

# Estudio numérico de soluciones con tiempo de espera de ecuaciones no lineales de difusión

CARLOS A. PERAZZO<sup>†</sup>, CLAUDIO L. M. VIGO<sup>†</sup> Y JULIO GRATTON<sup>‡\*</sup>

<sup>†</sup>INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS, FUNDACIÓN UNIVERSITARIA DR. RENÉ G. FAVALORO  
SOLÍS 453, 1078 BUENOS AIRES - TEL-FAX: 381-0323

<sup>‡</sup>DEPARTAMENTO DE FÍSICA, FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES, UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
PABELLÓN I, CIUDAD UNIVERSITARIA, 1428 BUENOS AIRES - TEL: 784-8104 - FAX: 787-2712

*jgratton@tinfiplfp.uba.ar*

Se estudian soluciones numéricas de la ecuación  $h_t = (h^m h_x)_x$  para varios valores de  $m$  y condiciones iniciales de la forma  $h(x,0) \propto x^{\alpha q}$  ( $q=2/m$ ). Si  $\alpha > 1$  las soluciones tienen un tiempo de espera  $t_w = t_w(m, \alpha)$ . En trabajos anteriores se estudiaron en detalle los casos  $m=3$ , correspondiente a corrientes viscogravitatorias sobre una superficie rígida horizontal, y  $m=1$ , que describe la percolación isotérmica de un gas en un medio poroso y el flujo en acuíferos no confinados. Aquí comparamos los resultados para varios valores en el rango  $1/2 \leq m \leq 9$ . Se presentan las soluciones numéricas en detalle y se discute la dependencia del tiempo de espera en  $m$  y  $\alpha$ . Se determina  $t_w$  y se compara la formación y evolución del *corner layer*. Se encuentra empíricamente que los valores de  $\alpha(m, \alpha) = (t_w^{\beta/m} - t_c^{\beta/m}) / (t_p^{\beta/m} - t_c^{\beta/m})$  se disponen con buena aproximación sobre una curva universal que no depende de  $m$  (aquí  $t_c = t_w(m, \alpha=1)$  y  $t_p = t_w(m, \alpha=\infty)$  están dados por fórmulas conocidas y  $\beta$  es un parámetro constante de valor próximo a 1).

The numerical solutions of the equation  $h_t = (h^m h_x)_x$  for different values of  $m$  and initial conditions of the form  $h(x,0) \propto x^{\alpha q}$  ( $q=2/m$ ) are studied. If  $\alpha > 1$  the solutions have a waiting-time  $t_w = t_w(m, \alpha)$ . In previous works, we studied in detail the cases  $m=3$ , corresponding to viscous gravity currents, and  $m=1$ , corresponding to isothermal gaseous percolation through a porous medium and the flow in unconfined aquifers. Here we compare the results for different values of  $m$  in the range  $1/2 \leq m \leq 9$ . Numerical solutions are shown in detail and the  $m$  and  $\alpha$  dependence of the waiting time are discussed. We determine  $t_w$  and compare the growth and evolution of the *corner layer*. Empirically it was found that values of  $\alpha(m, \alpha) = (t_w^{\beta/m} - t_c^{\beta/m}) / (t_p^{\beta/m} - t_c^{\beta/m})$  are disposed with good approximation on the universal curve independently of  $m$  (here  $t_c = t_w(m, \alpha=1)$  and  $t_p = t_w(m, \alpha=\infty)$  are given by known formulae and  $\beta$  is a constant parameter with value close to 1).

## Introducción

Existe una gran variedad de fenómenos descritos por la ecuación de difusión no lineal

$$h_t = (h^m h_x)_x, \quad h = h(x,t) \geq 0, \quad m \geq 0 \quad (1)$$

donde el valor de  $m$  y el significado de  $h$  dependen del fenómeno en particular. Algunos ejemplos son: las corrientes viscogravitatorias sobre una superficie rígida horizontal<sup>1</sup> ( $m=3$ ,

$h$ =profundidad de la corriente), flujo gaseoso a través de medios porosos<sup>2</sup> ( $m \geq 1$  y  $h$ =presión del gas,  $m=1$  para flujo isotérmico), dispersión de algunas especies biológicas<sup>3</sup> ( $m \geq 1$  y  $h$ =densidad de población), flujo en acuíferos no confinados<sup>4</sup> ( $m=1$  y  $h$ =presión en exceso de la atmosférica), conducción térmica en plasmas<sup>5</sup> ( $m=5/2$ ), gases múltiplemente ionizados ( $m=4.5-5.5$ ) y gases totalmente ionizados<sup>6</sup> ( $m=13/2$ ), etc.

\* Autor a quién debe dirigirse la correspondencia.

Definiendo  $\eta = h^m$ ,  $\phi = t/m$  la ecuación (1) toma la forma

$$\eta_\phi = \eta_x^2 + m\eta\eta_{xx} \quad (2)$$

mostrando que la evolución de  $\eta$  es resultante de la combinación de un término de difusión no lineal ( $m\eta\eta_{xx}$ ) y otro de propagación no lineal ( $\eta_x^2$ ). El primero lleva a la aparición de frentes, cuyo movimiento es continuo y nunca se invierte. El segundo término tiende a generar discontinuidades de  $h_x$  (*corner shock*), que el término difusivo suaviza dando como resultado un *corner layer*, un pequeño intervalo  $\Delta x$  en el que hay fuertes variaciones de  $h_x$ .

Un aspecto importante de la ecuación (1) es que posee soluciones con tiempo de espera (STE) en las que, dependiendo de las condiciones iniciales, el frente permanece inmóvil durante un intervalo de tiempo finito y no nulo  $t_w$  mientras el perfil detrás se modifica. Kath y Cohen<sup>7</sup> mostraron que en el caso  $m \ll 1$  para perfiles iniciales  $h(x \geq 0, 0) \propto x^p$  hay tiempo de espera si  $p > 2/m$  (Vazquez<sup>8</sup> generalizó este resultado a todo  $m$ ), y se desarrolla un *corner layer*. Si  $p = 2/m$  hay tiempo de espera y un *corner shock* se forma en el frente en el momento del arranque.

En este trabajo se presentan soluciones numéricas de la ecuación (1) con  $1/2 \leq m \leq 9$  con perfiles iniciales proporcionales a  $x^p$ . Se analiza cómo la formación y evolución del *corner layer* y  $t_w$  dependen de  $m$  y de las condiciones iniciales.

### Métodos

El problema a resolver es la ecuación (1) con condiciones iniciales de la forma

$$h(x, t_i) = \begin{cases} Kx^{\alpha q} & \text{si } 0 < x \leq x_0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$\alpha > 1$ ,  $q = 2/m$ ,  $K > 0$  y  $t_i = -t_w$ . En  $x_0$  hay una pared aislante, tal que se verifica  $h_x(x_0, t) = 0$ . Definimos variables adimensionales  $x' \equiv x/x_0$ ,  $h' \equiv h/h_0$  y  $t' \equiv t/t_0$ , donde  $t_0 \equiv x_0^2/h_0^m$  y  $h_0$  es elegida tal que para todo  $\alpha$  se verifique  $\int h'(x', t') dx' = 1$ . En adelante suprimiremos las

primas. De esta manera las condiciones iniciales (3) resultan

$$h(x, t_i) = \begin{cases} (\alpha q + 1)x^{\alpha q} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

y la condición de contorno  $h_x(1, t) = 0$ .

El esquema numérico es implícito en diferencias finitas centradas, con una grilla no uniforme, para obtener mayor resolución en la zona del frente, dado que es la que más nos interesa.

Es conveniente notar que para un dado  $\alpha$  los perfiles iniciales de  $h$  serán diferentes a distintos  $m$ , pero serán de la misma forma los perfiles iniciales de  $\eta$ . Por otra parte existen razones para esperar que cerca del momento del arranque  $h$  sea proporcional a  $(x - x_c)^{1/m}$ , donde  $x_c$  es la posición del *corner layer*, por lo que  $\eta$  sería proporcional a  $(x - x_c)$  independientemente de  $m$ <sup>9,10</sup>. Todo esto justifica que las soluciones numéricas obtenidas sean presentadas en términos de  $\eta$  y no de  $h$ .

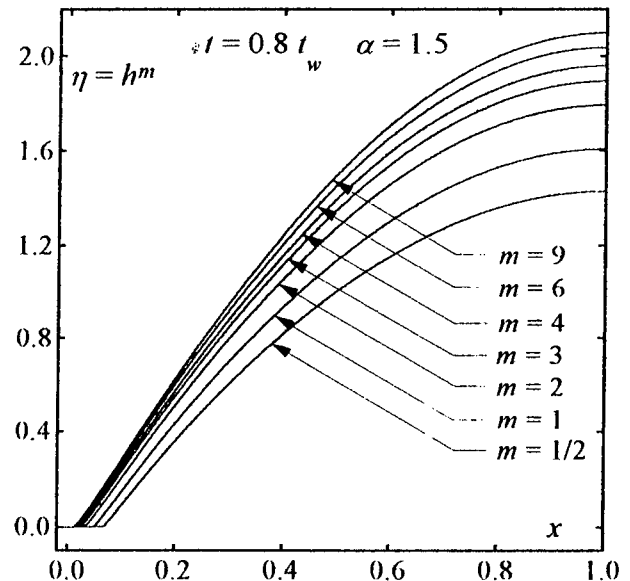


Figura 1. Perfiles de  $\eta$  a  $t = 0.8 t_w$  con  $\alpha = 1.5$  para distintos valores de  $m$ .

### Resultados

En las figuras 1 a 3 se muestran los perfiles de  $\eta$  y sus primeras dos derivadas en un tiempo previo al arranque para distintos valores de  $m$  y para  $\alpha = 1.5$ . Se observa que para todo  $m$  existe una zona de transición caracterizada por fuertes

variaciones de  $\eta_x$  y  $\eta_{xx}$ , pero estas variaciones son más marcadas para valores menores de  $m$ . Además dicha zona se encuentra más próxima al frente a medida que aumenta  $m$ .

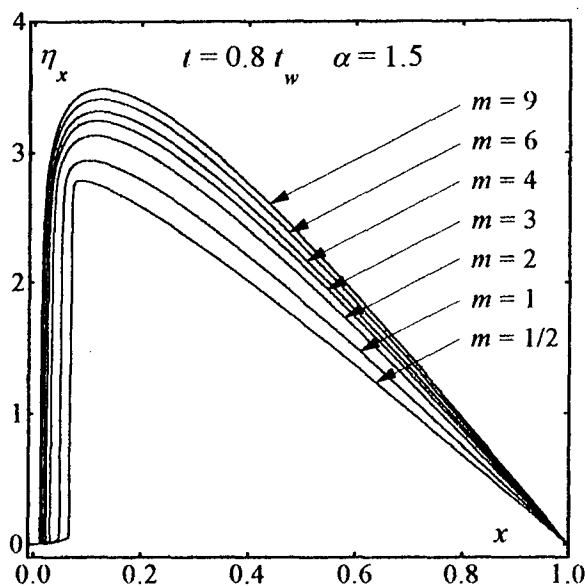


Figura 2. Perfiles de  $\eta_x$  a  $t=0.8t_w$  con  $\alpha=1.5$  para distintos valores de  $m$ .

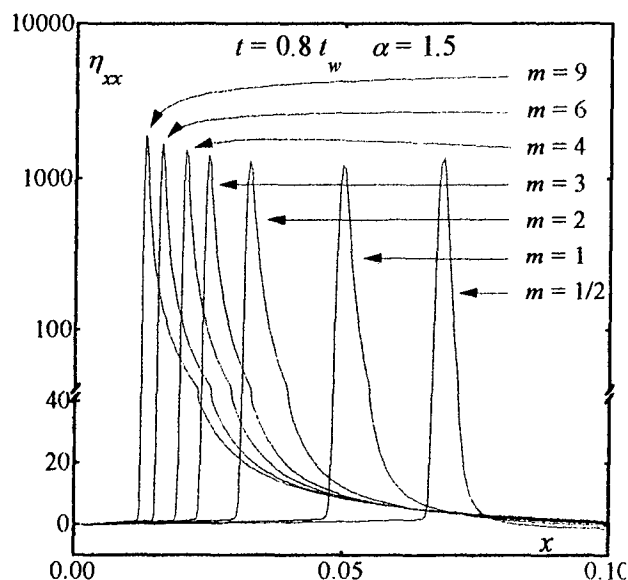


Figura 3. Perfiles de  $\eta_{xx}$  a  $t=0.8t_w$  con  $\alpha=1.5$  para distintos valores de  $m$ .

En las figuras 4 a 6 se muestran los correspondientes perfiles pero al momento del arranque. Se puede notar que, para todo  $m$ , la transición se ha desplazado y se ubica en el frente, además de intensificarse. Cerca del fin de la etapa de espera esta zona de transición móvil es adecuadamente descrita como un *corner layer*. Mientras éste se mueve hacia el frente, se

hace más angosto e intenso, y se convierte en un *corner shock* al arribar al frente. En la figura 7 se muestran los valores de  $t_w$  en función de  $\alpha$  para los distintos valores de  $m$ .

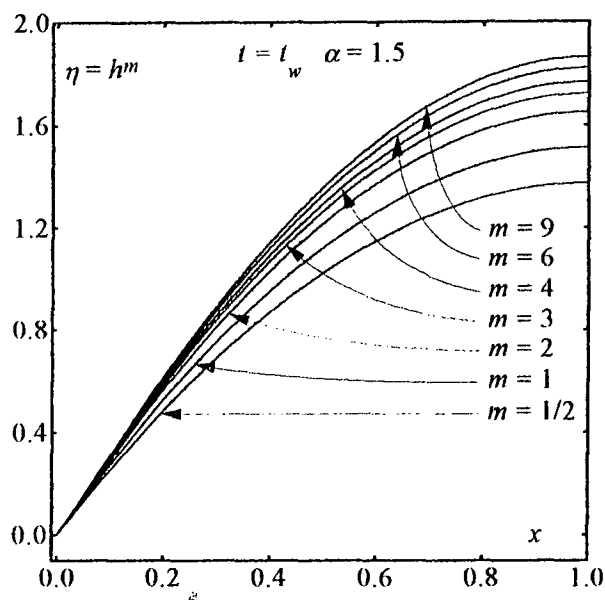


Figura 4. Perfiles de  $\eta$  a  $t=t_w$  con  $\alpha=1.5$  para distintos valores de  $m$ .

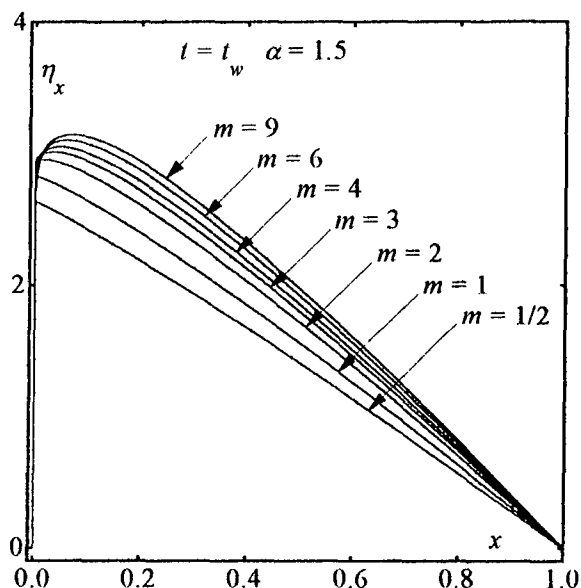


Figura 5. Perfiles de  $\eta_x$  a  $t=t_w$  con  $\alpha=1.5$  para distintos valores de  $m$ .

Para cada valor de  $m$ ,  $t_w$  tiende asintóticamente a  $t_p(m)=t_w(m,\alpha=\infty)$ ,

$$t_p(m) = \frac{m}{(2m+4)} \left[ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+1/m)}{2\Gamma(3/2+1/m)} \right]^m \quad (5)$$

el tiempo necesario para que el frente de una fuente puntual e instantánea en  $x=1$  llegue hasta

$x=0^{11}$ . En el caso  $\alpha=1$  el tiempo de espera  $t_c(m)=t_w(m, \alpha=1)$  es conocido analíticamente<sup>12</sup>

$$t_c(m) = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{m+2} \right)^{(m+1)} \quad (6)$$

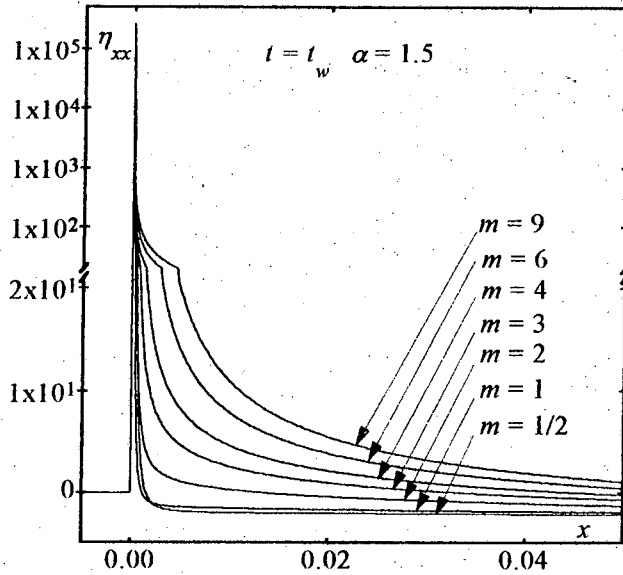


Figura 6. Perfiles de  $\eta_{xx}$  a  $t=t_w$  con  $\alpha=1.5$  para distintos valores de  $m$ .

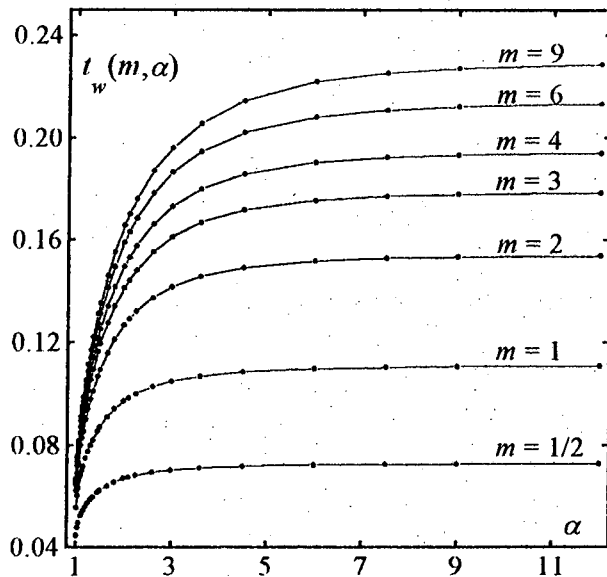


Figura 7. Tiempo de espera  $t_w$  para diferentes valores de  $m$  en función de  $\alpha$ .

La figura 7 induce a pensar en la posibilidad de que exista una normalización de  $t_w$  que lo haga independiente de  $m$ . Para ello definimos

$$\tau(m, \alpha) = \frac{t_w/m - t_c/m}{t_p/m - t_c/m} \quad (7)$$

En la figura 8 se muestran los tiempos de espera normalizados según la ecuación (7). Se observa que todos los puntos se disponen con buena aproximación sobre una única curva. El valor de  $\beta$  fue determinado minimizando la dispersión.

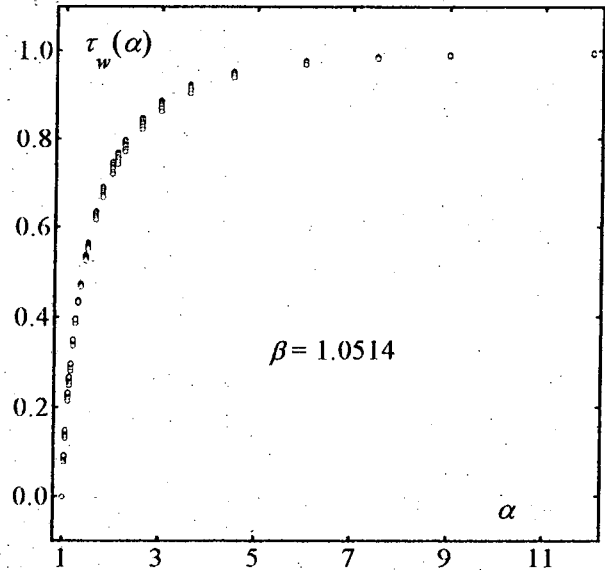


Figura 8. Tiempo de espera normalizado  $\tau_w$  en función de  $\alpha$ .

### Conclusiones

La investigación numérica de la ecuación (1) con  $1/2 \leq m \leq 9$  para perfiles de la forma  $x^{\alpha q}$  ( $q=2/m$ ) dio resultados en acuerdo con la teoría y con los resultados obtenidos para los casos  $m=1$  y  $m=3$ , y son la extensión natural de éstos a un amplio rango de valores de  $m$ . Si  $\alpha < 1$  el frente arranca inmediatamente. Si  $\alpha > 1$  hay tiempo de espera. Durante esta etapa el perfil se distorsiona y se desarrolla un *corner layer* móvil que se refuerza a medida que se acerca al frente, y al alcanzarlo éste comienza a desplazarse. Siempre se formó un solo *corner layer*.

En la figura 8 mostramos que, normalizados de acuerdo a la ecuación (7), los tiempos de espera para distintos  $\alpha$  y  $m$  se disponen sobre una única curva. Este resultado, si bien es empírico y por ahora sin fundamentación teórica, tiene utilidad dado que permite, para perfiles de la forma utilizada en este trabajo, conociendo el valor del tiempo de espera para un  $m$  y un  $\alpha$ , conocer el tiempo de espera para otro  $m$  y el mismo  $\alpha$ , con un error de alrededor del 5%.

## Referencias

- 1 Gratton, J. y F. Minotti, *J. Fluid Mech.*, **210**, 155-182 (1990).
- 2 Muskat, M., *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*, McGraw-Hill (1937).
- 3 Gurtin, M. E. y R. C. MacCamy, *Math. Biosc.*, **33**, 35-49 (1977).
- 4 Polubarinova-Kochina, P.Y., *Theory of Ground Water Movement*, Princeton Univ. Press (1962).
- 5 Zel'dovich, Ya. B. y Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Academic Press (1966).
- 6 Marshak, R. E., *Phys. Fluids*, **1**, 24-29 (1958).
- 7 Kath, W. L. y D. S. Cohen, *Stud. Appl. Math.*, **67**, 79-105 (1982).
- 8 Vazquez, J. L., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **285**, 717-737 (1984).
- 9 Gratton, J. y C. L. M. Vigo, *European J. Appl. Math.*, en prensa.
- 10 Perazzo, C. A., C. L. M. Vigo y J. Gratton, enviado a *Anales AFA*.
- 11 Pattle, R. E., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **12**, 407-409 (1959).
- 12 Aronson, D. G., L. A. Caffarelli y S. Kamin, *SIAM J. Math. Anal.*, **14**, 639-658 (1983).