ONDAS DE PÉRDIDA MAGNETOHIDRODINÁMICAS EN UN PLASMA DE TRES CAPAS: MECANISMOS DE PÉRDIDA

A. G. González, J. Gratton y S. B. Farina

INSTITUTO DE FÍSICA DEL PLASMA (INFIP-La) - CONICET,
DEPARTAMENTO DE FÍSICA , FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES,
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES, PABELLÓN I, CIUDAD UNIVERSITARIA,
1428 BUENOS AIRES, ARGENTINA.
e-mail: jgratton @tinfip.lfp.uba.ar

La aplicación del Análisis de Fourier para obtener las ondas de pérdida tiene la ventaja de la simplicidad, pero no queda claro porqué la raíces complejas de las relaciones de dispersión representan ondas de pérdida, ni cómo se produce dicha pérdida. En este trabajo se investigan las diferentes clases de pérdida que pueden darse en un plasma de tres capas, y con cuales seudomodos de Fourier están asociadas. Se encuentran tres mecanismos básicos, llamados "pérdida de modo de superficie", "... de interfase única", y "... de onda atrapada". Estos mecanismos aparecen en forma pura sólo en el entorno de ciertos casos límites, en que los parámetros del problema (el β del plasma, dos cocientes de temperaturas y el ancho de la capa intermedia) asumen valores especiales. Tan pronto dichos parámetros se apartan apreciablemente de los valores límites, el comportamiento de la onda de pérdida se complica, pues aparecen mezclas de los mencionados mecanismos, en proporciones variables. En consecuencia, distintos puntos de una misma rama compleja del espectro (que representa ondas de pérdida), pueden responder a mecanismos diferentes. Todas las ramas complejas del espectro corresponden a ondas de pérdida, pero en general no es posible clasificarlas en base al mecanismo que produce la pérdida, salvo en el entorno de un caso límite. Como éstos son numerosos para una configuración de tres capas, el espectro de las ondas de pérdida es muy complicado.

The application of Fourier analysis to study leaky waves has the advantage of simplicity, but it is not clear why the complex roots of the dispersion relations represent leaky waves, nor how the leakage occurs. In this paper we investigate the different kinds of leakage that can occur in a three layer plasma, and to which Fourier pseudomodes they are associated. We find three basic mechanisms, called "surface mode ...", "single interface ..." and "trapped wave leakage". These mechanisms appear in pure form only in the neighborhood of certain limiting cases, in which the parameters of the problem (the plasma β, two temperature ratios, and the width of the intermediate layer) take certain special values. As soon as these parameters depart significantly from the limiting values, the behavior of the leaky wave complicates, since mixtures of these mechanisms occur, in varying amounts. In consequence different points of the same complex branch of the spectrum (that represents leaky waves) may correspond to different mechanisms. All the complex branches of the spectrum correspond to leaky waves, but in general it is not possible to classify them according to the mechanism that produces the leakage, except close to a limiting case. Since in a three layer configuration there are many of these are, the spectrum of leaky waves is very complicated.

INTRODUCCIÓN

Las ondas de pérdida son fenómenos no disipativos que aparecen debido a la estratificación, y consisten en que una onda en una zona del plasma pierde energía, transmitiéndola a una perturbación de otra zona. El proceso es análogo al amortiguamiento acústico de una membrana que vibra en el aire, y se puede pensar de dos formas alternativas: (a) una perturbación con una longitud de onda dada en la dirección perpendicular a la estratificación decae en el tiempo (frecuencia compleja) a medida que pierde energía hacia el medio que rodea la zona excitada originalmente, o (b) una onda con frecuencia dada entra en el plasma y sufre un decaimiento espacial (longitud de onda compleja). Las ondas de pérdida pueden estar relacionadas con el calentamiento de la corona solar (Chen y Hasegawa, 1974; Ionson, 1979). Fenómenos similares aparecen en Oceanografía (Le Blond y Mysak, 1978). Varios autores han estudiado estos problemas en la MHD, pero han tratado aspectos parciales y casos límites. Un análisis bastante general, en simetría cilíndrica, se debe a Cally (1986), quien consideró una interfase entre dos medios con igual β ($\beta=8\pi p/B^2$) y encontró los llamados modos cúbicos, que representan ondas de pérdida en las fibrillas Hα del Sol (Giovanelli, 1975). Cadez y Okretic (1989) estudiaron un modelo plano de tres capas con distintos β, pero omitieron muchos modos y cometieron errores.

En este trabajo estudiamos ondas (de longitud de onda dada) excitadas en una región del plasma, que se acoplan con perturbaciones que llevan energía hacia otra región del plasma y se amortiguan. Usamos un modelo plano de tres capas, y desarrollamos un método general. Elegimos β constante para simplificar el problema, pues ello no modifica esencialmente el fenómeno.

Discutimos los mecanismos físicos que producen los diferentes tipos de pérdida en una configuración de tres capas. Analizamos la relación entre estos resultados y los de Cally (1986) y Cadez y Okretic (1989).

EL MODELO

Suponemos un plasma en equilibrio, formado por tres estratos planos (i = 1, 2, 3) a lo largo del eje y, donde ρ_i, p_i, T_i y $\boldsymbol{B}_i = B_i\hat{z}$ son uniformes (y $C_{A,i}^2 = B_i^2/4\pi\rho_i$, $C_{S,i}^2 = \gamma p_i/\rho_i$ son constantes), pero son discontinuos en las interfases, situadas en $y=0$ e $y=a$ (la notación $\{Q\}$ indica la variación de Q en la interfase). Usamos MHD ideal compresible. El equilibrio requiere que $\{(C_S^2/\gamma + C_A^2/2)\rho\} = 0$ en cada interfase, luego ρ_i, p_i, B_i no son arbitrarios. La forma de las perturbaciones lineales adiabáticas del equilibrio es

$$\zeta_i = (\zeta_{-,i} e^{-k\Gamma_i y} + \zeta_{+,i} e^{k\Gamma_i y}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)} \quad (1)$$

donde ζ es la componente y del desplazamiento, $\boldsymbol{k} = (k_x, 0, k_z)$, ψ es el ángulo entre $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{k}$, y

$$\Gamma_i = \sqrt{\frac{-(V_i^2 - V_{+,i}^2)(V_i^2 - V_{-,i}^2)}{F_i^2 (V_i^2 - V_{B,i}^2)}} \quad (2)$$

con $\mathrm{Re}(\Gamma_i) > 0$ o $\mathrm{Im}(\Gamma_i) > 0$ si $\mathrm{Re}(\Gamma_i) = 0$ y donde usamos la notación:

$$V_i = \omega / k C_{S,i}, \; M_{A,i} = C_{A,i}/C_{S,i} = 1/\beta_i \gamma, \quad (3)$$

$$F_i = \sqrt{1 + M_{A,i}^2}, \; V_{A,i} = M_{A,i} \cos\psi, \quad (4)$$

$$V_{B,i} = V_{A,i}/F_i, \; V_{\pm,i}^2 = \tfrac{1}{2}\left(F_i^2 \pm \sqrt{F_i^4 - 4V_{A,i}^2}\right). \quad (5)$$

Notar que $V_i = V_j / M_{ij}$, donde $M_{ij} = C_{S,i}/C_{S,j}$ depende del cociente entre las temperaturas de los medios i y j.

Estudiamos configuraciones con el mismo β en las tres regiones, luego M_A es uniforme y el equilibrio requiere p y $\boldsymbol{B}$ uniformes en todo el plasma. Por lo tanto sólo la densidad y la temperatura pueden ser discontinuas en las interfases. Si elegimos arbitrariamente dos M_{ij}, los cocientes de densidades quedan determinados por la ecuación de estado. En resumen, un dado equilibrio está definido por M_A y dos cocientes de temperatura, por ejemplo M_{21} y M_{32} (y $M_{31} = M_{32} M_{21}$).

Los modos estables tienen V_i^2 real y positivo. Cuando $0 < V_i < V_{B,i}$ ó $V_{-,i} < V_i < V_{+,i}$ el correspondiente Γ_i es real. Este tipo de perturbación se llama evanescente pues crece o decrece exponencialmente con y (por ejemplo, para la región 3, que se extiende hacia $y \to +\infty$ la solución diverge a menos que $\zeta_{+,3} = 0$). Cuando $V_{B,i} < V_i < V_{-,i}$ ó $V_i > V_{+,i}$, Γ_i es imaginario puro, y la perturbación se propaga en la dirección y (onda interna); $\zeta_{\pm,i}$ representa una onda con componente y de la velocidad de fase dirigida en sentido positivo o negativo del eje y, respectivamente.

RELACIONES DE DISPERSIÓN Y TIPO DE MODOS

En la interfase entre dos medios i y j debe haber continuidad del desplazamiento y de la presión. Con la notación $G_i = (V_{A,i}^2 - V_i^2)/\Gamma_i$, se obtiene (González y Gratton, 1991):

$$\begin{bmatrix} \zeta_{-,j} \\ \zeta_{+,j} \end{bmatrix} = \frac{1}{2G_j} \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{ji} & \mathcal{S}_{ji} \\ \mathcal{S}_{ji} & \mathcal{T}_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{-,i} \\ \zeta_{+,i} \end{bmatrix} \quad (6)$$

con $\mathcal{S}_{ji} = G_j - G_i$, $\mathcal{T}_{ji} = G_j + G_i$. La matriz definida en (6) permite resolver problemas con un número arbitrario de interfases. En nuestro caso debemos construir la matriz de empalme entre las regiones 1 y 3, que es el producto de: (a) la matriz de empalme de la interfase 1-2, (b) una matriz de desplazamiento desde $y=0$ hasta $y=a$ y (c) la matriz de empalme de la interfase 2-3. De esto resulta:

$$\begin{bmatrix} \zeta_{-,3} \\ \zeta_{+,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} \mathcal{V} & \mathcal{U} \\ \mathcal{S} & \mathcal{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{-,1} \\ \zeta_{+,1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde $Z = 4G_2 G_3 \Phi^{1/2}$, $\Phi = \exp(-2ka\Gamma_2)$, y:

$$\mathcal{V} = \mathcal{T}_{32}\mathcal{T}_{21}\Phi + \mathcal{S}_{32}\mathcal{S}_{21} \quad (8)$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{T}_{32}\mathcal{S}_{21}\Phi + \mathcal{S}_{32}\mathcal{T}_{21} \quad (9)$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{32}\mathcal{T}_{21}\Phi + \mathcal{T}_{32}\mathcal{S}_{21} \quad (10)$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{S}_{32}\mathcal{S}_{21}\Phi + \mathcal{T}_{32}\mathcal{T}_{21} \quad (11)$$

La ecuación (7), complementada con oportunas hipótesis sobre la forma de las soluciones en las regiones 1 y 3, permite resolver el problema. De acuerdo a la naturaleza de dichas soluciones se obtendrá una relación de dispersión. Si fijamos el valor de k, ω es el autovalor y las ondas de pérdida corresponderán a raíces complejas que describen perturbaciones amortiguadas, para las cuales Γ_i tiene parte real no nula. Conviene considerar cuatro situaciones (para $Z \neq 0$): (1) soluciones acotadas para $y \to \pm\infty$, es decir $\zeta_{+3}=0$ y $\zeta_{-1}=0$ lo cual equivale a que $\mathcal{T}=0$ (rama $\mathcal{T}$), (2) soluciones acotadas para $y \to +\infty$ y divergentes en $y \to -\infty$, o sea $\zeta_{+3}=0$ y $\zeta_{+1}=0$ es decir $\mathcal{S}=0$ (rama $\mathcal{S}$), (3) soluciones divergentes cuando $y \to \pm\infty$, (i. e. $\zeta_{-3}=0$ y $\zeta_{+1}=0$) o sea $\mathcal{V}=0$ (rama $\mathcal{V}$), (4) soluciones divergentes cuando $y \to +\infty$ y acotadas en $y \to -\infty$ ($\zeta_{-3}=0$ y $\zeta_{-1}=0$) lo que implica $\mathcal{U}=0$ (rama $\mathcal{U}$). Como en las fórmulas siempre interviene el cuadrado de la velocidad de fase, resolvemos las ecuaciones para $\Omega \equiv V_2^2$. Tenemos pues cuatro relaciones de dispersión que dan soluciones de distinto tipo. Los modos normales del problema pertenecen a las ramas de tipo $\mathcal{T}$, mientras que las soluciones de las demás relaciones de dispersión son pseudomodos. Las ondas de pérdida en que estamos interesados son pseudomodos complejos. Las raíces Ω reales y positivas son estables y las negativas inestables.

Cuando se siguen los cambios de una solución de una relación de dispersión al variar k, se encuentra a veces que la raíz deja de existir para algún valor de k (y de Ω), decimos entonces que la rama "se corta". En estos casos, hay una "continuación" que comprende soluciones de otra relación de dispersión. Tales contactos entre ramas de distintas relaciones de dispersión ocurren para valores de Ω y ka predecibles analíticamente que se darán más adelante. Para perseguir todas las ramas de soluciones conviene resolver todas las relaciones de dispersión, aún cuando sólo interesan algunas de ellas. Aunque sólo las raíces complejas pueden representar ondas de pérdida, es útil resolver las relaciones de dispersión también para valores reales de V. La razón es que al variar k algunos modos reales se pueden volver complejos, y viceversa. Por lo tanto para no perder ninguna solución compleja debemos perseguir todas las raíces.

En consecuencia para describir claramente la topología de las ramas, es preciso resolver las cuatro relaciones de dispersión, para todo ka. Para simplificar supusimos $\boldsymbol{k}$ paralelo a $\boldsymbol{B}$ (la generalización a $\boldsymbol{k}$ oblicuo no presenta mayores dificultades); entonces $V_A=M_A$ y $V_-=\mathrm{Min}(1,M_A)$, $V_+=\mathrm{Max}(1,M_A)$. Las soluciones constituyen en una complicada red de infinitas ramas reales y complejas.

Cuando Ω es real y positivo, en cada región la perturbación puede ser evanescente (Γ_i y G_i reales) o interna (Γ_i y G_i imaginarios), lo que indicaremos con "E" o "I", respectivamente. Se puede mostrar que de las ocho combinaciones posibles sólo son compatibles con Ω real aquellas evanescentes en las regiones externas (EEE y EIE).

La relación de dispersión $\mathcal{T}=0$ no tiene soluciones complejas. Esto resulta de un teorema debido a Bernstein *et al.* (1957). Brevemente, la ecuación de movimiento se puede llevar a la forma $\omega_n^2 \rho \bar{\xi}_n = \boldsymbol{F}\{\bar{\xi}_n\}$, donde $\bar{\xi}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\xi}_n(\boldsymbol{r})e^{-i\omega_n t}$ es el vector desplazamiento y $\boldsymbol{F}$ es un operador vectorial. Si $\boldsymbol{F}$ es autoadjunto ω_n^2 será real. Pero $\boldsymbol{F}$ es autoadjunto siempre y cuando la solución sea finita en $y \to \pm\infty$. Como las soluciones de $\mathcal{T}=0$ son finitas en $y \to \pm\infty$, $\boldsymbol{F}$ es autoadjunto y ω_n^2 es real. En cambio, las soluciones de $\mathcal{S}=0$, $\mathcal{U}=0$ y $\mathcal{V}=0$ divergen para $y \to +\infty$ ó $y \to -\infty$, luego $\boldsymbol{F}$ no es autoadjunto y puede haber modos con Ω complejo. Para ciertos valores de ka y Ω existen raíces dobles y en esos puntos nacen ramas complejas conjugadas. Cada raíz compleja Ω da lugar a dos ramas complejas conjugadas de V. Los modos de pérdida se encuentran en ramas con parte imaginaria negativa.

ONDAS DE PÉRDIDA

Nuestro método para investigar ondas de pérdida se basa en el análisis de Fourier en el tiempo. Esto es lo usual y tiene la ventaja de ser simple, pero el inconveniente de que la solución del problema de valores iniciales no es obvia. En particular no es evidente porqué las soluciones complejas de las relaciones de dispersión representan ondas de pérdida, ni como ésta se produce. Aquí presentamos un tratamiento heurístico de este problema. Resulta que hay una variedad de maneras en que se pueden producir pérdidas

Pérdida de modos de superficie

Consideremos primero una onda de pérdida que se origina en el acoplamiento entre un modo de superficie en la interfase (2-3) y una onda interna en la región 1. En el límite $ka \to \infty$ estas perturbaciones están desacopladas y su frecuencia es real. Cuando ka es finito, el acoplamiento sustrae energía del modo de superficie, que se pierde porque es transportado hacia $y=-\infty$ por la onda interna; luego la frecuencia se vuelve compleja. El correspondiente problema de valores iniciales consiste en haber excitado la onda de superficie en la interfase (2-3) en un momento dado, y luego dejarla decaer a medida que la perturbación en 1 se propaga alejándose de la interfase. La parte perturbada de la región 1 está limitada por un frente, cuya distancia a la interfase (1-2) crece con el tiempo. El frente se originó al comienzo del proceso, cuando la amplitud de la onda de superficie era máxima. En consecuencia, en un instante dado, la amplitud de la perturbación en 1 es una función creciente de la distancia a la interfase, siendo máxima en el frente (ver Cally, 1986). La solución de este problema de valores iniciales se representa mediante un paquete de modos de Fourier que crecen con y (en la región donde estaba presente el modo interno cuando $ka \rightarrow \infty$). Las componentes de Fourier divergen en el límite $y=-\infty$ porque existen para $-\infty<t<\infty$. Por lo tanto, las raíces complejas de $\mathcal{S}=0$ que se vuelven reales en el límite $ka \rightarrow \infty$ están relacionadas con este tipo de pérdida. Usando el mismo argumento se puede mostrar que las ondas de pérdida debidas al acoplamiento de un modo de superficie de la interfase (1-2) con modos internos de la región 3 están relacionadas con las ramas complejas de tipo $\mathcal{U}$ que se vuelven reales en el límite $ka \rightarrow \infty$. Llamaremos "pérdida de modos de superficie" a este mecanismo.

Además de las que se acaban de mencionar, aparecen en el espectro otras ramas complejas, que se vuelven reales para valores finitos de ka o que se mantienen complejas en los límites $ka \rightarrow 0,\infty$. Veremos que están relacionadas con otros mecanismos de pérdida.

Soluciones límite y pérdida de una única interfase

La existencia de raíces complejas en los límites $ka \rightarrow 0,\infty$ depende de M_A. Cuando $ka=0$ las relaciones de dispersión se reducen a $\mathcal{T}_{31}=0$ y $\mathcal{S}_{31}=0$. En el límite $ka \rightarrow \infty$ se obtiene $\mathcal{T}_{21}=0$ y $\mathcal{S}_{21}=0$ (perturbaciones de la interfase 1-2) ó $\mathcal{T}_{32}=0$ y $\mathcal{S}_{32}=0$ (perturbaciones de la interfase 2-3), ver Tabla 1. Consideremos entonces las raíces del producto $\mathcal{T}_{ij}\mathcal{S}_{ij}=0$ $(i,j=1,2,3,\ i\neq j)$. Esta ecuación, una vez eliminadas las raíces triviales $V_j=\pm V_i$ se reduce a:

$$(V_i^2-1)(V_j^2-1)+(M_A^2-1)/(M_A^2+1)=0\,, \quad (12)$$

cuyas raíces son:

$$V_i^2=\frac{1+M_{ji}^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1+M_{ji}^2}{2}\right)^2-\frac{2M_A^2M_{ji}^2}{1+M_A^2}}\,. \quad (13)$$

Éstas serán complejas si $m_-\leq M_{ji}^2\leq m_+$, donde:

$$m_\pm=\frac{3M_A^2-1\pm\sqrt{8M_A^2\left(M_A^2-1\right)}}{M_A^2+1}. \quad (14)$$

Si $M_A<1$ no habrá soluciones límite complejas. Por otra parte, si $M_A>1$, $m_\pm$ son reales, y las soluciones límite serán complejas si $m_-<M_{ji}^2<m_+$. En resumen, para $M_A>1$ y adecuados cocientes de temperatura, se pueden tener raíces complejas para los valores límite de ka.

Límite	Condición	Coincidencia	$\Omega=$
$ka=0$	$\mathcal{T}_{31}=0$	$\mathcal{T}\leftrightarrow\mathcal{V}$	Ω_{T0}
	$\mathcal{S}_{31}=0$	$\mathcal{U}\leftrightarrow\mathcal{S}$	Ω_{S0}
	$V_2=M_A$ $V_2=V_B$	$\mathcal{T}\leftrightarrow\mathcal{V}\leftrightarrow\mathcal{U}\leftrightarrow\mathcal{S}$	Ω_{a2} Ω_{b2}
$ka\rightarrow\infty$	$\mathcal{T}_{21}=0$	$\mathcal{T}\leftrightarrow\mathcal{U}$	Ω_{T1}
	$\mathcal{S}_{21}=0$	$\mathcal{S}\leftrightarrow\mathcal{V}$	Ω_{S1}
	$\mathcal{T}_{32}=0$	$\mathcal{T}\leftrightarrow\mathcal{S}$	Ω_{T2}
	$\mathcal{S}_{32}=0$	$\mathcal{U}\leftrightarrow\mathcal{V}$	Ω_{S2}
	$V_2=M_A$ $V_2=1$	$\mathcal{T}\leftrightarrow\mathcal{V}\leftrightarrow\mathcal{U}\leftrightarrow\mathcal{S}$	Ω_{a2} Ω_{c2}

TABLA 1: Soluciones para $ka \rightarrow 0,\infty$ y notación para los Ω correspondientes.

Estas soluciones límites complejas son ondas de pérdida debidas al acoplamiento de una onda interna lenta con una rápida a uno y otro lado de una única interfase. Corresponden a una transferencia de energía entre ellas. Esto se verifica fácilmente considerando el caso $M_A=1+\varepsilon$, $M_{ij}=1+\delta$ y $V_{i,j}^2=1+\delta_{i,j}$ $(\varepsilon>0,\ \varepsilon,|\delta|,|\delta_{i,j}|<<1)$ cuando las perturbaciones en ambas regiones se propagan casi paralelas a la interfase, y la pérdida es pequeña. Al orden más bajo se obtiene el sistema $\delta_i\delta_j+\varepsilon=0$, $\delta_i-\delta_j+2\delta=0$, que tiene las raíces complejas

$$\delta_i=-\delta\pm i\lambda\,,\ \delta_j=\delta\pm i\lambda \quad (15)$$

si $\lambda=\sqrt{\varepsilon-\delta^2}$ es real. Muy cerca de las raíces dobles ($\lambda\to 0$), $V_i \cong 1-\delta/2$, $V_j \cong 1+\delta/2$. Si $\delta>0$ tenemos un modo interno lento en i y uno rápido en j, con $\Gamma_i \cong \lambda - i\delta$, $\Gamma_j \cong \lambda + i\delta$. Recordemos ahora que las componentes y de la velocidad de grupo y del flujo de energía de un modo lento tienen signo contrario a $k\mathrm{Im}(\Gamma)$, mientras que para el modo rápido tiene el mismo signo. Entonces, si $k>0$, hay un flujo de energía en el sentido y positivo (si $j>i$ el flujo va de i a j mientras que si $j<i$ el flujo va de j a i) y las perturbaciones crecen en el mismo sentido. Por otra parte, si k es negativo los flujos de energía se invierten y las perturbaciones decrecen con y. Cuando $\delta<0$ tenemos un modo interno rápido en i y uno lento en j, y se invierten los sentidos de los flujos y de crecimiento de las perturbaciones respecto a los descriptos arriba.

Este tipo de pérdida se relaciona con los "modos cúbicos" obtenidos por Cally y no requiere la existencia de una segunda interfase. Por esta razón, la denominamos "pérdida de interfase única". Por supuesto, la presencia de la otra interfase (cuando ka es finito y no nulo) modifica los pseudomodos.

Pérdida de onda atrapada

Un mecanismo diferente de pérdida que llamamos "de onda atrapada" ocurre cuando una onda interna atrapada en la región intermedia pierde energía al acoplarse con perturbaciones de las regiones externas. Considerando valores límites adecuados de los parámetros M_A y M_{ij} se puede mostrar que este tipo de pérdida conduce a ramas complejas del tipo $\mathcal{S}$, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ que aparecen para valores finitos y no nulos de ka. Para ello se realizan desarrollos similares al descripto al tratar la pérdida de interfase única. El análisis no encierra dificultades pero es engorroso y por brevedad lo omitimos. Para obtener todas las variantes de este tipo de pérdida hay que considerar diferentes límites.

Mezcla de mecanismos de pérdida

Los mecanismos descriptos previamente aparecen en forma pura únicamente en los casos límites tratados. Tan pronto los parámetros (ka, M_A y M_{ij}) se apartan apreciablemente de sus valores límites, se mezclan entre sí en proporciones variables. Este es el caso de la mayoría de las ondas de pérdida que se obtienen en los espectros.

Todas las raíces complejas de $\mathcal{S}$, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ se relacionan con ondas de pérdida. Teniendo en cuenta la discusión precedente, es evidente que no es posible en general clasificar las ondas de pérdida por medio de un único mecanismo, excepto en el entorno de un caso límite. Dado que nuestro modelo de tres capas presenta numerosos casos límites, el espectro resultante es muy complicado. Sin embargo, todas las ondas de pérdida que aparecen se pueden obtener por prolongación analítica a partir de oportunos casos límites de los tres tipos antes descriptos, que por esta razón consideramos fundamentales.

RAMAS REALES: TRANSICIONES, CRUCES Y PERIODICIDAD

Damos a continuación algunas propiedades de las raíces de las relaciones de dispersión que ayudan a esclarecer la topología del espectro y la aparición de ondas de pérdida.

Valor crítico	Condición	Transición	$\Omega=$
$V_1=$	$G_1=$		
M_A	0	$\mathcal{T}\leftrightarrow\mathcal{S}$, $\mathcal{U}\leftrightarrow\mathcal{V}$	Ω_{a1}
V_B	0	$\mathcal{T}\leftrightarrow\mathcal{S}$, $\mathcal{U}\leftrightarrow\mathcal{V}$	Ω_{b1}
1	∞	$\mathcal{T}\leftrightarrow\mathcal{S}$, $\mathcal{U}\leftrightarrow\mathcal{V}$	Ω_{c1}
$V_2=$	$G_2=$		
M_A	0	$\mathcal{T}\leftrightarrow\mathcal{V}\leftrightarrow\mathcal{U}\leftrightarrow\mathcal{S}$	Ω_{a2}
V_B	0	$\mathcal{T}\leftrightarrow\mathcal{V}\leftrightarrow\mathcal{U}\leftrightarrow\mathcal{S}$	Ω_{b2}
1	∞	$\mathcal{T}\leftrightarrow\mathcal{V}\leftrightarrow\mathcal{U}\leftrightarrow\mathcal{S}$	Ω_{c2}
$V_3=$	$G_3=$		
M_A	0	$\mathcal{U}\leftrightarrow\mathcal{T}$, $\mathcal{S}\leftrightarrow\mathcal{V}$	Ω_{a3}
V_B	0	$\mathcal{U}\leftrightarrow\mathcal{T}$, $\mathcal{S}\leftrightarrow\mathcal{V}$	Ω_{b3}
1	∞	$\mathcal{U}\leftrightarrow\mathcal{T}$, $\mathcal{S}\leftrightarrow\mathcal{V}$	Ω_{c3}

TABLA 2: Transiciones entre ramas reales y notación para los Ω correspondientes.

Distintas ramas pueden coincidir para algún (ka, Ω), dando lugar a una transición o a un cruce. Hablamos de transición cuando una rama de soluciones de una de las relaciones de dispersión pasa a ser rama de otra, de modo que solo hay *una* rama a cada lado del punto crítico. Hablamos de cruce cuando dos ramas de soluciones correspondientes a dos relaciones de dispersión distintas se intersectan, de modo que hay *dos* ramas a ambos lados del punto de cruce. Las transiciones y cruces ocurren siempre para Ω real. Las primeras están determinadas por los ceros y polos de G_i y figuran en la Tabla 2 (las correspondientes a G_2 se consideraron al tratar los límites $ka \to \infty$ y $ka=0$).

Hay dos tipos de cruces que pueden ocurrir al variar ka: (a) una rama real cruza otra de distinto tipo, y ambas continúan al otro lado del cruce, (b) una rama compleja con su conjugada efectúan una transición a dos ramas complejas conjugadas de otro tipo (transición doble).

Cuando Ω es real y corresponde a modos internos en la región 2, la perturbación es una onda atrapada. Estas soluciones se agrupan en familias de armónicas, de periodicidad dada por $\Omega(ka)=\Omega(ka+n\pi/\Gamma_2)$, con $n=1,2...$ y $\Gamma_2=\Gamma_2(\Omega(ka))$. Un cruce (o una transición) que ocurre en una zona de propagación para la región 2, será periódico. Hay dos tipos de estos cruces: (a) entre las ramas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{U}$, cuando $\Phi=1$ y $\mathcal{S}_{31}=0$, o cuando $\Phi=-1$ y $\mathcal{T}_{21}\mathcal{S}_{32}-\mathcal{T}_{32}\mathcal{S}_{21}=0$; (b) entre $\mathcal{T}$ y $\mathcal{V}$ cuando $\Phi=1$ y $\mathcal{T}_{31}=0$, o cuando $\Phi=-1$ y $\mathcal{T}_{21}\mathcal{T}_{32}-\mathcal{S}_{21}\mathcal{S}_{32}=0$. La notación usada para los valores de Ω en los cuales hay cruces periódicos se da en la Tabla 3.

Cruce	Origen	$\Omega=$
$\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{U}$	$\Phi=1$	Ω_{S+}
	$\Phi=-1$	Ω_{S-}
$\mathcal{T} \leftrightarrow \mathcal{V}$	$\Phi=1$	Ω_{T+}
	$\Phi=-1$	Ω_{T-}

TABLA 3: Notación para los Ω correspondientes a los cruces periódicos.

Las ramas reales periódicas pueden conectarse con familias de infinitas ramas complejas. Estos conjuntos de ramas de pérdida se deben a pérdida de ondas atrapadas, lo que se puede verificar considerando los límites apropiados.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se obtuvieron soluciones numéricas completas del problema para algunos juegos de valores de los parámetros, que corroboran los resultados teóricos, pero no se presentan aquí por razones de espacio. Se encuentran gran variedad de ondas de pérdida para diferentes ka, y con tasas de decaimiento que varían considerablemente, pero todas ellas surgen de combinar los tres mecanismos básicos, que operan aisladamente sólo en ciertas situaciones límites.

El mismo problema fue estudiado por Cadez y Okretic (1989). Su propósito fue poner en evidencia pérdidas del tipo de modo de superficie (que suponían el único mecanismo posible). Ellos buscaron (incorrectamente) las ondas de pérdida partiendo de las raíces de $\mathcal{T}=0$ en el límite $ka \to \infty$. Llama la atención que encontraran raíces *complejas* para ka finito, cuando esto es imposible para perturbaciones del equilibrio que satisfacen $\mathcal{T}=0$. Su lista de parámetros es incompleta y no permite repetir sus cálculos, pero alcanza para ver que el estado no perturbado del que partieron no es de equilibrio. Tal vez ésta sea la causa del resultado apuntado. El haber ignorado dos mecanismos básicos de pérdida condujo a otro resultado erróneo, esto es que para que existan modos de pérdida la configuración debe permitir modos evanescentes en las regiones 2 y 3 e internos en la región 1.

Nuestras soluciones límites para $ka=0$ equivalen a los "modos cúbicos" de Cally (1986). En efecto, la solución de la ecuación $\mathcal{S}_{31}=0$ para los parámetros de Cally ($\psi_{1,3}=0$, $M_{A1}=M_{A3}=7$, $M_{31}=2$) está en perfecto acuerdo con sus resultados.

Los métodos desarrollados en este trabajo pueden servir para analizar las ondas de pérdida en situaciones más complicadas, que incluyen diferentes orientaciones del campo magnético o β variable, que pueden ser de interés en las aplicaciones.

Este trabajo contó con subsidios del CONICET y pertenece al Proyecto EX 246 de la Universidad de Buenos Aires.

REFERENCIAS

Bernstein, I. B., Fireman, E. A., Kruskal, M. D. y Kulsrud, R. M. (1957) *Proc. Roy. Soc.,A*, **244**, 17.

Cadez, V. M. y Okretic, V. K. (1989) *J. Plasma Phys.* **41**, 23.

Cally, P. S. (1986) *Solar Phys.* **103**, 277.

Chen, L. y Hasegawa, A. (1974) *Phys. Fluids* **17**, 1399.

Giovanelli, R. G. (1975) *Solar Phys.* **44**, 299.

González, A. G. y Gratton, J. (1991) *Solar Phys.* **134**, 211.

Ionson, J. A. (1978) *Astrophys. J.* **226**, 650.

Le Blond, P. H. y Mysak, L. A. (1978) en *Waves in the Ocean*, Elsevier Ocean. Series.