta forma espectral, las cuales pueden ser agrupadas en tres categorías: 1) modelos de saturación (Dewan and Good, 1986⁽⁴⁾), 2) Doppler spread (Hines, 1991⁽⁵⁾) y 3) modelos difusivos (Weinstock, 1990⁽⁶⁾). Estos modelos predicen una pendiente espectral de -3. Variaciones de esta pendiente han sido atribuidas a un campo de ondas no saturado, saturación dinámica, Doppler spread (i.e. considerando distintos espectros de entrada).

Actualmente hay trabajos que tratan de explicar los procesos físicos que producen variaciones en la pendiente espectral (en pos de explicar el rango de -2.4 a -3.5 de pendientes observadas), Eckermann (1995)⁽⁷⁾ atribuyó estas variaciones a cambios del viento medio (background), los cuales causan crecimientos en las velocidades de fase horizontales, y estos producirán

efectos sobre la amplitud, número de onda vertical y shear (viento de corte).

El objetivo de este trabajo es mostrar la forma espectral de una onda de gravedad simple cuando se aplican las técnicas espectrales usuales, demostrando que hay alta "contaminación" espectral sobre los grandes números de onda. Los efectos analizados que producen "contaminación" sobre el espectro, son el cambio de longitud de onda, los cambios de amplitud y los efectos de tener un intervalo finito (e.g. leakage). Los cambios en la amplitud y número de onda pueden ser agrupados en cambios continuos debido a la refracción con el viento medio, disipación; cambios discretos, debido a discontinuidades en la frecuencia de Brunt Vaisala, generación de ondas, ruido, etc.

Estos efectos producen "contaminación" en la cola espectral con pendientes similares a las observadas. De manera que esta contaminación puede estar influyendo en la determinación tanto de la energía, como de la pendiente de la cola espectral, por lo cual no se puede atribuir las pequeñas variaciones en la pendiente como provenientes del campo de ondas, sino que pueden ser un efecto de la falta de periodicidad que presentan los perfiles observados.

II. DESCRIPCIÓN

Desarrollo de una onda de gravedad simple

Dado que estamos interesados en analizar la forma espectral de una onda de gravedad, en primera medida haremos el desarrollo de estas ondas, para obtener una forma analítica de éstas, asumimos las hipótesis de

* Autor a quién debe dirigirse la correspondencia.

ondas de gravedad hidrostáticas en una atmósfera no rotante.

Estas ondas satisfacen la ecuación:

$$\tilde{w}_{zz} + \frac{N(z)^2}{\cos^2 \varphi (\bar{u}(z) - c)^2} \tilde{w} = 0$$

c es la velocidad de fase en la dirección x ,

$\bar{u}(z)$ es la velocidad media del viento (Background wind),

φ es la dirección horizontal de propagación de la onda,

$N(z)$ es la frecuencia de Brunt Vaisala.

Donde la velocidad vertical w' esta definida como:

$$w' = \tilde{w}(z) \exp\left[\frac{z}{2H} + i k_x (x - ct)\right] \cos(k_y y + \phi)$$

k_x número de onda longitudinal, k_y número de onda latitudinal, H constante de altura.

Asumiendo que \bar{u}_{zz} no es demasiado grande en esta aproximación es valida la solución dada por el método WKB (Mathews and Walker 1979⁽⁸⁾) esto es:

$$\tilde{w}(z) = A k(z)^{-1/2} \exp\left(i \int k(z') dz'\right)$$

$k(z)$ es el número de onda en altura, en la aproximación utilizada es:

$$k(z)^2 = \frac{N(z)^2}{\cos^2 \varphi (\bar{u}(z) - c)^2}$$

Para las longitudes de ondas con las cuales vamos a trabajar podemos simplificar la ecuación de continuidad a la forma:

$$\nabla \cdot \bar{U} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \bar{U}_H + i k w' = 0$$

Bajo las suposiciones dadas por Lindzen(1981)⁽⁹⁾ la divergencia horizontal esta dada por

$$\nabla \cdot \bar{U}_H \approx i k_x \left(1 + \frac{k_x^2}{k_y^2}\right) u'$$

La solución resultante para u' será:

$$u'(z) = A k(z)^{1/2} \exp\left[z/2H + i \int k(z') dz'\right]$$

donde A es una constante (independiente de z).

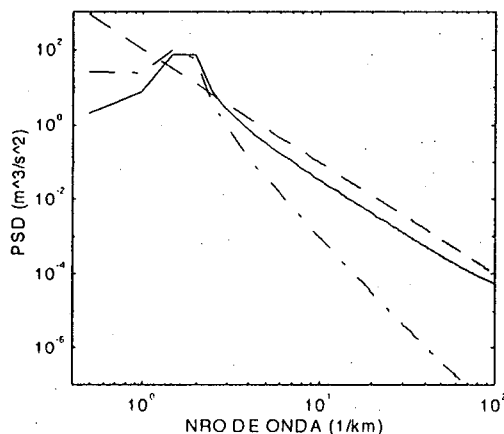


Fig. 1 PSD de onda simple de modo $n=3.5$. Línea a trazos corresponde a una ordenada y pendiente tipo para un caso real.

Como suponemos que k_x y k_y son independientes de z , bajo esta aproximación existen dos términos básicos que afectan la forma de la onda en la vertical, por un lado, el término $\exp[i \int k(z) dz]$ que establece la longitud de onda y sus variaciones con la altura y por otro lado el término $k(z)^{1/2} \exp(z/2H)$ que es la forma funcional de la amplitud de la onda a menos de una constante multiplicativa.

III. ANÁLISIS ESPECTRAL

Un viento medio variable en z , cambios repentinos en la frecuencia de Brunt Vaisala, fuentes de energía de ondas debido a la orografía, tormentas, frentes, etc; hacen que una onda de gravedad en función de z pueda tener cambios continuos y discretos en la longitud de onda y en la amplitud de onda.

A continuación veremos la forma espectral que tienen este tipo de efectos, cuando se trabaja con las técnicas espectrales convencionales (fast fourier transform, transformada de Fourier convencional, etc.).

En la fig. 1, está el espectro de una onda simple cuyo número de onda es 5.5, como se puede observar, al no ser el número de onda un modo espectral, hay un pico en los modos 5 y 6, y en el resto del espectro hay "contaminación", cuyas energías son del orden de las energías medidas.

La onda simple utilizada tiene una amplitud de 12 m/s y el largo del intervalo es de $L=12.8$ km (longitud de onda, $L/5=2.56$ km) es decir estamos usando las "escalas" observadas.

Este efecto es denominado leakage y aparece debido a que trabajamos con un intervalo finito, existen técnicas espectrales para disminuirlo tales como el "Windowing" (ver Press et al., 1992⁽¹⁰⁾).

Para analizar los efectos que las dependencias en z , producen sobre el espectro, analizaremos por separado las dependencias de la longitud de onda y las dependencias de la amplitud.

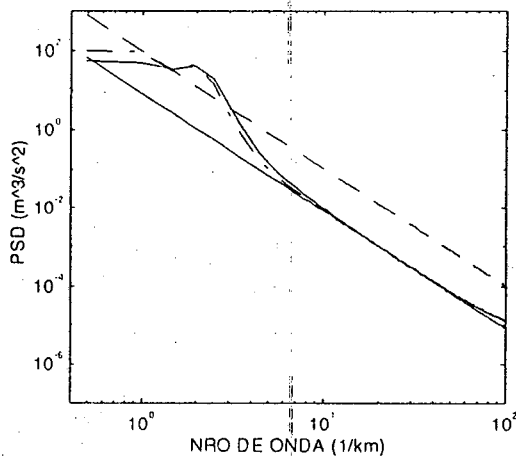


Fig. 2. PSD para perfiles con longitud de onda variable para un seno (trazo continuo) y un coseno (punto y raya), la recta a trazos como en Fig 1. Línea recta continua es el primer término del desarrollo (*)

a. Cambios continuos en la longitud de onda

El perfil utilizado es de la forma: $\exp[i \int k(z) dz]$

Encontramos dos efectos que dominan la forma espectral, por un lado para los grandes números, y por otro, para pequeños números de onda este efecto será descrito en la sección e).

Para números de onda mayores al k máximo, debido a la discontinuidad en los extremos del intervalo, aparece una cola espectral de pendiente -2. Esto se puede demostrar haciendo un desarrollo en potencias inversas, para grandes números de onda el PSD será:

$$\text{PSD}(m) = \frac{(1 - \cos \int_0^L k(z) dz)^2}{m^2} + \frac{k(L)^2 \sin^2 \int_0^L k(z) dz}{m^4} + \sigma \left(\frac{1}{m^6} \right)$$

donde L es la longitud del intervalo y m es el número de onda.

La amplitud de la cola está dada por la diferencia de la función en los extremos del intervalo.

En la fig. 2, hay una simulación de una onda de gravedad de amplitud constante en un viento medio lineal. Amplitudes y longitudes de onda son comparables a los valores observados. Se muestra la relación obtenida (*), la cual es una buena aproximación para la cola espectral.

b. Variaciones continuas en la amplitud para un número de onda constante

Suponiendo una onda de la forma:

$k(z)^{1/2} \exp(z/2H) \exp(ikz)$ la amplitud del bin principal (llamamos bin al intervalo de números de ondas que van desde $i-1/2$ hasta $i+1/2$ donde i es el i -ésimo modo. El PSD del modo es una media de los

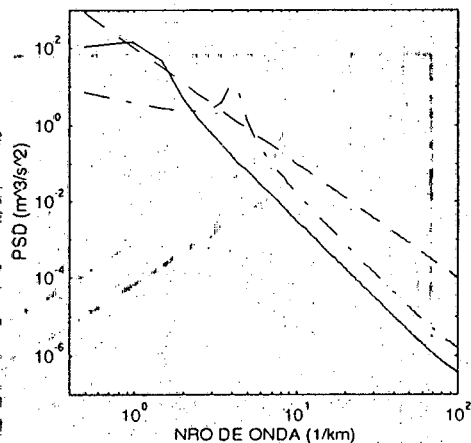


Fig. 3. PSD para perfiles con amplitud variable para dos longitudes de onda, 5 km (trazo continuo) y 1.5 km (punto y raya), la recta a trazos como en Fig 1 (Los extremos son 0 para eliminar leakage).

PSD en el bin. En la fig. 3, se muestra un perfil de perturbaciones, con un viento medio lineal, y una constante de altura de 8 km. La cola espectral es de -4. A mayor número de onda mayor es el efecto sobre los grandes números de ondas en el PSD.

c. Variaciones discontinuas en el número de onda

Si suponemos una onda de la forma:

$$u(z) = \begin{cases} \sin(k_1 z) & \text{para } 0 < z < z_1 \\ \sin(k_2 z) & \text{para } z_1 < z < z_2 \\ \sin(k_3 z) & \text{para } z_2 < z < L \end{cases}$$

la transformada de Fourier de esta función da:

$$U(m) = \frac{-\cos(k_1 z)}{k_1 - m} \Big|_0^{z_1} + \frac{-\cos(k_2 z)}{k_2 - m} \Big|_{z_1}^{z_2} + \frac{-\cos(k_3 z)}{k_3 - m} \Big|_{z_2}^L$$

De esta manera el PSD de este espectro tiene oscilaciones en la cola espectral y pendiente -3. Provenientes de variaciones discontinuas en el número de onda.

En la fig. 4 se muestra un caso particular (para tres longitudes de onda, 1.7, 3.04, 1.39 km), notar que debido a que las oscilaciones disminuyen su amplitud en la cola, la pendiente media del perfil no solo está dada por la inversa de m (en $U(m)$) sino que puede ser alterada por las oscilaciones (por el factor coseno).

d. Variaciones discontinuas en la amplitud de onda

Si suponemos una onda de la forma:

$$u(z) = \begin{cases} A_1 \sin(kz) & \text{para } 0 < z < z_1 \\ A_2 \sin(kz) & \text{para } z_1 < z < z_2 \\ A_3 \sin(kz) & \text{para } z_2 < z < L \end{cases}$$

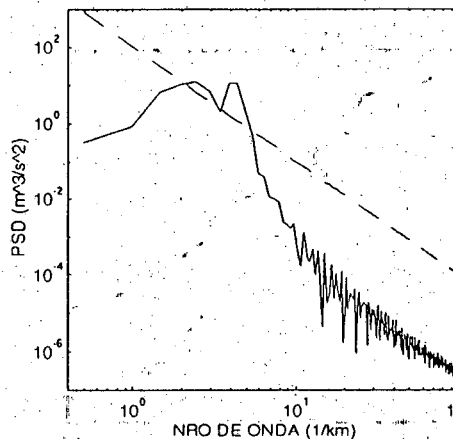


Fig. 4. PSD perfiles con longitudes de ondas discontinuas, las longitudes de onda son de abajo hacia arriba, 1.7, 3.04, 1.39 km. Las tres ondas están pegadas en los ceros.

La transformada de Fourier de esta función da:

$$U(m) = \frac{-A_1 \cos(kz)_0^{z_1} - A_2 \cos(kz)_{z_1}^{z_2} - A_3 \cos(kz)_{z_2}^L}{k - m}$$

De la misma manera que en el PSD anterior, esta tiene oscilaciones en la cola espectral y pendiente -3. Provenientes de variaciones discontinuas en el amplitud de onda.

Los efectos c) y d) los cuales están presentes en los perfiles reales se pueden interpretar como un leakage interno. Notar que en este efecto entran las perturbaciones que permanecen por una longitud de onda y luego se desvanecen.

La forma espectral de este perfil es de características similares a la de cambios en la longitud de onda, salvo que las amplitudes de las oscilaciones en este caso aumentan cuando aumenta el número de onda (fig. 4).

e. Variaciones continuas con el número de onda (segunda parte)

Las expresiones que resultan de considerar como número de onda, funciones analíticas, no son integrables analíticamente por lo cual haremos un análisis cualitativo de los efectos que producirían estas variaciones en el número de onda.

Dado el *i*-ésimo bin, hay dos situaciones, que la función *k(z)*, no tenga en todo el intervalo los números de ondas asociados con el *i*-ésimo bin, esta situación ya fue descrita en a. Por otro lado si *k(z)* tiene nros de onda correspondientes al *i*-ésimo bin llamaremos *L* a la longitud del intervalito en la cual:

$$\frac{2\pi}{L} (i - 1/2) < k(z) < \frac{2\pi}{L} (i + 1/2)$$

Esta será la longitud de intervalito en el cual el perfil contribuye al *i*-ésimo bin, si suponemos que en

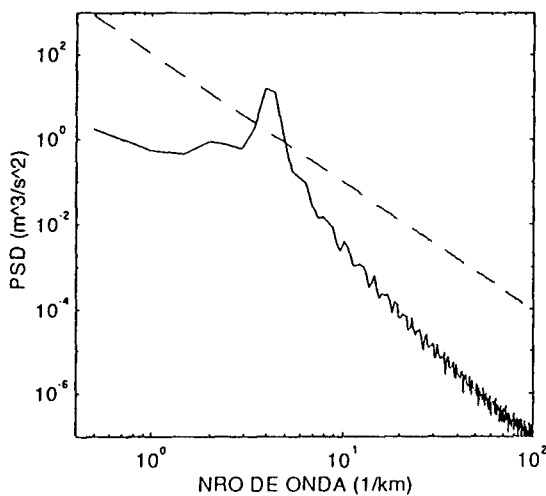


Fig. 5 PSD para perfiles con amplitudes de onda son de abajo hacia arriba, 2, 4, 7 m/s, longitud de onda 1.5 km. Las tres ondas están pegadas en los cerros. La recta a trazos como en Fig. 1 (Los extremos son 0 para eliminar leakage).

este intervalito la longitud de la onda es constante, teniendo en cuenta solo el término de primer orden:

$$U(m) = \frac{1A}{2} \exp[i(k - m) z_0]$$

Donde *z*₀ es la altura mínima donde el *k(z)* entra al *i*-ésimo bin. El PSD quedará, PSD(*m*) ∝ 1/*m*, de esta manera si el tipo de perturbación permanece por una longitud de onda (Monserrat and Thorpe, 1996⁽¹¹⁾) la pendiente espectral será de -3. Notar que esto es totalmente distinto al leakage ya que la amplitud de la *i*-ésimo bin proviene de una onda cuyo número de onda pertenece a esa bin, mientras en el leakage la amplitud de la bin provenía de efectos residuales de ondas correspondientes a otras bin.

En fig. 6, hay un PSD de un perfil donde tiene una longitud de onda de cada modo, desde longitud de onda 1.83 km hasta 0.25 km, este perfil dista mucho de un caso real. Solo se pretende mostrar el peso espectral de cada modo, se pueden observar una región de alta energía con pendiente de -2.5 y la zona para grandes números de onda de pendiente -3, el hecho que la pendiente de -2.5 en lugar de -3 se puede deber a contaminación de las bin vecinas.

IV. ANÁLISIS DE UN PERFIL REAL

Para ilustrar el efecto de leakage en perfiles de viento observados, tomamos los datos analizados en Pulido et al.(1997)⁽¹²⁾, y se tomó como extremos de los perfiles altos valores de la amplitud de manera tal que el efecto fuera mas notable. Para medir este efecto se filtró el perfil para longitud de ondas menores a 1 km, con el filtro utilizado por Scavuzzo et al. (1997)⁽¹³⁾, y de esta manera se saca las PSD para ambos, perfil original y perfil filtrado.

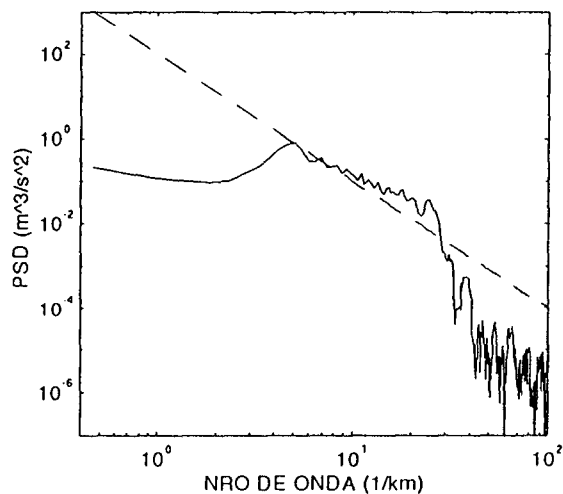


Fig. 6. PSD para perfil con una longitud de onda en un intervalito de longitud de onda, disminuyendo la longitud de onda de abajo hacia arriba desde 1.83 a 0.25 km. La recta a trazos como en Fig 1.

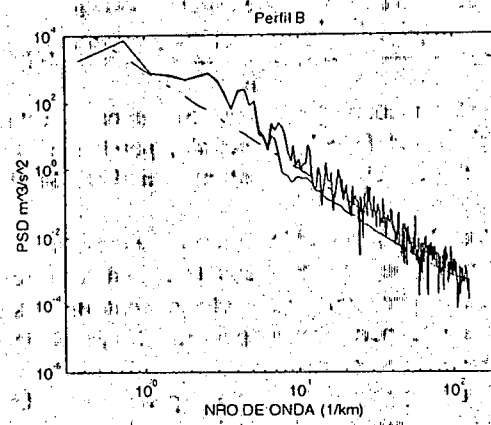
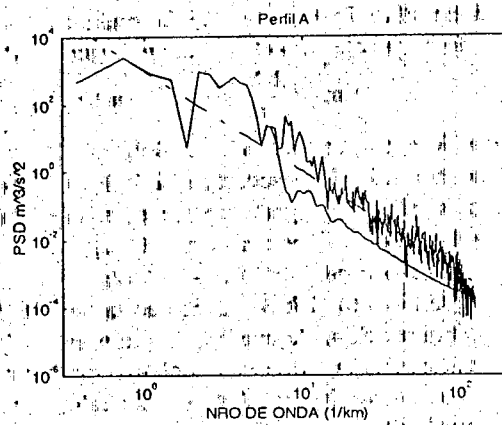


Fig. 7. Power spectral densities para dos perfiles de viento, el gráfico continuo es el perfil filtrado, curva oscilante perfil original, a trazos referencia.

En fig. 7 se superponen las PSD. Se puede observar que las energías del perfil filtrado en la cola, son del orden de las energías del perfil sin filtrar, y las pendientes también son comparables.

Si comparamos este espectro real con las simulaciones es de notar que éstas tienen energías comparables en una banda espectral pero la energía total de las simulaciones es menor a las observadas. Los efectos representados en la sección III, se sumarían cuando se tiene una superposición de ondas de pequeño número de onda (Con energías totales comparables a las observadas).

V. DISCUSIÓN

Con este trabajo hemos mostrado que existen varios efectos de contaminación espectral debido a que los perfiles observados no son ondas simples. Este corrimiento de energía se realiza siempre de la misma manera de los pequeños números de onda a los grandes números de onda.

Por lo tanto la cola espectral esta altamente contaminada por estos efectos siendo además la banda espectral donde hay menor energía, por lo tanto se espera que haya sensibilidad en la pendiente y la amplitud debido a la contaminación. Es de importancia entonces medir las energías involucradas con estos efectos en perfiles reales. Actualmente estamos desarrollando técnicas que intentan cuantificar estas energías, estos resultados serán publicados en un próximo trabajo.

Los efectos de contaminación observados en la mayoría de los casos estudiados dan pendientes de -2 a -4, similares a las pendientes de perfiles de viento reales.

Se pretende además inquietar acerca de: Son las variaciones de pendientes y amplitud del espectro de campos de ondas observados realmente provenientes de procesos físicos o es debida a la alta sensibilidad de las técnicas espectrales en los grandes números de onda?

Referencias

- 1 - VanZandt, T. E. Geophys. Res. Lett., 9, 575-578 (1982).
- 2 - Fritts D. C., Tsuda T., Sato T., Fukao S. and Kato S., J. Atmos. Sci., 45, 1741-1759 (1988).
- 3 - Allen S. J. and Vincent R. A., J. Geophys. Res., 100, 1327-1350 (1995).
- 4 - Dewan, E. M. and Good R. E., J. Geophys. Res., 91, 2742-2748 (1986).
- 5 - Hines, C. O., J. Atmos. Sci., 48, 1360-1379 (1991).
- 6 - Weinstock, J., J. Atmos. Sci., 47, 2211-2225 (1990).
- 7 - Eckermann S. D., J. Geophys. Res., 100, 14097-14112 (1995).
- 8¹ Mathews and Walker. Matemáticas para físicos. 1979. Ed. Reverté.
- 8 - Lindzen R. S., J. Geophys. Res., 86, 9707-9714 (1981).
- 10 - Press W., Teukolsky S., Vetterling W. and Flannery, 1992. Numerical Recipes in Fortran, the art of the scientific computing, 2nd ed. Cambridge University Press.
- 11 - Monserrat and Thorpe, J. Atmos. Sci., 53, 1724-1736 (1996).
- 12 - Pulido M., Lanfri M., Scavuzzo M., Caranti G., Enviado a publicar Anales AFA (1997).
- 13 - Scavuzzo M., Lanfri M., Lott F., Teitelbaum H., J. Geophys. Res., En prensa (1996).