Rotación de estrellas coherentes

H.Casini, R.Montemayor y G.Zemba
Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo
y
Centro Atómico Bariloche, CNEA
8400 S.C. de Bariloche, Río Negro

Este artículo se refiere a la rotación de estrellas cuánticas relativistas. Similarmente a lo que sucede en espacio plano, demostramos que los sistemas cuánticos coherentes en estado fundamental son no rotantes. En el caso de estrellas neutrónicas, que pueden considerarse como formadas fundamentalmente por un superfluido, el momento angular se debe a la presencia de vórtices, los cuales en buena medida determinan los efectos observables desde el exterior por acoplamiento con la corteza. Su densidad y distribución es crucial en la dinámica de la estrella. Aquí estudiamos los efectos gravitatorios que modifican la distribución de vórtices y encontramos efectos notablemente significativos, con correcciones para modelos realistas del orden del 15%.

We study the rotation of quantum relativistic stars, and show that as coherent quantum systems in the fundamental state they are non-rotating. Hence for neutron stars, basically formed by a superfluid, the angular momentum is generated by vortices, which are responsible for several phenomena via their coupling to the star crust. For this reason their density and distribution is crucial for the dynamics of the stars. In this work we analize the gravitational effects that acts on the vortices and show that there are very significant consequences, with corrections of the order of 15% for realistic models.

I. INTRODUCCIÓN

Los efectos gravitatorios relacionados con fenómenos cuánticos son generalmente muy pequeños debido a la gran diferencia entre las escalas propias del campo gravitatorio y la de la longitud de coherencia del sistema cuántico. Una excepción es la generación de inhomogeneidades en el universo por la amplificación y paso a un régimen clásico de las fluctuaciones cuánticas del campo del inflatón. En este caso el fenómeno está relacionado con la propagación de modos de longitud de onda comparable al tamaño del horizonte del universo en el periodo inflacionario, y por lo tanto con escalas similares.

En el contexto de astrofísica debemos buscar efectos fenomenológicamente significativos de la teoría de campos con un fondo gravitatorio, en relación con objetos cuánticos coherentes a través de regiones macroscópicas comparables con la escala en que varía el campo gravitatorio. En este sentido son particularmente interesantes las estrellas bosónicas y de neutrones.

En las estrellas de neutrones el carácter cuántico se debe al estado superfluido en que se encuentran los neutrones por las presiones existentes en su interior. Así lo indican tanto la teoría [1], como la evidencia observacional [2]. La superfluidez es un elemento indispensable en los modelos que explican la dinámica de rotación de pulsares y en especial los largos tiempos de relajación de la velocidad angular posteriores a los glitches. Los modelos de pulsares los suponen constituídos por varias capas, que comprenden la corteza exterior sólida, que es la zona directamente accesible a la observación, la corteza interior y el núcleo interno, estas últimas formadas en su mayor parte por neutrones superfluidos. La rotación de la estrella implica un gran número de vórtices que atraviesan el superfluido en dirección paralela al eje de rotación y que terminan acoplándose a la corteza exterior. Se supone que los fenómenos asociados a glitches, y de los cuales hay una gran cantidad de información experimental, están relacionados con distintos regímenes de acoplamiento de los vórtices con la corteza. Por ello es de interés el estudio de los efectos gravitatorios en la distribución de vórtices. Aunque esta presentación se refiere particularmente a estrellas neutrónicas, nuestros resultados generalizan los ya obtenidos para la rotación de estrellas bosónicas [3].

La Sección 2 da una introducción al problema de la rotación de una estrella cuántica en la aproximación de campos gravitatorios débiles. Esta aproximación sólo es válida para la velocidad angular de la estrella, pero no es aplicable al campo gravitatorio debido a la masa. Por ello en la Sección 3 analizamos la rotación de una estrella cuántica en general, usando la métrica exacta para el potencial gravitatorio escalar y a primer orden en la velocidad angular. Finalmente en la Sección 4 estudiamos la distribución de vórtices en estrellas superfluidas, y mostramos que aparece una diferencia significativa con respecto a la distribución correspondiente en espacio plano o con potencial escalar supuesto débil.

II. ROTACIÓN DE UNA ESTRELLA CUÁNTICA EN UN CAMPO GRAVITATORIO DÉBIL

Con el objeto de entender la física del problema lo trataremos primeramente en la aproximación de campos gravitatorios débiles. Ello es posible cuando la métrica no difiere mucho de la de Minkowski [4], es decir

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \ , \ h_{\mu\nu} \ll 1 \tag{1}$$

En este caso se puede pensar que el espacio es plano e interpretar los efectos de la métrica como debidos a un campo tensorial en este espacio. El hamiltoniano de una partícula libre no relativista en presencia del campo gravitatorio queda [5]

$$H = (1 + 3\,\phi)\frac{(\vec{p} + m\,\vec{h})^2}{2m} + m\,\phi \qquad (2)$$

donde $\vec{h}_i = h_{0i}$ y $\phi = \frac{h_{00}}{2}$. Excepto por el factor $(1{+}3\,\phi)$, que corresponde al corrimiento hacia el rojo, hay una similitud total con el hamiltoniano de una partícula en un campo electromagnético, donde $-e\vec{A}$ corresponde a $m\,\vec{h}$, y el potencial eléctrico al gravitatorio newtoniano. Se podría suponer en base a la analogía electromagnética que entre los efectos presentes en un superfluido inmerso en un campo gravitatorio está el efecto Meissner de expulsión del campo $rot\,\vec{h}$. Esto fue propuesto en [6], pero no es correcto llevar la analogía hasta este punto, como es claro en base al principio de Mach. Según éste el estado de movimiento de las fuentes del campo afecta a los demás cuerpos tratando de imponerles como sistema de referencia en reposo su propio sistema de referencia en reposo. Por ello el efecto de interacción gravitatoria sobre los cuerpos es de naturaleza paramagnética independientemente de la substancia con que están constituídos y no hay efecto Meissner.

Para verificar la inexistencia de tal efecto Meissner podemos desarrollar el tensor de energía impulso de un fluido perfecto $T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu}$, donde p es la presión y ρ la densidad de energía, para pequeñas velocidades. De la ecuación de Einstein en la aproximación de campos débiles y en coordenadas armónicas resulta

$$\Delta\,\vec{h} = 16\pi G\,[(\rho + p)\,\vec{v} + \frac{1}{2}(3\rho + p)\,\vec{h}]\ ,\ div\,\vec{h} = 0\,. \qquad (3)$$

De la Ec. (2) deducimos por analogía con un superconductor que se cumple $rot\,(\vec{v}{+}\vec{h}) = 0$ y como $div\,\vec{v} = 0$ para un fluido rotante estacionario, es $\vec{v} = -\vec{h}$. Entonces

$$\Delta\,\vec{h} = -8\pi G\,(\rho - p)\,\vec{h} \qquad (4)$$

que evidencia el carácter paramagnético de la interacción gravitatoria. Un resultado similar se obtiene en Ref. [7], con una diferencia en el factor numérico debido a que los autores no consideran el término proporcional a $\vec{h}$ en el segundo miembro de (3). En este caso dicho término es tan importante como el primero ya que $\vec{v} = -\vec{h}$.

La ecuación (4) es una ecuación de Schrödringer para $\vec{h}$. Surge naturalmente la pregunta sobre la existencia de una solución que anule $\vec{h}$ en el infinito y sea regular en todo el espacio. Dicha solución correspondería a un estado rotatorio para la estrella en el que las fases introducidas en el superfluido por la rotación sería exactamente cancelada por la fase introducida por el campo magnetogravitatorio $\vec{h}$. Suponiendo densidad constante resulta que tal solución existe pero para una estrella de radio superior al radio de Schwarzchild correspondiente a esa densidad, y por lo tanto inestable. Esto indica que debemos considerar el problema más alla de los límites de la aproximación de campos débiles para las restantes componentes de la métrica, pues los efectos no lineales son importantes, tal como se hace en el capítulo siguiente.

III. ROTACIÓN DE ESTRELLAS CUÁNTICAS

En esta sección analizaremos la rotación de una estrella cuántica. Consideraremos en forma perturbativa la velocidad angular Ω y la componente $g_{\varphi t}$ de la métrica, inducida por ésta, y en forma exacta las restantes componentes del campo gravitatorio.

Para ello seguiremos el análisis de la rotación de una estrella hecho por Hartle [8]. La métrica a primer orden en la velocidad angular viene dada por

$$\begin{aligned} ds^2 = &- e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2) \\ &- 2r^2\sin^2\theta\ \omega\ d\varphi\, dt \end{aligned} \qquad (5)$$

donde $\omega(r,\theta)$ es la velocidad angular que adquiere un objeto al caer libremente desde el infinito al punto (r,θ) y es responsable de la rotación de los sistemas inerciales locales de referencia con respecto a las estrellas fijas. Los potenciales Φ y Λ son funciones pares de la velocidad angular y por lo tanto en esta aproximación son las funciones de r no perturbadas calculables sin tomar en cuenta la rotación. Para estrellas que finalizaron la evolución termonuclear es posible calcular la estructura conociendo la ecuación de estado y dando un valor para la presión central. Las ecuaciones correspondientes son:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi\rho dr \qquad (6)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)\,(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)} \qquad (7)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)} \qquad (8)$$

$$e^{2\Lambda} = \frac{r}{r - 2m} \qquad (9)$$

Así la única función a determinar en la métrica es ω que debe ser calculada a partir de la ecuación de Einstein para la componente $R_{\varphi t}$ del tensor de Ricci.

La velocidad angular del sistema puede ser caracterizada con precisión por la cantidad $\Omega = u^{\varphi}/u^{t}$, donde u^{ν}es el cuadrivector velocidad del fluido. Ω representa la velocidad angular medida por un observador en reposo en algún punto del fluido. Supondremos que la rotación es uniforme, Ω constante, porque es esta configuración la que minimiza la energía de la estrella y por lo tanto es la única estable. Si la materia constitutiva puede ser caracterizada como un fluido perfecto se deduce la siguiente perturbación para la componente $T_{\varphi t}$:

$$T_{\varphi t} = -r^2\sin^2\theta\,((\rho + p)\,\Omega - \rho\omega) \qquad (10)$$

Desarrollando ω en serie tenemos:

$$\omega(r,\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \omega^l(r)\,(-\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{dP_l}{d\theta})\ , \tag{11}$$

donde P_l es el polinomio de Legendre de grado l.

La ecuación de Einstein perturbada para las funciones radiales queda

$$\begin{aligned} &\omega^l{}_{,rr} + (\frac{4}{r} - \Lambda' - \Phi')\,\omega^l{}_{,r} \\ &+ \frac{2}{r}\,(\frac{1}{r} + \Phi' - \Lambda' - \frac{l(l+1)}{2r}e^{2\Lambda})\,\omega^l \\ &= 16\pi e^{2\Lambda}(\frac{1}{2}(\rho+3p)\,\omega^l\ -\ (\rho+p)\,\Omega\,\delta^l_0) \end{aligned} \tag{12}$$

Resta aún introducir la relación que caracteriza al carácter superfluido. Esta será la generalización a espacios curvos de la ecuación $rot\ \vec{v}=0$ que indica el flujo irrotacional para el superfluido en ausencia de gravitación, siempre que no haya vórtices presentes. Esta generalización es

$$\epsilon^{ijkl}\xi^t_l(u_{j,k} - u_{k,j}) = 0 \tag{13}$$

donde u es el cuadrivector velocidad y ξ es el vector de Killing correspondiente a la coordenada temporal. Debido a las simetrías del problema esta relación se reduce a $u_{\varphi},_{r} = 0$ y puede ser reescrita

$$\frac{d}{dr}(u^\varphi g_{\varphi\varphi} + u^t g_{t\varphi}) = 0 \tag{14}$$

Reemplazando las componentes de la métrica según la fórmula (5) deducimos que la cantidad $r^2(u^\varphi - u^t\omega)$ es una constante independiente de r y por lo tanto nula. De esto resulta

$$\frac{u^\varphi}{u^t} = \Omega = \omega \tag{15}$$

Volveremos sobre esta relación en el capítulo 4 generalizándola para incluir la presencia de vórtices.

Introduciendo esta relación en la ecuación (12) y usando (6) obtenemos la ecuación que debe cumplir ω para la estrella superfluida:

$$\omega^l{}_{,rr} + (\frac{4}{r} - \Lambda' - \Phi')\,\omega^l{}_{,r} + \frac{2 - l(l+1)}{r^2}e^{2\Lambda}\,\omega^l = 0 \tag{16}$$

Mediante el reemplazo $\omega = \frac{-h^\varphi}{r\sin\theta}$, y considerando sólo términos lineales en los campos se reobtiene la ecuación (4). Se observa que para Λ y Φ regulares en el origen, es decir estrellas no singulares, la única solución con geometría regular es $\omega = 0$. Por lo tanto no hay soluciones para estrellas superfluidas rotantes sin vórtices. Un resultado similar fue obtenido en la Ref. [3] analizando estrellas bosónicas. Para éstas no existe una ecuación de estado efectiva y la estructura se calcula mediante la ecuación de Klein-Gordon. Asimismo el tensor de energía-impulso deja de ser isótropo en las coordenadas espaciales y las presiones radial y tangencial son en general diferentes. Pero esto no impide que se vuelva a obtener la ecuación (16) y por lo tanto el mismo resultado negativo, ya que si se generaliza el tensor de energía impulso para incluir diferentes presiones radiales y tangenciales, en la ecuación (12) sólo interviene la presión radial. La ecuación $\Omega = \omega$ se satisface automáticamente debido a la coherencia del campo escalar y se manifiesta a través del tensor de energía impulso que sólo depende de ω.

IV. ROTACIÓN EN PRESENCIA DE VÓRTICES

Vista la imposibilidad de la rotación de la estrella cuántica como perturbación de su estado fundamental, pasamos a estudiar la rotación mediante vórtices y las modificaciones que introduce el campo gravitatorio con respecto a los resultados que se obtienen cuando este se puede despreciar. El interés fenomenológico del cálculo en relación con la teoría de pulsares fue comentado en la introducción. Para introducir la contibución de los vórtices a la dinámica de rotación de la estrella superfluida, generalizaremos para espacios curvos el enfoque desarrollado por Landau [9].

La transición superfluida puede ser entendida como la condensación de Bose de ciertas cuasipartículas. Consideremos que el operador de campo efectivo puede escribirse $\Psi = \hat{\Xi} + \Psi'$, donde $\hat{\Xi}$ es el operador que corresponde al condensado de Bose. Debido al gran número de partículas en el condensado podemos ignorar la no conmutatividad entre $\hat{\Xi}^\dagger$ y $\hat{\Xi}$ cometiendo errores de orden $1/N$, donde N es el número de partículas involucradas. Es decir podemos suponer que $\hat{\Xi}$ se comporta como una variable clásica cuando $N \to \infty$. El valor de esta variable viene dado por

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty}\langle N \mid \hat{\Xi} \mid N+1\rangle = \Xi \\ \lim_{N\to\infty}\langle N+1 \mid \hat{\Xi}^\dagger \mid N\rangle = \Xi^* \end{aligned}$$

El operador $\hat{\Xi}^\dagger\hat{\Xi}$ es el operador de densidad de partículas n_0 del condensado y por lo tanto se puede poner

$$\Xi(t,r) = \sqrt{n_0(t,r)}e^{-i\Theta(t,r)} \tag{17}$$

que es la función de onda macroscópica del superfluido. En base al principio de equivalencia, la corriente que caracteriza al condensado debe escribirse como:

$$j_\mu = \frac{i}{2}(\Xi\partial^*_\mu\Xi - \Xi^*\partial_\mu\Xi) = n_0\partial_\mu\Theta$$

Debido a que la mayor contribución a la energía de las partículas es la masa en reposo la dependencia temporal de Θ es $\frac{mt}{\sqrt{g^{00}}}$ y resulta $j_0 = m\,n_0 e^\Phi$.

Por otra parte tenemos que $\Omega = \frac{u^\varphi}{u^t} = \frac{j^\varphi}{j^t}$, por lo cual

$$\Omega = \frac{j^\varphi}{j^t} = \frac{j_\varphi g^{\varphi\varphi} + j_t g^{\varphi t}}{j^t}$$

Reemplazando la métrica y a primer orden en ω queda

$$\Omega = \frac{j_\varphi}{r^2 \sin^2\theta \; j^t} + \omega = \frac{\partial_\varphi \Theta}{m\, r^2 \sin^2\theta}\; e^\Phi + \omega$$

Por último, utilizando la simetría de rotación del problema y que la función de onda es univaluada obtenemos $\Theta = n(r,\theta)\,\varphi$, donde $n(r,\theta)$ es el número de singularidades de la fase que debe cruzar un anillo paralelo al plano xy que pasa por el punto (r,θ) a medida que se lo contrae hacia el eje z. Por ello es igual al número de vórtices encerrado por dicho anillo, ya que por razones energéticas los vórtices aparecen con número topológico uno. Entonces finalmente

$$\Omega = \frac{n(r,\theta)}{m\, r^2 \sin^2\theta}\; e^\Phi + \omega \tag{18}$$

Esta es una generalización de la ecuación (15) que incluye la presencia de vórtices, y también de la correspondiente al problema de la rotación del superfluido en espacio plano donde el segundo término del miembro izquierdo no aparece. En esta fórmula se puede apreciar que la fase introducida por los vórtices en el superfluido es la suma de la fase cinética de la rotación más una debida al campo gravitatorio. A diferencia del análogo electromagnético y a lo que se interpreta en la aproximación de campos débiles esta fase no se debe a una conexión sino a la métrica que hace diferentes las componentes covariantes y contravariantes.

Tenemos todos los elementos para calcular la distribución de vórtices de una estrella superfluida, dada la velocidad angular Ω y la estructura de la estrella en reposo. Para obtener dicha distribución calculamos ω con la fórmula (12), haciendo la suposición razonable de que la energía de interacción entre vórtices es despreciable con respecto a la energía cinética de rotación, o sea que el tensor de energía-impulso del cuerpo en equilibrio rotando mediante vórtices no difiere apreciablemente del calculado para un fluido perfecto. Los vórtices se van a situar de manera de minimizar la energía total del fluido permitiendo que el movimiento macroscópico sea igual al de la rotación de un fluido sin vórtices. Es conveniente señalar que por efecto del campo gravitatorio los vórtices dejan de ser paralelos al eje z, excepto en el plano ecuatorial. Como ω es una función monótona decreciente del radio el efecto de apantallamiento de vórtices es mayor en el centro que en la periferia. Una vez obtenido ω se puede despejar el número de vórtices de la fórmula (18).

Fuera de la estrella es $\omega(r) = \frac{2GJ}{r^3}$, donde J es el momento angular total, por lo tanto aplicando la fórmula (18) para $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $r = R$ se obtiene para el número total de vórtices en la estrella. Aun no conociendo la distribución de masa en la estrella, que dependerá del modelo considerado, es posible dar una cota superior para el número promedio de vórtices por unidad de área invariante, $dA = 2\pi r e^\Lambda dr$, teniendo en cuenta que $e^{\Lambda(r)} > e^{-\Phi(R)}$ para $r < R$:

$$\nu_g = \frac{N}{A} = m\; (\Omega - \frac{2GJ}{r^3})\frac{R^2 e^{-\Phi}}{A} \leq \frac{m}{\pi}\; (\Omega - \frac{2GJ}{r^3})$$

La disminución relativa del número de vórtices con respecto al calculado para espacio plano es:

$$\Delta = \frac{\nu_0 - \nu_g}{\nu_0} \geq \frac{2GI}{c^2 R^3}$$

donde I es el momento de inercia de la estrella. Para ver más claro el significado de esta fórmula ponemos $I = M\,\bar{r}^2$,donde $\bar{r}$ es el radio de giro, y la disminución porcentual es $(\frac{2GM}{c^2 R}).(\frac{\bar{r}^2}{R^2})$, donde $\frac{2GM}{c^2}$ es el radio de Schwarzchild de la estrella. Nuevamente se observa aquí la imposibilidad de la rotación sin vórtices sin que se forme un agujero negro. Para diferentes modelos de estrellas de neutrones, calculando con los resultados dados en la Ref. [10], este cota varía entre el 11% y el 15%. Los efectos del potencial gravitatorio $\vec{h}$ no han sido medidos a nivel cuántico (excepto algunos efectos inerciales) debido al pequeño valor de este campo en los laboratorios terrestres. Evidentemente este es un efecto significativo y un ingrediente necesario en la consideración de los datos observacionales, pero su verificación depende del desarrollo de ecuaciones de estado de la materia nuclear y de modelos teóricos para los pulsares suficientemente realistas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con apoyo parcial de CONICET.

[1] M.A. Alpar, Superfluid dynamics in neutron stars, en *Neutron Stars: theory and observation*, ed. J. Ventura y D. Pines,49 (1991).

[2] D. Pines, M.A. Alpar, Nature **316**, 27 (1985); G. Baym, C. Pethick y D. Pines, Nature **224**, 673 (1969); B. Link y R. Epstein, Thermally-driven neutron star glitches, astro-ph/9508021

[3] Y. Kobayashi, M. Kasai y T. Futamase, Phys. Rev. **D50**, 7721 (1994).

[4] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley, New York, 1972).

[5] H. Casini y R. Montemayor, Phys. Rev. **D50**, 7425 (1994).

[6] H. Peng, Gen. Rel. Grav. **15**, 725 (1983); **22**, 609 (1990).

[7] C. Ciubotariu y M. Agop, Gen. Rel. Grav. **23**, 405 (1996).

[8] J. Hartle, Ap. J. **150**, 1005 (1967).

[9] L.D. Landau y E. Lifchitz, *Statistical Physics , part 2* (Pergamon Press, Oxford, 1980).

[10] R.B. Wiringa, V. Fiks y A. Fabrocini, Phys. Rev. **C38** , 1010 (1988).