

Soluciones con tiempo de espera para flujos gaseosos isotérmicos en un medio poroso: II Asintótica cerca del arranque

CARLOS A. PERAZZO[†], CLAUDIO L. M. VIGO[†] Y JULIO GRATTON^{†*}

[†]INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS, FUNDACIÓN UNIVERSITARIA DR. RENÉ G. FAVALORO
SOLÍS 453, 1078 BUENOS AIRES - TEL-FAX: 381-0323

[†]DEPARTAMENTO DE FÍSICA, FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES, UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
PABELLÓN I, CIUDAD UNIVERSITARIA, 1428 BUENOS AIRES - TEL: 784-8104 - FAX: 787-2712
jgratton@tinfiplfp.uba.ar

El análisis de las soluciones con tiempo de espera de la ecuación $h_t = (h^m h_x)_x$, ($m=1$) obtenidas en la parte I de este trabajo, con condiciones iniciales de la forma $h(x \geq 0, 0) \propto x^p$, $h(x < 0, 0) = 0$ ($p > 2/m$), muestra dos diferentes regímenes asintóticos autosemejantes que se desarrollan en dominios espacio-temporales próximos al frente y al instante en que éste se pone en movimiento. Detrás, pero no demasiado cerca del *corner layer* (que ocurre cuando está por concluir el tiempo de espera), se desarrolla un régimen asintótico del tipo LOT, correspondiente a un exponente de autosemejanza $\delta > 1$. Además, en el entorno del *corner layer*, la solución toma la forma de onda viajera. Estos resultados son análogos a los que se han obtenido para las soluciones con tiempo de espera de flujos viscogravitatorios ($m=3$), observándose también regímenes asintóticos LOT tipo E cuando p es próximo a $2/m$, que no se observaron para $m=3$. Se estudia en detalle el desarrollo de estas soluciones asintóticas y se determina la velocidad de arranque del frente.

The analysis of the waiting-time solutions of the equation $h_t = (h^m h_x)_x$, ($m=1$) obtained in the part I of this work, with initial conditions of the form $h(x \geq 0, 0) \propto x^p$, $h(x < 0, 0) = 0$ ($p > 2/m$), shows two different self similar asymptotic regimes which develop in space-time domains close to the front and near the start-up. Behind, but not too close to the *corner layer* (that occur near the end of the waiting-time), an asymptotic regime of the LOT type develops, corresponding to an exponent of self-similarity $\delta > 1$. In addition, in the neighborhood of the *corner layer*, the solution takes the form of a travelling wave. Although these results are similar to those obtained in the case of waiting-time viscous gravity currents ($m=3$), now an asymptotic regime of type LOT E is observed when p is close to $2/m$, unlike the $m=3$ case. The developments of these asymptotic regimes are studied and the start-up velocity is assessed.

Introducción

La solución de la ecuación de difusión no lineal

$$h_t = (h^m h_x)_x, \quad h = h(x, t) \geq 0, \quad m \geq 0 \quad (1)$$

con condiciones iniciales de la forma:

$$h(x, t_i) = \begin{cases} Kx^p & \text{si } 0 < x \leq x_0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$K > 0$ y $t_i = -t_w$, con una pared aislante en x_0 , tal que se verifica $h_x(x_0, t) = 0$, tiene tiempo de espera t_w si $p \geq 2/m$ (ver parte I de este trabajo). Durante este lapso finito el frente permanece inmóvil mientras el perfil detrás se modifica.

Cerca del frente y próximo al momento del arranque, donde las escalas del problema dejan de ser relevantes, es posible (aunque no seguro) que se desarrolle un régimen autosemejante en la variable $\xi = x/ht^\delta$. Como en este caso la autosemejanza es de segunda especie¹, no es posible

* Autor a quien debe dirigirse la correspondencia.

determinar b y δ sino a través de experiencias, o resolviendo numéricamente el problema de condiciones iniciales y siguiendo la evolución del fenómeno hasta que el régimen autosemejante sea alcanzado. Es importante destacar que nada asegura que esto realmente suceda, podría no desarrollarse ningún régimen autosemejante.

Existen varias clases de soluciones autosemejantes con tiempo de espera (STE):

- 1) *Soluciones LOT² tipo L, E o N*: en estas el valor de δ puede tomar cualquier valor $\delta > 1$. Las de tipo L ($1 < \delta < (4+3m)/(4+2m)$) presentan una sucesión infinita de *corner layer* con punto de acumulación en el frente. Las de tipo E o N ($\delta > (4+3m)/(4+2m)$) no presentan *corner layer*.
- 2) *Soluciones tipo A*, que existen para $\delta \leq 1$; de estas sólo interesa la onda viajera $w(x,t)$, que corresponde a $\delta = 1$, y se desplaza a velocidad constante $c \neq 0$, sin cambio de forma:

$$h(x,t) = w(x,t) \equiv [cm(ct+x)]^{1/m} \quad (3)$$

describiendo a un *corner layer* fuerte que se acerca y sobrepasa al frente que espera, en el límite en que la influencia de la parte del perfil de h que tiene por delante³ es despreciable.

En este trabajo nos interesa analizar el régimen asintótico cerca del frente y próximo al momento del arranque de las STE de ecuaciones (1) y (2) con $m=1$ presentadas en la parte I de este trabajo. Se determina el tipo de autosemejanza que se desarrolla y el correspondiente valor del exponente de autosemejanza δ . Se obtiene la velocidad c de arranque del frente en función de p .

Métodos

Obtención de las soluciones numéricas

Las soluciones numéricas estudiadas son las presentadas en la parte I, por lo que referimos a los lectores a dicho trabajo.

Obtención de las STE autosemejantes

Resulta de mucha utilidad para la obtención de las soluciones autosemejantes utilizar el formalismo del plano de fase⁴. Eligiendo $v = -h^{m-1}h_x$, de modo que (1) es $h_t + (vh)_x = 0$, puede definirse mediante argumentos dimensio-

nales las variables de fase $Z = (hx^2/t)^m$ y $V = vt/x$, con $\xi = x/ht^\delta$, de modo que $Z = Z(\xi)$ y $V = V(\xi)$. De esta manera las dos ecuaciones acopladas en h y v , se transforman en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas en la variable de autosemejanza ξ .

$$\frac{dV}{dZ} = \frac{Z(2\delta - 1) + mZV + m(\delta - V)V}{mZ(2Z + mV)} \quad (4)$$

$$\frac{d \ln|\xi|}{dZ} = -\frac{1}{2Z + mV}$$

De la primera de estas ecuaciones (4), siguiendo las prescripciones dadas por Lacey *et al*² para construir STE autosemejantes que se continúen con soluciones con frentes que avanzan, obtenemos $V(Z)$, de la segunda $Z(\xi)$ y finalmente h .

Determinación de δ y c

En el momento del arranque el perfil debe ser de la forma $h(x,0) \propto x^{(2-1/\delta)/m}$, por lo que graficando $\log(h(x,0)/x^{1/m})$ vs $\log(x)$, un tramo recto horizontal corresponde según (3), a una solución A con $\delta = 1$ (onda viajera), y un tramo recto con pendiente positiva corresponde a $\delta > 1$ (solución LOT). Esto permite determinar el tipo de régimen autosemejante que se desarrolla, y el correspondiente valor de δ . Por otra parte, si la solución es autosemejante de tipo A, se puede obtener la velocidad de arranque del frente c a partir de $\log(h(x,0)/x^{1/m}) = \log(cm)/m$.

Resultados

En la figura 1 se muestra $\log(h(x,0)/x^{1/m})$ vs $\log(x)$ con $p=2.3$, para dos resoluciones distintas, con el objeto de descontar los efectos espurios introducidos por la no uniformidad de la grilla⁵. Se observa cerca del frente una zona horizontal que indica la existencia de un régimen autosemejante tipo A. Detrás de esta zona, pero lejos de la pared, se observa un tramo recto con pendiente positiva que marca la existencia de un régimen autosemejante tipo LOT, con $\delta = \delta_{LOT}(p)$. Resultados similares se obtienen para otros valores de p .

En la figura 2 se muestran los valores de $\delta = \delta_{LOT}(p)$. La línea horizontal marca el valor

$\delta_{LOT}=7/6$ que es el que separa las soluciones tipo L de las E. Notemos que para valores de p cercanos a 2, surgen soluciones tipo E. La velocidad c con que arranca el frente como función de p se muestra en la figura 3.

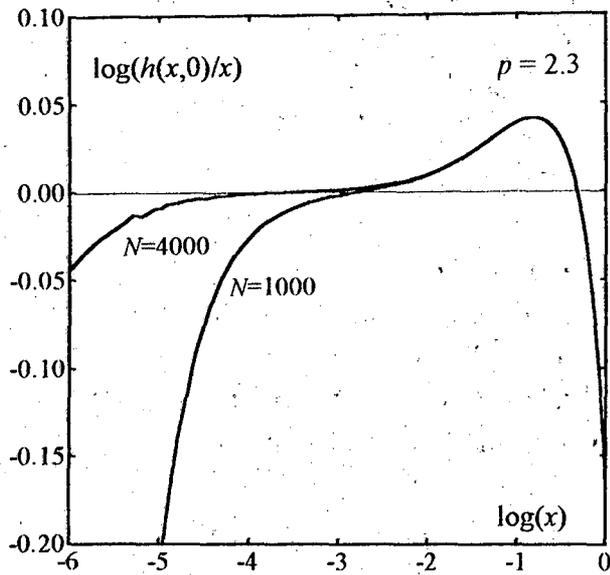


Figura 1. Gráficos de $\log(h(x,0)/x)$ vs $\log(x)$ para $p=2.3$ con una grilla numérica 1000 y 4000 puntos entre 0 y 1.

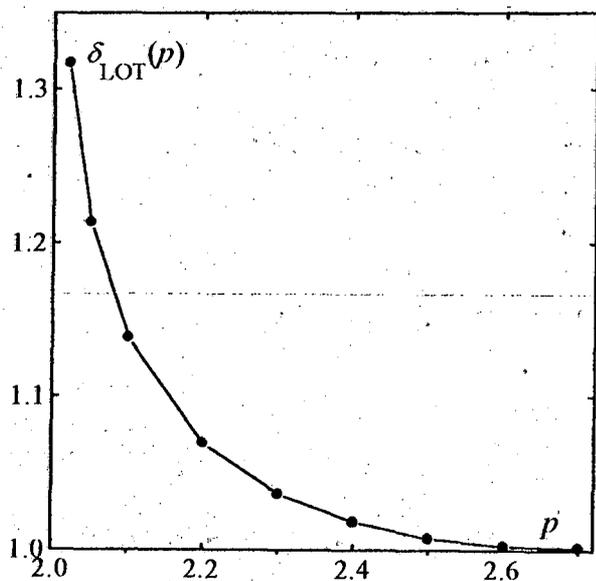


Figura 2. Exponente de autosemejanza δ_{LOT} en función de p .

En las figuras 4 y 5 se muestran las soluciones numéricas para tiempos cercanos al momento del arranque, con $p=2.3$ y $p=2.05$ respectivamente, junto con las soluciones autosemejantes LOT con el valor de δ_{LOT} adecuado, que para $p=2.3$ es mayor a $7/6$ (LOT L) y para $p=2.05$ menor (LOT E). Se puede observar la excelente

superposición de estas curvas lo que asegura la aparición de un régimen asintótico autosemejante tipo LOT.

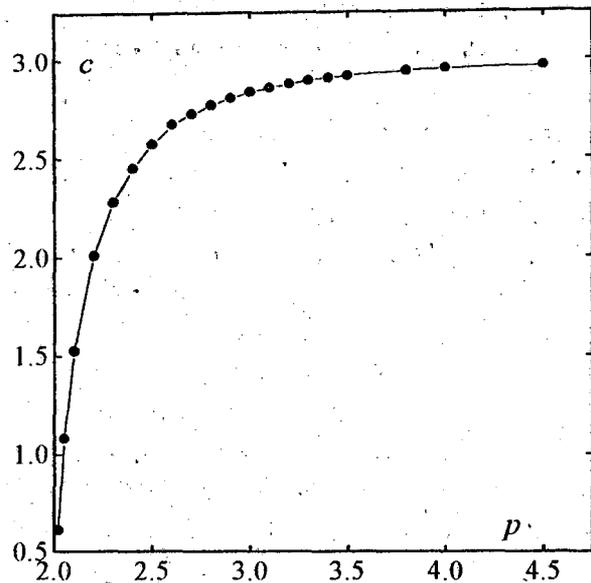


Figura 3. Velocidad c de arranque del frente en función de p .

Conclusiones

Al igual que en el caso $m=3$, se desarrollan dos regímenes asintóticos autosemejantes en dos dominios espacio temporales distintos³. Uno muy cerca del frente y próximo al arranque, donde la solución es del tipo onda viajera, con $\delta=1$, que describe un *corner layer* fuerte que se

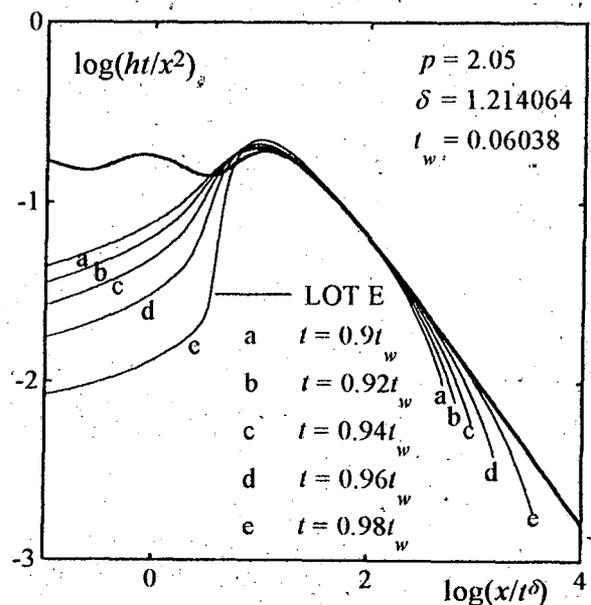


Figura 4. Solución LOT con $\delta_{LOT}=1.214064$ y soluciones numéricas con $p = 2.05$

acerca al frente y lo supera. Esto permite interpretar al movimiento del *corner layer* y del frente como dos instancias sucesivas de un mismo fenómeno, la propagación de una onda. De esta manera la velocidad de arranque del frente es la velocidad de dicha onda.

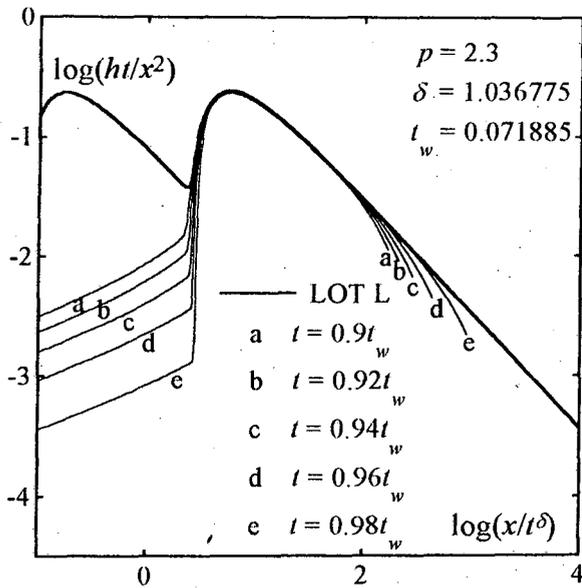


Figura 5. Solución LOT con $\delta_{LOT}=1.036775$ y soluciones numéricas con $p=2.3$

El otro régimen autosemejante es del tipo LOT, y se encuentra cerca del frente, pero no demasiado, y próximo al arranque, pero excluyéndolo. El valor de $\delta=\delta_{LOT}>1$ es determinado por las condiciones iniciales. Existe un valor de p debajo del cual el régimen autosemejante LOT es del tipo E, y por encima es tipo L. Este resultado introduce una diferencia con el caso $m=3$, en el cual sólo se observaron soluciones tipo L.

Referencias

- 1 - Barenblatt, G. I., *Similarity, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics*, Consultant Bureau (1979).
- 2 - Lacey, A. A., J. R. Ockendon y A.B. Tayler, *J. Appl. Math.* **42**, 1252-1264 (1982).
- 3 - Gratton, J. y C. L. M. Vigo, *European. J. Appl. Math.*, en prensa.
- 4 - Gratton, J. y F. Minotti, *J. Fluid Mech.*, **210**, 155-182 (1990).
- 5 - Gratton, J. y C. L. M. Vigo, *Anales AFA*, **8**, en prensa.