

# LA CAPA LÍMITE LAMINAR DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO

DINO FILIPUSSI, JULIO GRATTON y FERNANDO MINOTTI

INSTITUTO DE FÍSICA DEL PLASMA (INFIP-La) - CONICET,  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES,  
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES, PABELLÓN I, CIUDAD UNIVERSITARIA,  
1428 BUENOS AIRES, ARGENTINA.  
e-mail: jgratton@tinfp.lfp.uba.ar

Muchos fluidos de interés práctico tienen reología no Newtoniana, lo que influye sobre diversos aspectos de su comportamiento, en particular sobre la estructura y propiedades de la capa límite laminar, que difiere cualitativa y cuantitativamente de la clásica solución de Prandtl. Nosotros estudiamos este problema para una reología del tipo Ostwald-de Vries (ley de potencias), que describe con buena aproximación el comportamiento de numerosos fluidos, en un rango importante de velocidades de deformación. Como dicha reología depende de un sólo parámetro dimensional, la solución del problema es autosemejante y se puede obtener mediante una generalización del procedimiento usual para el caso de un fluido Newtoniano. Se introduce un formalismo de plano de fase y se obtienen las soluciones en función del índice reológico. Se encuentra que la capa límite de un fluido dilatante presenta un frente, es decir termina abruptamente a una distancia finita de la pared. Ésta y otras propiedades de la capa límite son consecuencia de que, cuando el fluido no es Newtoniano, la difusión de la vorticidad es no lineal.

Many fluids of practical interest have a non-Newtonian reology, which influences many aspects of their behavior, in particular the structure and properties of the laminar boundary layer, that differs qualitatively and quantitatively from the classical Prandtl's solution. We study this problem for an Ostwald-de-Vries reology (power law) which describes with fair accuracy the behavior of many fluids in an important range of shear. Since this type of reology depends on only one dimensional parameter, the solution of the problem is self-similar and can be obtained by a generalization of the usual procedure for the case of Newtonian fluids. A phase-plane formalism is introduced and the solutions are obtained as a function of the reological index. It is found that the boundary layer corresponding to a shear-thickening fluid has a front, which means that it ends abruptly at a finite distance from the wall. This and other properties of the boundary layer are a consequence of the non-linear character of the vorticity diffusion when the fluid is non-Newtonian.

## INTRODUCCIÓN

Trataremos el problema de una placa rígida semiinfinita, que se encuentra en el seno de un fluido incompresible cuya velocidad lejos de la placa es uniforme y paralela a la misma. La reología del fluido se supondrá del tipo de ley de potencias<sup>1</sup>, de manera que el tensor de esfuerzos estará dado por:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_n \left( \sum_{kl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{lk} \right)^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Donde  $\varepsilon_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i$  es el doble del tensor velocidad de deformación,  $\mathbf{u}$  el campo de velocidades,  $p$  la presión y  $\mu_n$  una constante con dimensiones. Definimos como  $x$  a la coordenada a lo largo de la placa, y a la coordenada perpendicular,  $U$  a la componente  $u_x$  y  $V$  a la componente  $u_y$ . Usando la hipótesis de capa límite delgada se prueba fácilmente que

$$\frac{\partial U}{\partial y} \gg \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (2)$$

Suponiendo que el flujo es estacionario y que el gradiente de la presión es nulo, se obtiene la ecuación de movimiento:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu_n S \frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|^n. \quad (3)$$

Donde  $\nu_n \equiv \mu_n / \rho$ ,  $\rho$  es la densidad de masa y  $S = \text{sig}(\partial U / \partial y)$ . La (3) se complementa con la ecuación de continuidad y con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} U(x,0) = V(x,0) = 0 \quad \forall x > 0 \\ U(\infty, \infty) = U_\infty \end{aligned} \quad (4)$$

En términos de la función de corriente  $\Psi$ , la (3) se escribe en la forma

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu_n S \frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right|^n \quad (5)$$

## SOLUCIONES AUTOSIMILARES

Las soluciones autosimilares de (5) se encuentran<sup>2</sup> considerando el grupo de transformaciones lineales

$$x = C^{\alpha_1} \tilde{x}, \quad y = C^{\alpha_2} \tilde{y}, \quad \Psi = C^{\alpha_3} \tilde{\Psi}. \quad (6)$$

El grupo (6) deja invariante la (5) si se cumple

$$2\alpha_3 - \alpha_1 - 2\alpha_2 = n(\alpha_3 - 2\alpha_2) - \alpha_2. \quad (7)$$

Fijando  $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$  resulta  $\alpha_1 = n+1$ ; Los invariantes absolutos se obtienen entonces de eliminar la constante  $C$  de las (6) y resultan ser:

$$\eta \propto \frac{y}{x^{1/(n+1)}}, f \propto \frac{\Psi}{x^{1/(n+1)}}. \quad (8)$$

De esta manera, introduciendo constantes  $A$  y  $B$ , a determinar por las condiciones de contorno, es  $\Psi(x,y) = Ax^{1/(n+1)}f(By/x^{1/(n+1)})$ , y la ecuación para  $f(\eta)$  resulta

$$f''' \eta^{n-1} + f'' f = 0, \quad (9)$$

donde se ha usado la relación de escala

$$n(n+1)v_n A^{n-2} B^{2n-1} = 1. \quad (10)$$

Las condiciones de contorno (4) se expresan en las nuevas variables como:

$$f(0)=0, f'(0)=0, f'(\infty)=1. \quad (11)$$

### FORMALISMO DEL PLANO DE FASE

Si bien la (9), junto con las (11), puede resolverse numéricamente por un algoritmo del tipo "shooting", en la práctica esto no es conveniente pues si  $n > 1$ , aparece un frente en la velocidad, de ubicación desconocida de antemano. En este caso preferimos usar el formalismo del plano de fase<sup>3</sup>. Para esto, se aplica el grupo de transformaciones lineales dado por

$$\eta = K^{\alpha_1} \tilde{\eta}, f = K^{\alpha_2} \tilde{f}, \quad (12)$$

que deja invariante a la (9) si se satisface

$$\alpha_1(2n-1) = \alpha_2(n-2). \quad (13)$$

Eligiendo  $\alpha_1 = 1$  y eliminando la constante  $K$  en las (12), se obtienen los invariantes:

$$q = \frac{f'}{|f|^r}, p = \frac{f''}{|f|^s}, \quad (14)$$

donde  $r = (n+1)/(2n-1)$  y  $s = 3/(2n-1)$ . Usando las (14) en (9) se obtiene la ecuación autónoma

$$\frac{dp}{dq} = \frac{(p^t + s q)p}{r q^2 - p S_f}, \quad (15)$$

donde  $t = 1-n$  y  $S_f = \text{sig}(f)$  Una vez resuelta la (15), la integración de

$$\frac{df}{f} = \frac{q dq}{p S_f - r q^2}, d\eta = \frac{|f|^{1-r} dq}{p - r q^2 S_f}. \quad (16)$$

permite obtener las funciones autosimilares primitivas en forma paramétrica.

Las singularidades de (15) son: el origen  $O$ ; el punto  $A$  ( $q_A = -|p_A|^t/s$ ;  $p_A = (|p_A|^2/s^2)^{s/3} \text{sig}(r f)$ ), el punto  $B$  de coordenadas  $q_B = \infty, p_B = 0$ , y el punto  $C$  ubicado en  $q_C = \infty, p_C = \infty$ . Del estudio del comportamiento de las variables físicas primitivas en el entorno de estos puntos, se concluye que para nuestro problema tienen interés sólo los puntos  $O$  y  $C$ . Si  $n < 1/2$ ,  $O$  representa a la placa y  $C$  al infinito, si  $n > 1/2$  los roles se invierten. Cuando  $n < 1$  ambos puntos pueden ser unidos por una única curva integral cumpliendo las (11); en cambio, cuando  $n > 1$  no existe ninguna curva integral que los una y cumpla además las condiciones (11). En este caso la solución se obtiene empalmando dos curvas distintas. Una de ellas parte de  $C$  y llega al eje  $p=0$  en un punto  $q=q_0$ . Este eje es una solución singular de (15) que representa un flujo uniforme. La otra parte de la solución es el segmento del eje  $p=0$  que va de  $q_0$  al origen. El punto  $q_0$  corresponde a una distancia finita de la placa, y resulta entonces que las condiciones de contorno no se alcanzan al infinito sino a una distancia finita de la placa (el frente).

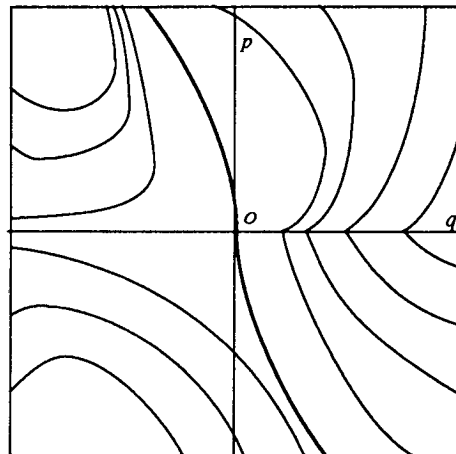


Figura 1. Gráfico cualitativo del plano de fase que muestra la topología de las curvas integrales para el punto singular  $O$  en el caso  $n > 1$ .

### SOLUCIONES ASINTÓTICAS Y NUMÉRICAS

La asíntota del sistema (15)-(16) en el entorno de  $O$  y  $C$  determina el comportamiento de la solución en las cercanías de la placa o del infinito, de acuerdo al valor de  $n$ , mientras que dicha asíntota en el entorno de la solución singu-

lar  $p=0$  corresponde al comportamiento cerca del frente, que existe para  $n>1$ . Cerca de la placa (representada por  $O$  si  $n<1/2$ , y por  $C$  si  $n>1/2$ ) vale:

$$U \propto \eta - \eta_*, V \propto x^{-n/(n+1)}(\eta^2 - \eta_*^2), \quad (17)$$

donde  $\eta_*$  es el valor de  $\eta$  en el punto singular correspondiente. En el entorno del infinito (dado por  $C$  si  $n<1/2$ , y por  $O$  si  $n>1/2$ ) vale:

$$U = cte, V \propto x^{-n/(n+1)}. \quad (18)$$

Si  $n>1$  las expresiones (18) valen cerca de un frente a distancia finita de la placa, representado por la solución singular  $p=0$ .

Para obtener el campo de velocidades en todo punto, se integra numéricamente el sistema (15)-(16) partiendo del entorno de  $O$  para todo valor de  $n$ , usando para comenzar el cálculo la expresión asintótica que corresponde a éste en las variables auxiliares :

$$p \propto \begin{cases} q^2/2 & (n < 1/2) \\ \pm [\pm(t-1)q]^{1/(1-t)} & (n > 1/2) \end{cases} \quad (19)$$

dándose además un valor arbitrario a la variable  $\eta$ . La integración fue realizada con un método de Runge Kutta de cuarto y quinto orden, con paso variable. En las figuras 2 y 3 se presentan los resultados numéricos para cuatro valores del índice reológico.

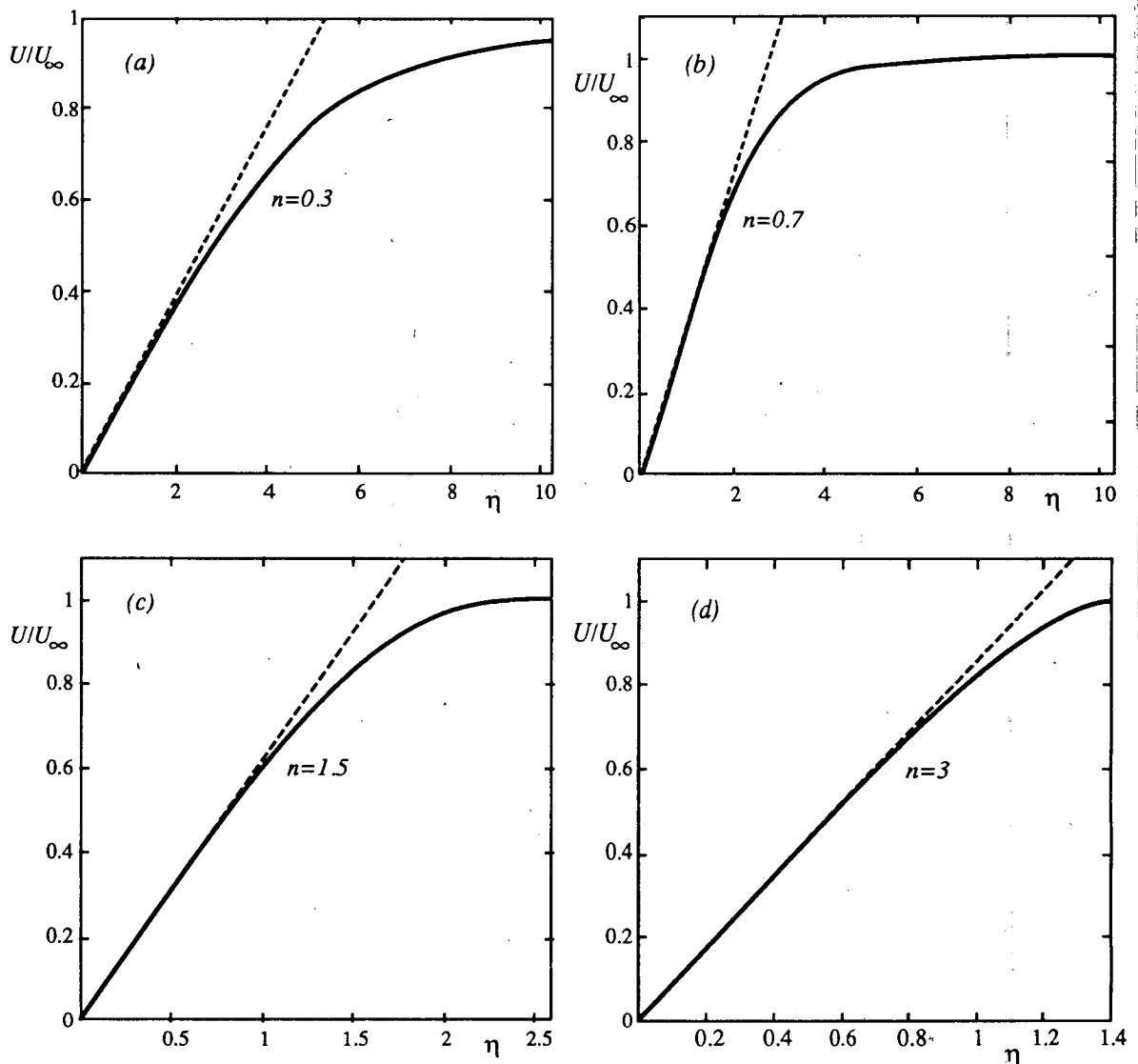


Figura 2: Gráficos de la velocidad tangencial del fluido (normalizada con la velocidad uniforme en el infinito) en función del invariante de similitud, para cuatro fluidos con distinto exponente reológico. La línea a trazos corresponde al comportamiento asintótico de la velocidad tangencial cerca de la placa.

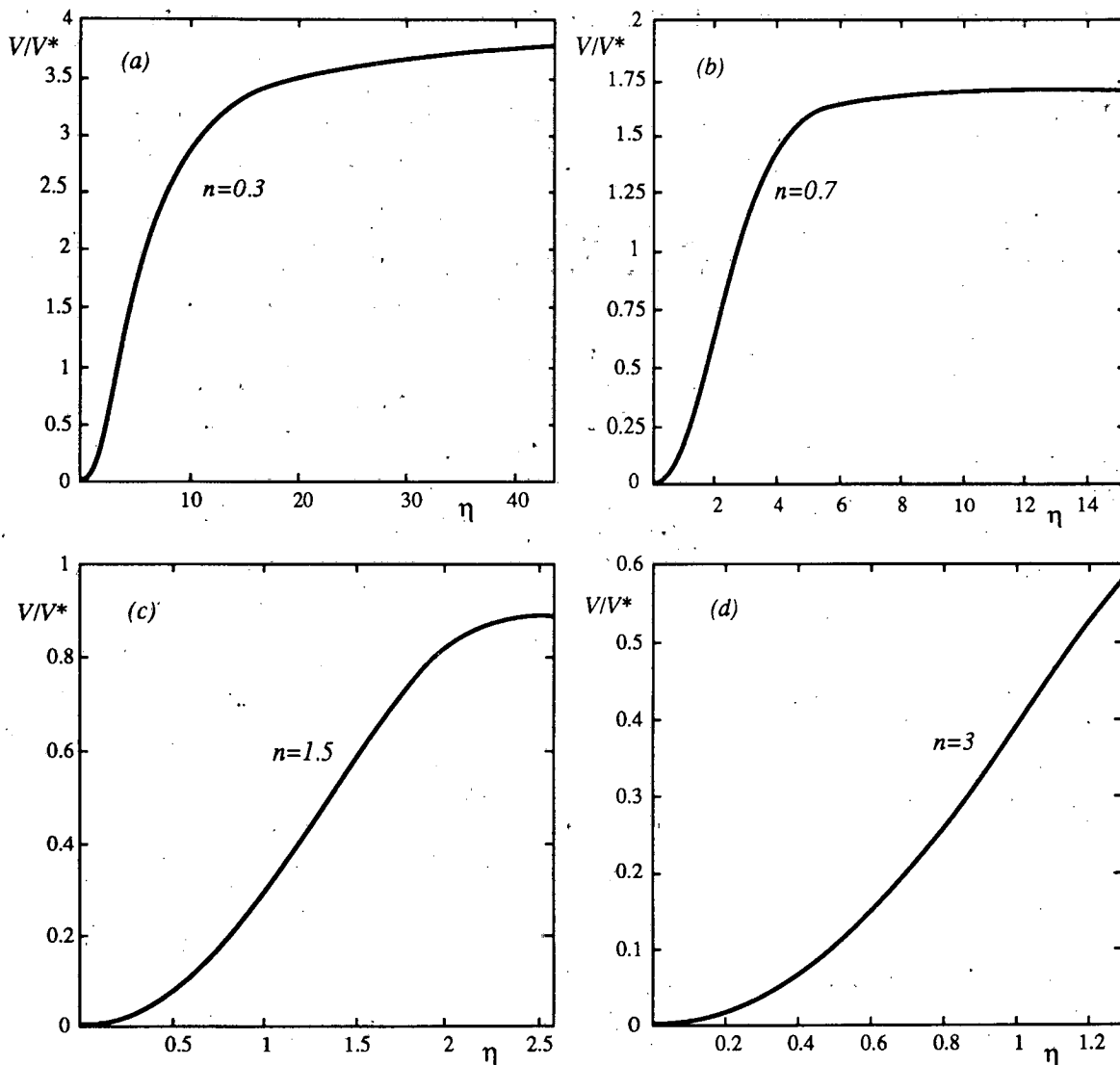


Figura 3. Gráficos de la velocidad transversal del fluido (normalizada de tal forma que sea comparable con la velocidad tangencial de la figura anterior) en función del invariante de similitud para cuatro fluidos con distinto exponente reológico.

En la figura 4 se muestran distintas características de la capa límite como función del índice reológico  $n$ . En particular, en la figura 4 (c), se aprecia que la posición del frente en términos de la variable auxiliar  $\eta$  presenta con muy buena aproximación una dependencia potencial de  $n$ .

Cabe mencionar finalmente, que las variables (14) no están definidas si  $n=1/2$  de manera que la solución se obtiene por integración numérica

de (9), y no presenta ningún cambio cualitativo respecto de las soluciones con  $n < 1$ , por lo que no se presenta aquí. El caso  $n=1$  es la clásica solución de Prandtl<sup>4</sup>, que se reobtiene con el formalismo presentado. Finalmente, en el caso  $n=2$ , la (9) es una ecuación lineal, resoluble analíticamente en forma cerrada; las expresiones resultantes son complicadas y por brevedad no las presentamos.

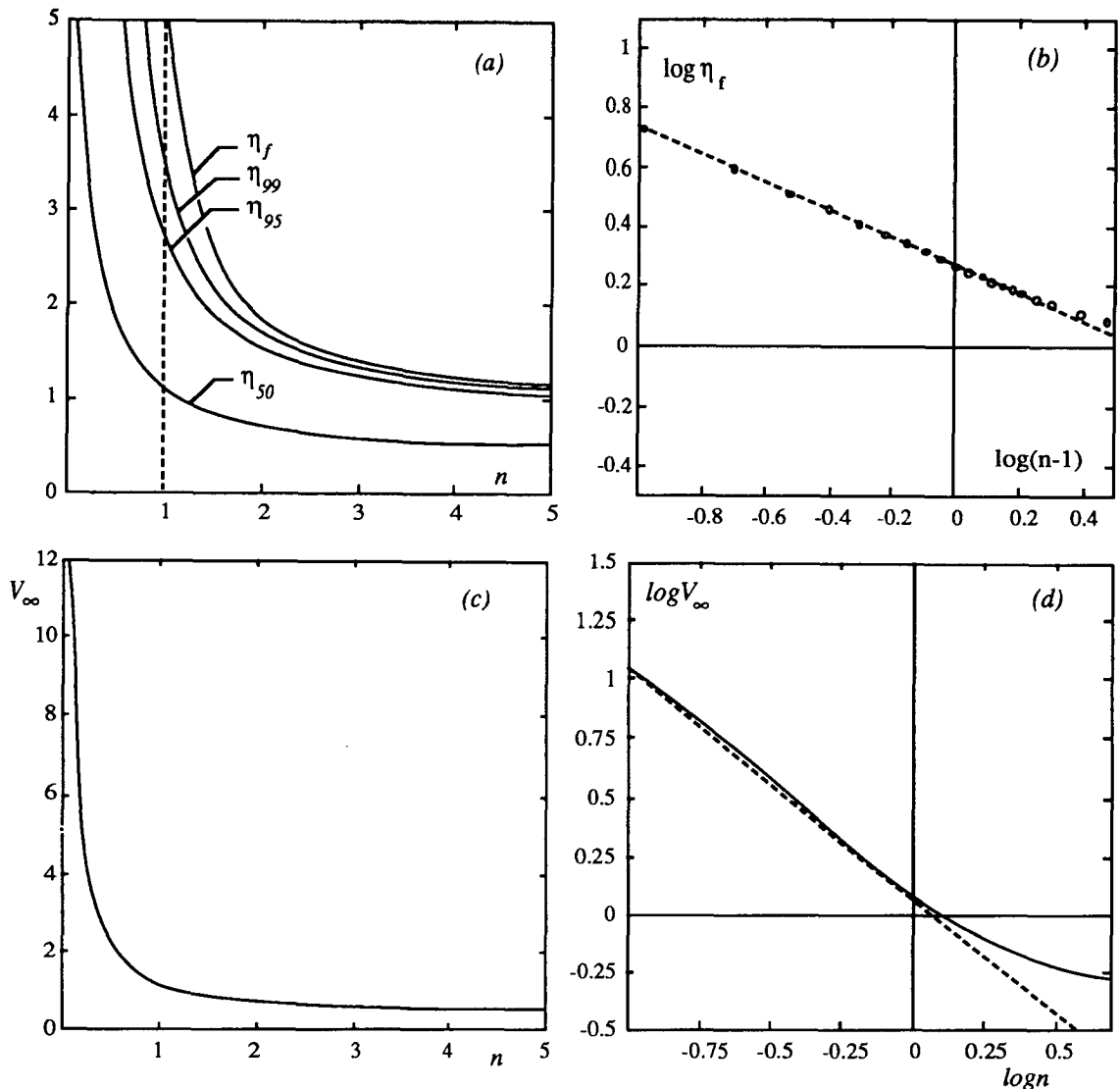


Figura 4. Gráficos del comportamiento de las soluciones numéricas. En el gráfico (a) se muestra el valor de  $\eta$  en función del exponente reológico, para velocidades tangenciales que alcanzan el: 50%, 95% y 99% de la velocidad en el infinito y además el valor en el frente de velocidades en el caso de fluidos dilatantes. Se observa que  $n=1$  es una asíntota para  $\eta_f$ . En el gráfico (b) el comportamiento en el frente de velocidades muestra que para  $1 < n < 5$  vale una ley exponencial para  $\eta_f$  en función de  $n-1$ . En los gráficos (c) y (d) muestran el comportamiento de la velocidad transversal en el infinito para un valor fijo de  $x$

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha generalizado el problema de capa límite de Prandtl considerando que el fluido tiene reología no Newtoniana del tipo de ley de potencias, caracterizada por un exponente  $n$ . El problema es autosimilar, y se emplea un formalismo de plano de fase para obtener su solución. Se encuentra que cuando  $n > 1$  la capa límite tiene un frente definido. Se estudia la dependencia de la solución con  $n$ .

Se agradece apoyo del CONICET y de la Universidad de Buenos Aires (Proy. Ex 245).

## REFERENCIAS

- 1 Barnes, H. A., Hutton, J. F. y Walters, K., *An Introduction to Rheology*, Elsevier, Amsterdam, 1989.
- 2 Pavlov, K. V., Fedotov, I. A. y Shakhorin, A. P. (1981). Structure of laminar boundary layer in non-Newtonian dilatant fluids, *Fluid Dyn. (USA)* **16**, 605.
- 2 Sedov, L. I., *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Academic Press, New York, 1959.
- 3 Prandtl, L., *Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresses*, (Heilderberg 1904), Leipzig, 484, 1905