

# Comportamiento de una corriente viscogravitatoria con frente que espera.

B. M. MARINO\*, L. P. THOMAS, R. GRATTON

Instituto de Física Arroyo Seco  
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro  
Pinto 399, 7000 Tandil, Argentina  
e-mail: ifas@argenet.com.ar

## Resumen

Estudiamos corrientes viscogravitatorias planas no estacionarias de aceites siliconados sobre substratos horizontales de vidrio. Dentro de la aproximación de lubricación con la fuerza gravitatoria como dominante, esta corriente es descrita por la ecuación de difusión no lineal  $\phi_t = (\phi^m \phi_x)_x$  donde  $\phi$  es proporcional al espesor del líquido  $h$  y  $m = 3 > 0$ , la cual es de interés para muchos procesos físicos. Este trabajo está relacionado con las llamadas *soluciones de tiempo de espera* de esta ecuación, caracterizadas por la presencia de una interfase que separa dos regiones con  $h \neq 0$  y  $h = 0$ , que permanece inmóvil durante un intervalo de tiempo finito  $t_w$  mientras una redistribución de  $h$  tiene lugar detrás de la interfase. La corriente estudiada presenta una distribución inicial de  $h(x)$  con forma de cuña cuyo extremo, situado a una distancia  $x_0$  de la pared trasera, espera al menos algunos segundos antes de moverse. Durante este tiempo de espera, una región que presenta una fuerte variación de la pendiente de la superficie libre (conocida como *corner layer*, CL) se desarrolla propagándose hacia delante; esta etapa finaliza cuando la CL llega al frente y el líquido comienza a derramarse sobre la superficie no cubierta. A medida que la posición de la CL tiende a  $x_0$  el flujo tiende a comportarse en forma autosimilar, conducta que es interrumpida cerca del fin de la etapa de espera, por la acción de la capilaridad. Cuando el frente se pone en movimiento, la cabeza de la corriente adopta la forma de un rodillo con dimensiones características cuya evolución en el tiempo es estudiada.

## Abstract

We study spreadings of silicone oils over a horizontal glass substrate. Within the lubrication approximation with gravity as the dominant force, the flows are described by the nonlinear diffusion equation  $\phi_t = (\phi^m \phi_x)_x$ , where  $\phi$  is proportional to the liquid thickness  $h$  and  $m = 3$ . On the other hand, the interest in this equation exceeds the specific topic, since it appears in many other physical phenomena. This work concerns the so-called *waiting time solutions*, whose distinctive character is the presence of an interface or front, separating regions with  $h \neq 0$  and  $h = 0$ . This interface remains at rest for a finite time  $t_w$  meanwhile the redistribution of  $h$  takes place in the  $h \neq 0$  region. The studied flows start from a wedge-shaped initial distribution of  $h(x)$ , whose front (at a distance  $x_0$  from the rear wall) waits at least some seconds before moving. During this waiting stage, a region characterised by a strong variation of  $h_x$  (known as *corner layer*, CL) develops and advances. This stage ends when the CL arrives at  $x_0$  and the liquid begins to spread over the initially uncovered substrate. As the position of the CL approaches  $x_0$ , the flow tends to a self-similar behaviour which, however, is perturbed by capillarity. When the front gets in movement, the current head takes a rolling-shaped whose size evolution is studied.

## I. INTRODUCCION

Las ecuaciones de difusión no lineal que en simetría plana tienen la forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi^m \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \quad m > 0. \quad (1)$$

describen procesos físicos tales como el transporte de calor por radiación en gases total o parcialmente ionizados, o por electrones en plasmas<sup>1</sup>, flujos subterráneos no confinados y percolación de gases a través de medios porosos<sup>2</sup>, transmisión eléctrica en cables con recubrimientos resistivos, y muchos otros interesantes fenómenos<sup>3,4</sup>.

Este trabajo está relacionado con las llamadas *soluciones con tiempo de espera*<sup>4,5-10</sup> de la Ec. (1), cuyo carácter distintivo es la presencia de una interfase (o

frente) que separa dos regiones con  $\phi \neq 0$  y  $\phi = 0$ , y que permanece inmóvil durante un intervalo de tiempo finito  $t_w$  (*tiempo de espera*) mientras una redistribución de  $\phi$  tiene lugar detrás de la interfase.

Estudiando analíticamente la evolución de las distribuciones iniciales  $\phi \propto |x - x_0|^p$  cerca del frente ( $x_0$ : posición del frente) para  $m \ll 1$ , Kath & Cohen<sup>5</sup> encontraron que la conducta básica de las soluciones con tiempo de espera de la Ec. (1) está determinada por la formación de una discontinuidad en la distribución de la derivada primera  $\partial \phi / \partial x$  llamada *corner shock* (CS). En este límite existen distintas formas según las cuales el frente puede ponerse en movimiento, que dependen de si el CS se forma detrás o en el frente:

- Si  $0 < p < 2/m$  el frente se mueve inmediatamente ( $t_w = 0$ ).

- Si  $p = 2/m$  el frente comienza a moverse después de un tiempo de espera finito, precisamente cuando el CS se forma en  $x_0$ .

- Si  $p > 2/m$  el frente permanece inmóvil durante un tiempo finito; en algún instante de este intervalo aparece un CS detrás del frente y lo alcanza cuando  $t = t_w$ .

La validez de los resultados de Kath y Cohen para la Ec. (1) fue extendida al caso de  $m$  del orden de la unidad a través de estudios analíticos y numéricos<sup>4,10-11</sup>. A través de un adecuado cambio de variables<sup>5,10</sup>, es posible escribir la Ec. (1) como la suma de un término no lineal de propagación de onda y otro de difusión proporcional a  $m$  que suaviza los cambios de  $\partial\psi/\partial x$ . En consecuencia, el CS se convierte en una pequeña región de espesor finito en donde  $\partial^2\psi/\partial x^2$  alcanza un valor máximo (*corner layer* o CL). Numéricamente ha sido confirmado<sup>10</sup> que el frente se pone en movimiento de acuerdo con las modalidades arriba citadas. Además, fueron encontradas soluciones autosimilares de segunda especie con tiempo de espera según las cuales puede aparecer una sucesión de CL<sup>4,10</sup>. Sin embargo, a pesar del gran interés en los aspectos matemáticos de las soluciones con tiempo de espera, existen en la literatura muy pocas referencias experimentales sobre la fenomenología relacionada, y sólo de carácter cualitativo<sup>4,11,12</sup>.

En este trabajo estudiamos experimentalmente situaciones dominadas por la fenomenología de los frentes que esperan descritas por la Ec. (1), para lo cual elegimos el caso modelo que ofrecen los flujos de líquidos viscosos sobre superficies horizontales planas, llamados *flujos reptantes*<sup>13-15</sup>. En este caso, partiendo de la ecuación de Navier-Stokes en la aproximación de lubricación, substancialmente aplicable si la altura de la corriente  $h$  es mucho menor que la extensión del flujo, se obtiene la Ec. (1) con  $m = 3$  y el escalar que difunde es  $\phi = (g/3\nu)^{1/3}h$ , con  $g$ : gravedad, y  $\nu$ : viscosidad cinemática. Comprobamos que en flujos reptantes reales se verifican nítidamente los caracteres centrales descritos por la Ec. (1); en particular, es vistosa la formación de una CL cuyos parámetros característicos (posición, ancho y amplitud) medimos. Mostramos que la evolución de la CL tiende a un régimen autosimilar a medida que se acerca al frente, pero esta tendencia es afectada por la tensión superficial del líquido.

A estos experimentos sumamos una segunda serie, diseñada con el fin específico de investigar con mayor detalle la puesta en movimiento del frente. Por razones técnicas debimos limitarnos a corrientes de extensión relativamente pequeña (algunos centímetros) obtenidas a partir de configuraciones iniciales con ángulos de cuña elevados ( $\geq 0.25$  rad). Por esta última razón, la descripción global del flujo escapa a la teoría de lubricación. Encontramos que, en el momento en que se pone en movimiento, el perfil de altura adquiere la forma de un rodillo cuyas dimensiones están ligadas a la

velocidad, que a su vez es determinada por parámetros globales. Reportamos resultados sobre la evolución de esta forma y sobre la correlación entre su tamaño y la velocidad, los cuales confirman resultados obtenidos en trabajos precedentes<sup>16,17</sup> partiendo de situaciones muy distintas. En consecuencia, es razonable asumir que se trata de propiedades generales de la cabeza de corrientes reptantes.

## II. Resultados

La configuración inicial del fluido (se usan aceites siliconados, conocidos como polidimetilsiloxanos o PDMS, de elevada viscosidad) es una cuña dada por  $h = \text{tg}\alpha(x_0 - x)$  con ángulo  $\alpha = \text{tg}^{-1}(h_0/x_0)$  ( $h_0$  y  $x_0$ : altura y extensión máximas de la cuña, respectivamente). Dicha configuración es obtenida dejando al fluido en reposo en una bandeja rectangular inclinada, la cual es puesta rápidamente en posición horizontal en  $t = 0$ . La deformación del perfil inicial en la proximidad del frente, debida a la capilaridad, es reducida a un mínimo esperando el tiempo necesario para la formación de la cuña (correspondiente a la transición entre un borde convexo y un borde cóncavo), que varía desde 15 horas a varios días dependiendo de la viscosidad del fluido usado, de la longitud de la rampa y de  $\alpha$ . De acuerdo con lo expuesto en la sección precedente, y dado que en este caso  $p = 1 > 2/3$  es previsible que exista tiempo de espera y que se forme al menos una CL para  $t < t_w$ .

Con el objeto de observar la evolución de la CL y el movimiento del frente, realizamos una primera serie de experiencias en las que trabajamos con rampas de longitud apreciable ( $x_0 \approx 15, 50$  y  $75$  cm) y ángulos pequeños ( $0.012 \text{ rad} \leq \alpha \leq 0.12 \text{ rad}$ ), empleando fluidos de viscosidad  $\nu \approx 7, 10, 20$  y  $100 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$  para asegurar que el número de Reynolds  $Re \ll 1$ . Las técnicas de medición utilizadas<sup>18</sup> permiten medir el ángulo inicial de la cuña  $\alpha$  y la posición del frente  $x_f(t)$ , así como obtener la distribución de derivada  $s = \partial h/\partial x$  para valores inferiores a 0.3 en el entorno del frente. A pesar de la importante información que ellas proveen, las distribuciones de derivadas cuando  $t \approx t_w$  asumen valores que superan el límite mencionado y, por lo tanto, no es posible determinar detalladamente la forma del frente de la corriente cuando se pone en movimiento. Para realizar este estudio, realizamos una segunda serie de experiencias con rampas cortas ( $x_0 \approx 2$  cm) y ángulos grandes ( $\alpha \geq 0.25$  rad). Estos valores se eligieron para permitir el uso de adecuadas técnicas de medición<sup>19</sup> y colocan al flujo fuera del límite de validez de la teoría de lubricación, por lo que la evolución general del perfil es bastante distinta a la previamente descrita. Sin embargo, estas experiencias muestran que el frente adopta la forma de un rodillo en el momento en que se pone en movimiento y aportan datos sobre la evolución de dicha configuración que consideramos de interés general para los flujos reptantes.

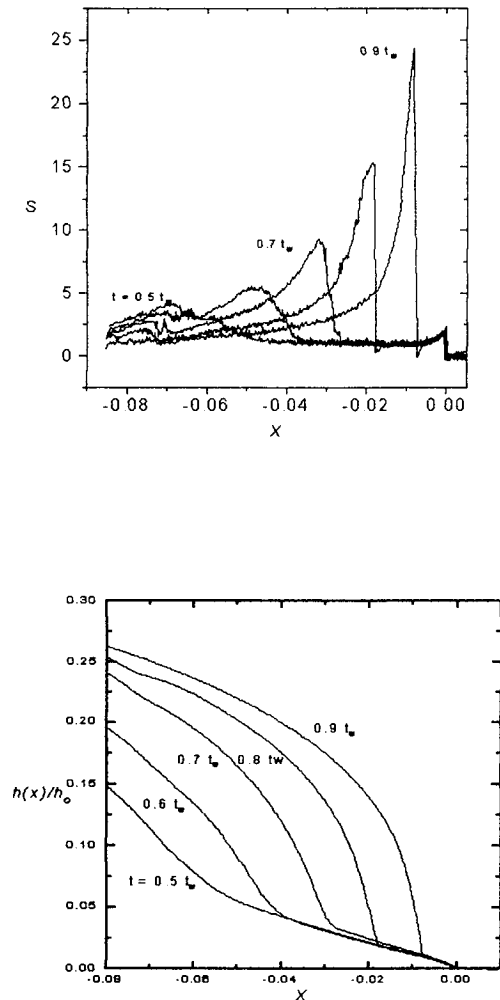


Figura 1: Arriba; Secuencia de perfiles de derivada para una experiencia típica ( $x_o = 77.7$  cm,  $\alpha = 0.0153$  rad,  $v = 21.6$  cm<sup>2</sup>/s). Abajo: secuencia correspondiente de perfiles de altura obtenidos integrando los primeros.

### a) Evolución de la CL.

El flujo presenta una etapa durante la cual el frente permanece inmóvil y el perfil de altura cambia gradualmente. Esta etapa está caracterizada por la formación y evolución de una angosta región de transición, donde la distribución de la pendiente de la superficie libre del líquido varía fuertemente (i.e., la CL). Esta región constituye la parte delantera en la distribución de la derivada  $s$  (cuyo valor máximo es  $s_m$  en la posición  $x_m$ ) que crece asimétricamente y cuyo ancho se reduce a medida que avanza hacia el frente, como muestra la Fig. 1 (donde  $S = s/\alpha$  y  $X = (x_o - x)/x_o$ ). Delante de la abrupta parte delantera de este pico hay una región que permanece casi imperturbada, mientras que detrás existe otra región fuertemente modificada con

respecto a la condición inicial. Cuando la CL alcanza la posición  $x_o$ , el fluido comienza a expandirse sobre la región inicialmente seca.

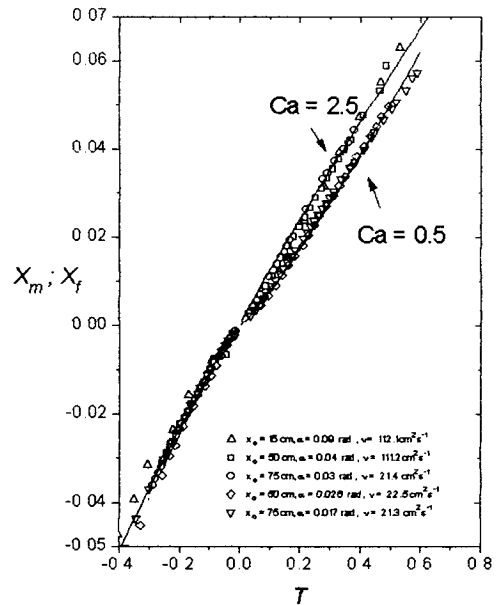


Figura 2: Coordenadas adimensionales del valor máximo de la derivada  $X_m(T)$  y del frente  $X_f(T)$  para los casos citados. Notar la coincidencia de las curvas  $X_f(T)$  para el mismo  $Ca$ . Las curvas representan las leyes de potencias que mejor ajustan a los puntos experimentales (con exponentes  $\delta_{antes} = 1.13$ ,  $\delta_{después} = 1.16$  para  $Ca = 0.5$  y  $\delta_{después} = 0.99$  para  $Ca = 2.5$ ).

A medida que la CL se aproxima a  $x_o$ , su evolución tiende a un régimen autosimilar en el cual la posición adimensionalizada del máximo  $X_m = (x_o - x_m)/x_o$ , que puede identificarse con la posición de la CL en la etapa final, varía de acuerdo a una ley de potencia de  $T = (t - t_w)/t_w$ , independientemente de  $v$ ,  $\alpha$  y  $x_o$ , como es mostrado en la Fig. 2. Aquí también mostramos la posición  $X_f(T) = (x_f - x_o)/x_o$  donde  $x_f$  es la posición más avanzada de la corriente con el frente ya en movimiento ( $t > t_w$ ). Observar que las curvas  $X_m(T)$  coinciden pudiendo ser aproximadas por una ley de potencia única con exponente  $\delta_{antes} = 1.13$ . Esto indica que, dentro del rango cubierto por las experiencias, el movimiento de la CL no es prácticamente afectado por la capilaridad. Por otra parte, las curvas  $X_f(T)$  difieren ligeramente aunque también son bien aproximadas por leyes de potencia con exponente  $\delta_{después}$  cercano a la unidad. Estas curvas dependen de  $\alpha$  y de  $x_o$  en una forma tal que se superponen aquellas con un mismo valor del número capilar  $Ca = U/(\gamma/\rho v)$  [ $U \sim x_o/t_c$ : velocidad característica del fluido y  $t_c = 3vx_o^2/g h_o^3$  es el tiempo característico del problema que surge de adimensionalizar la Ec. (1) para

los flujos reptantes]. Por lo tanto, la velocidad del frente escala como  $(x_o/t_c)f(Ca)$ , donde  $f$  es una función desconocida que tiende a una constante cuando  $Ca \rightarrow \infty$ . Esto muestra que la capilaridad es importante después de que el frente comienza a moverse si  $Ca \approx 1$  como ocurre en los experimentos. Un comportamiento análogo también se encontró en las experiencias de la segunda serie.

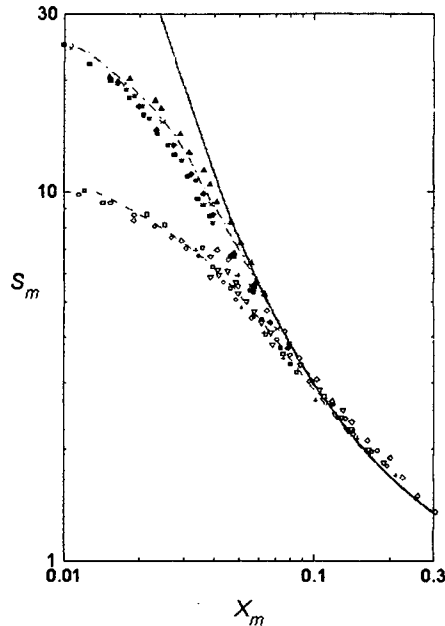


Figura 3: Derivada máxima adimensional  $S_m = s_m/\alpha$  en función de la posición  $X_m$ . Las curvas corresponden a valores numéricos obtenidos con  $\gamma = 0$  (—) y  $\gamma = 21 \text{ dyn/cm}^2$  para  $x_o \cong 15 \text{ cm}$  (—) y  $75 \text{ cm}$  (-.-.). Los símbolos corresponden a los siguientes casos:

$\diamond$ :  $\alpha = 0.065$ ,  $x_o = 15.3 \text{ cm}$ ,  $\nu = 100.5 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ ,  $+$ :  $\alpha = 0.0492$ ,  $x_o = 15.2 \text{ cm}$ ,  $\nu = 102.5 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ ,  $\circ$ :  $\alpha = 0.0304$ ,  $x_o = 13.85 \text{ cm}$ ,  $\nu = 101.2 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ ,  $\nabla$ :  $\alpha = 0.0293$ ,  $x_o = 14.7 \text{ cm}$ ,  $\nu = 20.9 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ ,  $\square$ :  $\alpha = 0.0295$ ,  $x_o = 14.8 \text{ cm}$ ,  $\nu = 8.98 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ ,  $*$ :  $\alpha = 0.0233$ ,  $x_o = 77.0 \text{ cm}$ ,  $\nu = 20.9 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ ,  $\blacklozenge$ :  $\alpha = 0.0205$ ,  $x_o = 76.5 \text{ cm}$ ,  $\nu = 21.6 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ ,  $\blacksquare$ :  $\alpha = 0.017$ ,  $x_o = 76.74 \text{ cm}$ ,  $\nu = 21.3 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ ,  $\bullet$ :  $\alpha = 0.0153$ ,  $x_o = 77.7 \text{ cm}$ ,  $\nu = 21.6 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ ,  $\Delta$ :  $\alpha = 0.0126$ ,  $x_o = 75.5 \text{ cm}$ ,  $\nu = 7.49 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ .

La Fig. 3 es una representación log-log de los puntos experimentales  $S_m$  vs.  $X_m$ , para diferentes valores de  $\alpha$  y  $\nu$ , junto a las curvas que representan los resultados de soluciones numéricas de la Ec. (1) incluyendo un término que toma en cuenta la presión de Laplace (con tensión capilar  $\gamma = 21.6 \text{ dyn cm}^{-1}$  para PDMS) para  $x_o = 15 \text{ cm}$  (línea de trazos) y  $75 \text{ cm}$  (línea de punto y trazo). La curva representada por la línea llena corresponde al cálculo numérico sin considerar al término de tensión superficial ( $\gamma = 0$ ); el hecho que tienda a una línea recta (es decir, a una ley de potencia) a medida que

el flujo evoluciona ( $X_m \rightarrow 0$ ), indica la evolución hacia un régimen autosimilar que puede asumirse como vigente a partir de  $X_m \leq 0.04$ . Los valores experimentales de  $S_m$  vs.  $X_m$  obtenidos a partir de la distribución de derivadas concuerdan muy bien con los que son provistos por la simulación numérica que incluye la capilaridad del líquido al tiempo que se apartan de la curva numérica para  $\gamma = 0$ , haciéndose evidente que, cuanto más grande es  $x_o$ , más cerca del frente comienza el apartamiento. Esto indica que, aún para el valor de  $x_o$  más grande, la tensión superficial impide la plena vigencia del régimen autosimilar al cual tiende el flujo para el hipotético caso con  $\gamma = 0$ . Para un dado  $X_m$ , los casos con  $x_o$  más pequeño producen valores de  $S_m$  más pequeños y picos de la derivada  $s$  más anchos, como es de esperar en cuanto la capilaridad tiende a reducir la curvatura local del perfil. En conclusión, los efectos de la tensión superficial son menos importantes para cuñas largas, pero no pueden ser totalmente despreciados en los experimentos de laboratorio; sólo para fenómenos naturales que ocurren a una escala enormemente mayor la capilaridad puede ser ignorada. Sin embargo, estos efectos son sensibles sólo en la evolución de  $S_m(T)$  y no producen en cambio, modificaciones significativas en  $X_m(T)$ , como se ve en la Fig. 2.

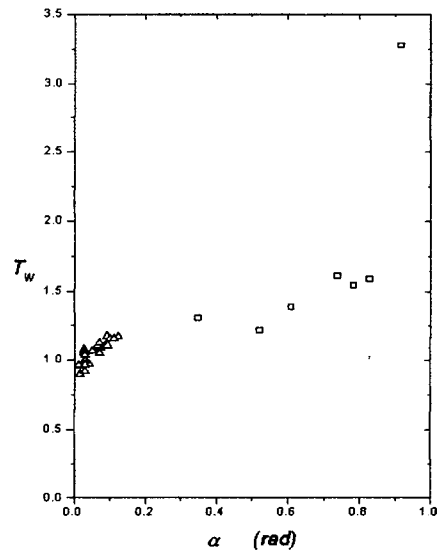


Figura 4: Tiempo de espera adimensional  $T_w = t_w/t_c$  en función del ángulo inicial de la cuña, para  $t_c = 3\nu x_o^2/g h_o^3$ : tiempo característico del problema. (Los símbolos  $\Delta$  y  $\square$  corresponden a valores obtenidos en la primera y en la segunda serie de experiencias, respectivamente).

#### b) Tiempo de espera

La Fig. 4 muestra que el tiempo de espera  $T_w = t_w/t_c$  depende de la relación de aspecto inicial. Este

efecto puede ser corregido considerando una longitud efectiva ( $x_0 - c\alpha$ ) ligeramente menor que la longitud real de la cuña en el cálculo del tiempo característico  $t_w$ , como forma de dar cuenta del condicionamiento del flujo debido a la presencia de la pared trasera, efecto no incluido en la teoría. Esta corrección se ha introducido en el presente trabajo todas las veces que se han estudiado las dependencias que involucran  $x_0$ , obteniéndose resultados plenamente consistentes con la mencionada hipótesis, es decir que el flujo se desarrolla de acuerdo a la teoría de lubricación, pero como si la rampa fuera un poco más corta de lo real. En cuanto a los valores de  $T_w$  correspondientes a la segunda serie, no pueden compararse con la teoría de lubricación, puesto que se refieren a flujos fuera de su límite de validez.

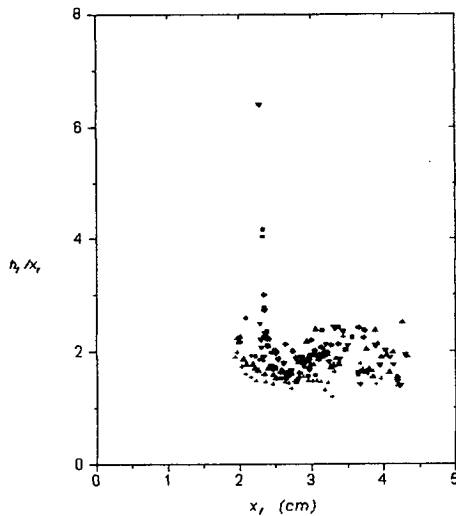


Figura 5: Relación de aspecto de la cabeza de la corriente en función de  $x_f$  para:  $\bullet$ :  $\alpha = 52.5^\circ$ ;  $\Delta$ :  $\alpha = 47.6^\circ$ ;  $+$ :  $\alpha = 45^\circ$ ;  $\circ$ :  $\alpha = 34.8^\circ$ ;  $\nabla$ :  $\alpha = 42.4^\circ$ ;  $\blacksquare$ :  $\alpha = 29.8^\circ$ . Observar la rápida tendencia de esta razón a hacerse constante cuando  $x_f$  crece.

### c) Forma del perfil cuando el frente se pone en movimiento

Es sabido que, cuando una corriente reptante está en movimiento, el perfil de su parte más avanzada (o cabeza) puede adoptar la forma de un rodillo o de una cuña, dependiendo de la importancia de la acción de la capilaridad<sup>16</sup>. En particular, la forma de rodillo puede ser caracterizada por dos parámetros relativamente fáciles de medir:  $x_r = (x_f - x_{lc})$ , donde  $x_{lc}$  es la posición de la línea de contacto, en este caso distinta de la posición  $x_f$  del punto más avanzado de la corriente, y  $h_f$ : altura de la superficie libre correspondiente a  $x_f$ . En este trabajo estamos particularmente interesados en los flujos viscosos dominados por la gravedad, donde los efectos de la capilaridad sobre el flujo pueden ignorarse. La segunda

serie de experiencias, destinada a la medición de los parámetros mencionados, está dimensionada de modo tal de disminuir los efectos capilares que intervienen en las experiencias de la primera serie para tiempos próximos a  $t_w$ . (ver Figs. 2 y 3). De acuerdo con resultados previos<sup>16</sup>, ésto es posible cuando  $h_f$  es mayor que la distancia capilar  $a$  ( $\approx 0.15$  cm para los PDMS usados). Limitaciones prácticas introducidas por la técnica de medición conducen a trabajar con rampas pequeñas de ángulos grandes, es decir, fuera del dominio de validez de la aproximación de lubricación. No obstante, los resultados que siguen constituyen una interesante información sobre cómo una corriente viscogravitatoria comienza a moverse.

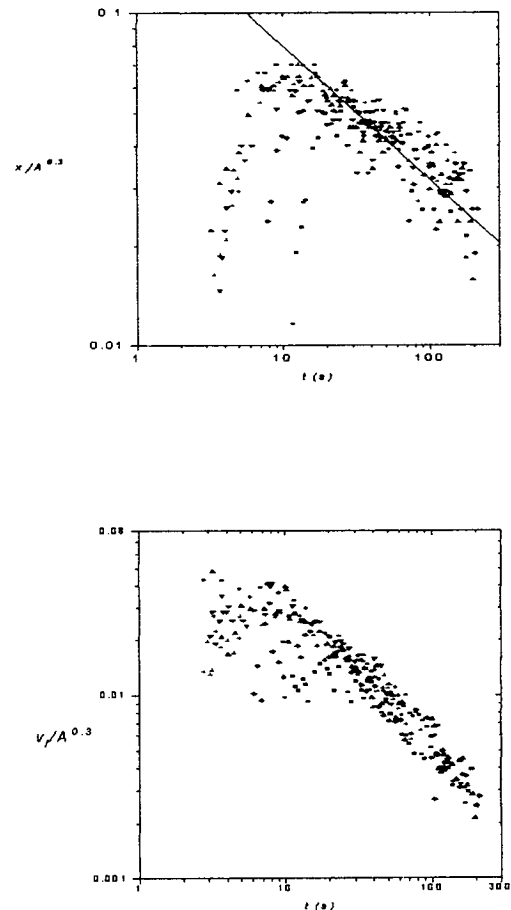


Figura 6(a): Evolución del parámetro  $x_f(t)/A^{0.3}$  que caracteriza a la cabeza de la corriente con forma de rodillo ( $t > t_w$ ) y de la velocidad del frente (inserto) para todas las experiencias realizadas con  $x_0 \approx 2$  cm (los símbolos corresponden a los mismos casos citados en la Fig. 5). Notar la correlación entre el valor máximo de la velocidad del frente y el tamaño máximo del rodillo. La recta dibujada corresponde a la ley de potencia (de pendiente  $-0.4$ ) teórica que describe la evolución del tamaño del rodillo.

En primer lugar, encontramos que (en el rango estudiado) la cabeza adquiere siempre la forma de un

rodillo y que la razón  $h_f/x_r$  tiende a una constante a medida que el flujo evoluciona, como es mostrado por la Fig. 5, al tiempo que el tamaño disminuye bastante rápidamente. La dispersión de los puntos para  $x_r > 3.5$  cm es debida justamente a que los valores de  $x_r$  y  $h_f$  se acercan a la resolución de los métodos de medida.

Por otro lado, la Fig. 6(a) muestra que, en todas las experiencias realizadas,  $x_r$  aumenta rápidamente hasta un valor máximo (que disminuye con  $\alpha$ ) que es alcanzado coincidentemente con un máximo de la velocidad del frente  $v_f$  (abajo). Luego, y a medida que el derrame sigue progresando,  $x_r$  y  $v_f$  disminuyen siguiendo leyes de potencia coincidentes para todas las experiencias realizadas.

Al realizar un balance de fuerzas locales, ésto es asumiendo que en la zona del frente la energía potencial del flujo es gastada en disipación viscosa, se encuentra que<sup>17</sup>:

$$v_f \approx \frac{\rho g}{\mu} h_f^2 \quad (2)$$

Igualando (2) a la expresión que da la velocidad del frente para una corriente viscogravitatoria<sup>16</sup>, así como resulta de un tratamiento global bajo la hipótesis de lubricación la cual puede aplicarse para  $t \gg t_w$  debido al achatamiento del fluido, se obtiene:

$$\frac{h_f}{A^{0.3}} \propto t^{-0.4} \quad (3)$$

donde A es el área transversal de la corriente. Debido a que  $h_f$  y  $x_r$  son proporcionales entre sí ( $x_r \approx h_f/2$ , ver Fig. 5), la misma dependencia temporal vale para  $x_r$ . Efectivamente, en las Figs. 6(a) y 6(b) vemos que los puntos experimentales se agrupan siguiendo una ley de potencia con exponente -0.4 característica del comportamiento autosimilar para  $t \gg t_w$ , confirmando que para  $t > t_w$  el tamaño de la cabeza de la corriente es el que corresponde a la velocidad dada por la teoría de lubricación<sup>16,17</sup>. La Fig. 6(c) muestra la confirmación experimental de la relación (2), ya que encontramos  $v_f/h_f^2 \approx 1$ : constante, como era de esperar.

### III. Conclusiones

Comprobamos experimentalmente que las soluciones con tiempo de espera de la Ec. (1) describen bien la evolución de cuñas de líquidos muy largas y con pequeñas relaciones de aspecto iniciales. Las desviaciones respecto de la ecuación de difusión no lineal son debidas a la capilaridad, la cual afecta al flujo cerca de la CL al final de la etapa de espera, y cerca del frente después que éste comienza a moverse. Además, cerca del frente y para  $t > t_w$ , la componente vertical de la velocidad de la corriente no puede ya ser ignorada y el flujo adopta un carácter bidimensional que no es tenido en cuenta en la Ec. (1). Este efecto se manifiesta claramente en las experiencias de la segunda serie, que confirman la relación directa entre la velocidad del frente y el tamaño del rodillo que caracteriza la forma de la

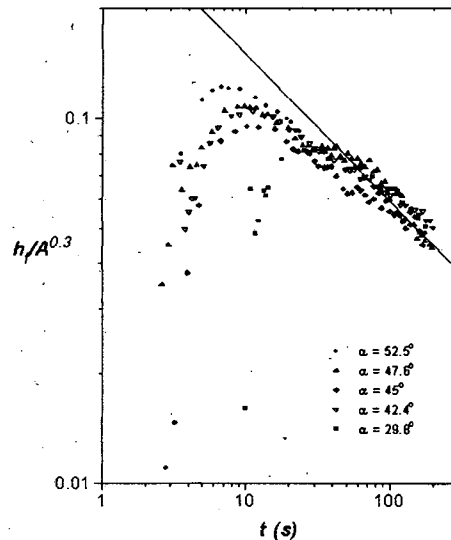


Figura 6(b): Altura adimensionalizada del punto más avanzado de la corriente en función del tiempo. También aquí, la recta dibujada corresponde a la ley de potencia (de pendiente -0.4) teórica que describe la evolución del tamaño del rodillo.

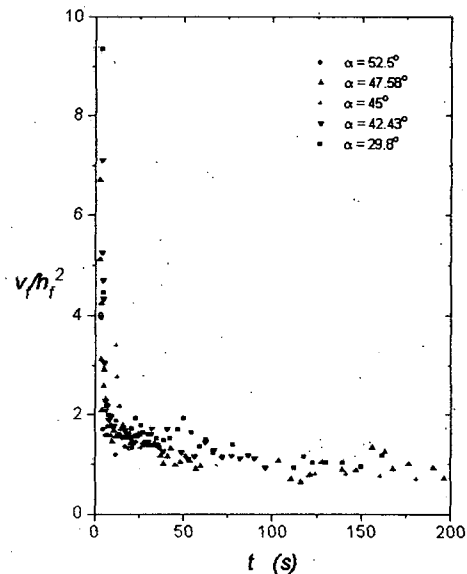


Figura 6(c): Relación  $v_f/h_f^2$  en función del tiempo. Notar la tendencia a un valor constante del orden de la unidad.

cabeza de la corriente. De todos modos, y a pesar de que dichas desviaciones son significativas, no oscurecen las características básicas del fenómeno de tiempo de espera,

cuyo estudio es el principal objetivo de este trabajo. La razón es que, como muestran claramente las experiencias de la segunda serie, el carácter bidimensional de la forma de la cabeza no afecta significativamente el comportamiento global, por el contrario, dicha forma se autoregula de modo que la velocidad del frente se ajusta a la velocidad determinada por la descripción global.

El desarrollo y evolución de la CL pone de manifiesto la acción recíproca entre la propagación no lineal, que tiende a reducir el ancho de la CL y a aumentar el valor máximo de  $\partial h/\partial x$  para producir un CS, y la difusión (no lineal), que se opone a esta tendencia, suavizando el perfil de  $\partial h/\partial x$  y ensanchando la CL. A medida que el flujo evoluciona y la CL se aproxima al frente (donde la altura de la corriente es pequeña) el efecto de la propagación no lineal prevalece. En realidad, las soluciones numéricas de la Ec. (1) (difusión no lineal pura) sugieren que la CL se convierte en un CS para  $t = t_w$ , cuando la CL alcanza el frente<sup>10</sup>. Aún si en los experimentos el perfil de la CL es afectado por la capilaridad y los efectos bidimensionales cerca del fin de la etapa de espera, esta evolución es claramente manifestada como una tendencia.

## REFERENCIAS

- 1 - R. Seshadry, and T.Y. Na, in "Group Invariance in Engineering Boundary Value Problems", Springer-Verlag, New York (1985).
- 2 - L. A. Peletier, in "Applications of nonlinear analysis in the physical sciences", H. Amman and N. Bazley, Pitman Adv. Pub. Prog., Boston, p. 229 (1981).
- 3 - J. Bear, "Dynamics of Fluids in Porous Media", American Elsevier, London (1982).
- 4 - A. A. Lacey, J.R. Ockendon and A.B. Tayler, *J. Appl. Math.* **42**, 1252 (1982).
- 5 - W. L. Kath and D. S. Cohen, *Stud. Appl. Math.* **67**, 79 (1982).
- 6 - D. Aronson, *G. SIAM J. Appl. Math.* **19**, 299 (1970).
- 7 - B.F. Knerr, *Trans. Am. Math. Soc.* **234**, 381 (1977).
- 8 - S. Kamin, in "Free Boundary Problems", E. Magenes, Tecnoprint, Rome (1980).
- 9 - N. F. Smyth and J. M. Hill, *IMA J. Appl. Math.* **40**, 73 (1988).
- 10 - J. Gratton and C. Vigo, *ANALES AFA 6: Villa Giardino (Córdoba)*, 326 (1994).
- 11 - J. Gratton, E. Rossello and J. A. Diez, *An. Acad. Nac. Cs. Ex. y Nat.*, 51 (1992).
- 12 - L.P. Thomas, J.A. Diez, R. Gratton, B.M. Marino, *Anales AFA 3*, 213-216 (1991).
- 13 - Buckmaster, *J. Fluid Mech.* **81**, 735 (1977).
- 14 - H. E. Huppert, *J. Fluid Mech.* **121**, 43 (1982).
- 15 - J. R. Lister and R. C. Kerr, *J. Fluid Mech.* **203**, 215 (1989).
- 16 - B. M. Marino, L. Thomas, J. Diez and R. Gratton., *J. Coll. Int. Sci.* **177**, 14-30 (1996).
- 17 - J.A. Diez, S. Betelú, L.P. Thomas, R. Gratton, B.M. Marino, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*. En prensa (1996).
- 18 - L.P. Thomas, B. M. Marino, R. Gratton, J.A. Diez, S. Betelú, *Flujos en el entorno de un frente que espera: Experimentos*. IV Seminario sobre problemas Actuales de la Física de Fluidos y sus Aplicaciones. La Plata, 11-13 de Diciembre de 1995.
- 19 - L.P. Thomas, R. Gratton, B. M. Marino, *Enviado a Applied Optics* (1996).