

FORMALISMO CUANTICO EN UN MODELO DE INTERACCION ELECTROMAGNETICA DE "ANYONS"

A. FOUSSATS, E. MANAVELLA, C.E. REPETTO*, O.P. ZANDRON y O.S. ZANDRON
Instituto de Física Rosario, Universidad Nacional de Rosario
Bvd. 27 de Febrero 210 Bis, 2000 Rosario, Argentina
e-mail: repetto@ifir.edu.ar

A partir del modelo de "gauge" clásico $U(1) \times U(1)$ para la interacción electromagnética de "anyons", se construye el formalismo cuántico. El modelo contiene dos campos de "gauge" $U(1)$, el campo estadístico y el campo electromagnético, y puede ser acoplado tanto a un campo de materia bosónica como fermiónica. En el presente trabajo, se considera el segundo caso, es decir, un sistema de "anyons" fermiónicos en presencia de un campo electromagnético y se lleva a cabo la cuantificación canónica de acuerdo con el formalismo de Dirac. Se realiza también, la cuantificación del sistema a partir de la integral de camino y se obtiene la diagramática y las reglas de Feynman en el marco de la teoría perturbativa.

Starting from the $U(1) \times U(1)$ classical gauge model for the electromagnetic interaction of anyons, the quantum formalism is constructed. The model containing the statistical $U(1)$ field and the electromagnetic field can be coupled to both, a commuting or an anticommuting matter field. We explicitly consider the second case, that is, a fermionic anyon system in the presence of an electromagnetic field and we carry out the canonical quantization by following the Dirac formalism. Later on, the path-integral approach is developed and the diagrammatic and Feynman rules, in the framework of the perturbation theory, are discussed.

I. INTRODUCCIÓN

Para el estudio de partículas con spin fraccional ("anyons"), existen diferentes modelos teóricos; el más conocido es la interacción minimal entre un sistema bosónico o fermiónico y un campo estadístico $U(1)$, cuya dinámica está gobernada por la acción de Chern-Simons¹.

La interacción electromagnética con partículas de spin fraccional²⁻⁸, puede considerarse a dos niveles.

A nivel de mecánica cuántica, el acoplamiento de un sistema bosónico o fermiónico con el campo de Ch-S induce un cambio en el spin y la estadística.

A nivel de la teoría cuántica de campos, el caso no relativista clásico, se puede formular como una teoría de medida $U(1) \times U(1)$ acoplada con el campo de materia (bosónico o fermiónico) a través de una corriente que se conserva⁸. El modelo más natural para reproducir los resultados de la mecánica cuántica, se obtiene acoplado un campo de materia que conmuta (o anticonmuta) con dos campos de medida $U(1)$, uno electromagnético y otro de Ch-S. La teoría $U(1) \times U(1)$ así obtenida, reproduce el valor $\mu_{st} = \frac{1}{2m}$ para el momento magnético estadístico y el valor $\mu_{em} = \frac{e}{m} s$ para el momento magnético electromagnético, que son los requeridos por la mecánica cuántica⁸.

En la teoría cuántica de "anyons" fermiónicos, el momento magnético estadístico toma el valor $\mu_{st} = \frac{1}{2m}$ para cualquier spin, mientras que en el caso bosónico no existe restricción y μ_{st} resulta arbitrario. Este hecho debe reflejarse en la correspondiente densidad Lagrangiana.

El propósito de este trabajo es considerar la teoría de medida no relativista clásica $U(1) \times U(1)$ desarrollada en Ref.8 y estudiar este modelo desde el punto de

vista cuántico. El estudio de estos temas es de interés en problemas de física plana, y en particular el caso no relativista es muy utilizado en temas de materia condensada.

II. INTERACCIÓN ELECTROMAGNÉTICA DE "ANYONS" EN UNA TEORÍA DE CAMPOS NO RELATIVISTA. CUANTIFICACIÓN CANÓNICA.

La dinámica de "anyons" en interacción con el campo electromagnético involucra como ya se dijo dos campos de medida, los que en principio se pueden considerar en el mismo pie de igualdad. La densidad Lagrangiana para este modelo de gauge es de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{gauge}}(A_1, A_2) + q_i J_\mu A_i^\mu + \mathcal{L}_{\text{materia}}$, donde A_i^μ ($i = 1, 2$) son dos campos $U(1)$, J_μ la corriente conservada y q_i las cargas⁸. Por otro lado, utilizando argumentos de invariancia de medida y compatibilidad con resultados de mecánica cuántica, es fácil mostrar que sólo es necesario un campo estadístico y éste puede ser diferenciado sin ambigüedad del otro campo de medida, es decir, del campo electromagnético.

La teoría de campos clásica no relativista de "anyons" está descrita por el siguiente Lagrangiano singular:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{an} + \mathcal{L}_{em} \\ &= i \left(\frac{a+1}{2} \right) \psi^\dagger \partial_0 \psi + i \left(\frac{a-1}{2} \right) \partial_0 \psi^\dagger \psi \\ &+ \psi^\dagger (A_0 + eB_0) \psi + \frac{1}{2m} \psi^\dagger \mathcal{D}^2 \psi \\ &+ \frac{i}{2m} \psi^\dagger [D_1, D_2] \psi + \frac{1}{2\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(B)F^{\mu\nu}(B) - \frac{1}{8\pi m}F_{\mu\nu}(A)F^{\mu\nu}(B). \quad (2.1)$$

En la ecuación (2.1), la derivada covariante que tiene en cuenta tanto al campo estadístico A_μ como al campo electromagnético B_μ , se escribe $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - iA_\mu - ieB_\mu$, donde $\mathcal{D}^2 = \mathcal{D}_1^2 + \mathcal{D}_2^2$.

En lo que sigue se considera que el campo de materia ψ anticonmuta, describiendo así "anyons" fermiónicos. El parámetro a en la ecuación (2.1) se introduce para obtener expresiones simétricas de los momentos canónicos conjugados correspondientes a los campos de materia ψ^\dagger y ψ . Al factor estadístico del sistema lo llamamos σ . $F_{\mu\nu}(A)$ y $F_{\mu\nu}(B)$ son los tensores intensidad de campo asociados a los campos estadístico y electromagnético respectivamente.

Los momentos canónicos conjugados asociados con las variables de campo A_μ , B_μ , ψ^\dagger y ψ serán respectivamente P_A^μ , P_B^μ , Π^\dagger y Π y verificarán las relaciones de conmutación usuales.

A partir de la definición de los momentos canónicos se obtienen los siguientes vínculos primarios:

$$\Phi_A^0(x) = P_A^0 \approx 0, \quad (2.2a)$$

$$\Phi_B^0(x) = P_B^0 \approx 0, \quad (2.2b)$$

$$\Omega^\dagger(x) = \Pi^\dagger + i\left(\frac{a+1}{2}\right)\psi^\dagger \approx 0 \quad (2.2c)$$

$$\Omega(x) = \Pi - i\left(\frac{a-1}{2}\right)\psi \approx 0. \quad (2.2d)$$

A partir de ellos podemos construir la densidad Hamiltoniana extendida

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_{can} + \alpha\Phi_A^0 + \beta\Phi_B^0 + \lambda^\dagger\Omega + \Omega^\dagger\lambda, \quad (2.3)$$

donde α y β son los multiplicadores de Lagrange bosónicos, λ^\dagger y λ son los fermiónicos y el funcional \mathcal{H}_{can} esta definido como es usual por:

$$\mathcal{H}_{can} = \dot{A}_\mu P_A^\mu + \dot{B}_\mu P_B^\mu + \dot{\psi}^\dagger \Pi + \dot{\psi} \Pi^\dagger - \mathcal{L}.$$

Seguindo la teoría de Dirac, debemos imponer las condiciones de consistencia sobre los vínculos. Cuando esto se realiza sobre los vínculos fermiónicos, se determinan los multiplicadores de Lagrange λ^\dagger y λ . En cambio, cuando se imponen sobre los vínculos bosónicos, se obtienen los siguientes vínculos secundarios:

$$\Phi_A^1 = [\Phi_A^0, H_T] = \partial_i P_A^i + \frac{1}{2\sigma}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j + \psi^\dagger\psi \approx 0, \quad (2.4a)$$

$$\Phi_B^1 = [\Phi_B^0, H_T] = \partial_i P_B^i + e\psi^\dagger\psi \approx 0. \quad (2.4b)$$

Se muestra fácilmente que los dos vínculos bosónicos (2.2a,b) son de primera clase, mientras que los dados en las expresiones (2.4) junto con los dos fermiónicos resultan ser de segunda clase. Sin embargo, es posible encontrar dos nuevos vínculos

primera clase, haciendo combinaciones lineales adecuadas entre los vínculos de segunda clase. Tales combinaciones resultan:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= e\Phi_A^1 - \Phi_B^1 \\ &= e\partial_i P_A^i - \partial_i P_B^i + \frac{e}{2\sigma}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j \approx 0, \end{aligned} \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \psi^\dagger\Omega - \psi\Omega^\dagger - \frac{i}{e}\Phi_B^1 \\ &= \psi^\dagger\Pi - \psi\Pi^\dagger - \frac{i}{e}\partial_i P_B^i \approx 0. \end{aligned} \quad (2.5b)$$

Por lo tanto, el conjunto final de vínculos está dado por:

i) Cuatro vínculos bosónicos de primera clase: $\Phi_A^0(x)$, $\Phi_B^0(x)$, $\Sigma_1(x)$ and $\Sigma_2(x)$.

ii) Dos vínculos fermiónicos de segunda clase $\Omega^\dagger(x)$ y $\Omega(x)$.

A partir de ellos se calculan los corchetes de Dirac, los cuales difieren de los de Poisson sólo en el caso de las variables fermiónicas.

Finalmente, el Hamiltoniano total cuántico se escribe :

$$H_T^* = \int d^2x (\mathcal{H}_{can} + a\Phi_A^0 + b\Phi_B^0 + c\Sigma_1 + d\Sigma_2), \quad (2.6)$$

donde a , b , c y d son cuatro parámetros arbitrarios.

La cuantificación canónica del sistema puede ahora llevarse a cabo utilizando los métodos usuales.

III. INTEGRAL DE CAMINO Y MÉTODO PERTURBATIVO.

De acuerdo con el formalismo de Faddeev-Senjanovic^{9,10}, la función de partición para el modelo bajo consideración, está dada por:

$$\begin{aligned} Z &= \int DA_\mu DP_A^\mu DB_\nu DP_B^\nu D\psi^\dagger D\Pi D\psi D\Pi^\dagger \\ &\delta(\Sigma_1)\delta(\Sigma_2)\delta(\Sigma_3)\delta(\Sigma_4)\delta(f_1)\delta(f_2)\delta(f_3)\delta(f_4)\delta(\Omega^\dagger) \\ &\delta(\Omega) \det[\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, f_1, f_2, f_3, f_4]_D \det[\Omega^\dagger, \Omega] \\ &\times \exp i \left[\int d^3x (\dot{A}_\mu P_A^\mu + \dot{B}_\nu P_B^\nu + \dot{\psi}^\dagger \Pi + \dot{\psi} \Pi^\dagger) - H_T \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $H_T = \int d^2x \mathcal{H}_T$ y \mathcal{H}_T fue definido en (2.3); Σ_i es el conjunto de vínculos de primera clase dados en (2.2) y (2.5). Las funciones f_i son las condiciones de fijado de "gauge" correspondientes a cada uno de los vínculos de primera clase. Estas condiciones satisfacen los siguientes requisitos:

i) $\det[f_i, \Sigma_j]_D \neq 0$ para todos los vínculos de primera clase;

ii) $[f_i, f_j]_{PB} = 0$ y ellas deben ser compatibles con las ecuaciones de movimiento.

Evidentemente, estas condiciones no determinan unívocamente las condiciones de "gauge"; por razones de simplicidad se eligen las siguientes:

$$f_1 = \partial_i A^i \approx 0, \quad (3.2a)$$

$$f_2 = \partial_i B^i \approx 0, \quad (3.2b)$$

$$f_3 = B_0(x) + \frac{m}{e} \int d^2y \frac{(\frac{1}{\sigma} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j + \psi^\dagger \psi)}{|x-y|} \approx 0, \quad (3.2c)$$

$$f_4 = A_0(x) + \frac{m}{e} B_0 + m \int d^2y \frac{\psi^\dagger \psi}{|x-y|} \approx 0. \quad (3.2d)$$

Como el $\det[f_i, \Sigma_j]_D$ no depende de los campos al igual que el determinante entre vínculos de segunda clase, ambos pasan a formar parte del factor de normalización del funcional generatriz.

Finalmente, realizando en la expresión (3.1) las correspondientes integrales de camino y otros pasos matemáticos usuales¹¹, la función de partición toma la forma:

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}B_\mu \mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\psi \exp i \left[\int d^3x \mathcal{L}^* \right], \quad (3.3)$$

donde el funcional \mathcal{L}^* está dado por:

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_{eff} + \frac{\lambda_A}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 + \frac{\lambda_B}{2} (\partial^\mu B_\mu)^2. \quad (3.4)$$

y \mathcal{L}_{eff} coincide con el Lagrangiano original (2.1).

En este punto, se está en condiciones de obtener los propagadores de los campos dinámicos, los vértices y dar las reglas de Feynman del modelo. Por lo tanto es posible tratar el modelo en el marco de una teoría perturbativa. Para hacer esto, en primer lugar se define un campo auxiliar $X_\Lambda \equiv (A_\mu, B_\nu)$, donde el índice compuesto $\Lambda \equiv (\mu, \nu)$ toma seis valores. Una vez escrita la acción en función de esta cantidad, los propagadores se obtienen a partir de la parte cuadrática en los campos, y el resto representa los vértices. Realizando esto, es posible mostrar que la acción efectiva del sistema de "anyons" fermiónicos acoplado con el campo electromagnético se puede escribir de la siguiente forma:

$$S^* = S^*(X_\Lambda) + S^*(\psi^\dagger, \psi) + S_{int}^*(X_\Lambda, \psi^\dagger, \psi). \quad (3.5)$$

En la ecuación (3.5) se llamó:

$$S^*(X_\Lambda) = \int d^3x \left[\frac{1}{2} X_\Lambda (D^{-1})^{\Lambda\Sigma} X_\Sigma \right], \quad (3.6a)$$

$$S^*(\psi^\dagger, \psi) = \int d^3x [\psi^\dagger G \psi], \quad (3.6b)$$

$$S_{int}^*(X_\Lambda, \psi^\dagger, \psi) = \int d^3x \left[-\frac{1}{2m} \psi^\dagger (X_\Sigma V^{\Sigma\Lambda} X_\Lambda) \psi \right] + \int d^3x \left[\frac{1}{2m} \psi^\dagger (\Gamma_\Sigma X^\Sigma) \psi \right]. \quad (3.6c)$$

A partir de la expresión (3.6a) podemos calcular el propagador $D_{\Lambda\Sigma}(k)$ asociado con el campo auxiliar X_Λ . En el espacio de los momentos, éste resulta:

$$D_{\Lambda\Sigma}(k) = \begin{pmatrix} M_{\mu\nu} & L_{\mu\nu} \\ L_{\mu\nu} & N_{\mu\nu} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Las expresiones $M_{\mu\nu}$, $N_{\mu\nu}$ y $L_{\mu\nu}$ están dadas por:

$$M_{\mu\nu} = \left(\frac{4\pi m}{e} \right)^2 \alpha(k^2) g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left[\left(\frac{4\pi m}{e} \right)^2 \alpha(k^2) + \frac{1}{\lambda_A} (\alpha(k^2) - \beta(k^2)) \right] + i \left(\frac{4\pi m}{e} \right)^2 \gamma(k^2) \varepsilon_{\mu\nu\rho} \frac{k^\rho}{k^2}, \quad (3.8a)$$

$$N_{\mu\nu} = \beta(k^2) g_{\mu\nu} + i \gamma(k^2) \varepsilon_{\mu\nu\rho} \frac{k^\rho}{k^2} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left[\beta(k^2) + \frac{1}{\lambda_B} (\alpha(k^2) - \beta(k^2)) \right], \quad (3.8b)$$

$$L_{\mu\nu} = -\frac{4\pi m}{e} \alpha(k^2) \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + \frac{i}{\sigma} \left(\frac{4\pi m}{e} \right)^2 \varepsilon_{\mu\nu\rho} \frac{k^\rho}{k^2} \right], \quad (3.8c)$$

y las funciones $\alpha(k^2)$, $\beta(k^2)$ y $\gamma(k^2)$ son:

$$\alpha(k^2) = \left[k^2 - \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{4\pi m}{e} \right)^4 \right]^{-1},$$

$$\beta(k^2) = \frac{1}{\sigma^2 k^2} \left(\frac{4\pi m}{e} \right)^4 \alpha(k^2),$$

$$\gamma(k^2) = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{4\pi m}{e} \right)^2 \alpha(k^2). \quad (3.9)$$

El propagador no relativista para el campo de materia $G(\mathbf{p}, \omega)$ en el espacio de los momentos, escrito en la ecuación (3.6b), está dado por:

$$G(\mathbf{p}, \omega) = \left(\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right)^{-1}. \quad (3.10)$$

A partir de (3.6c) vemos que en este modelo hay dos tipos de vértices: uno de cuatro patas representado por una matriz 6×6

$$V^{\Sigma\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

y otro de tres patas, dado por el siguiente vector de seis componentes

$$\Gamma_{\Sigma} = \left(1, \frac{1}{2m}(q_i - p_i - i\epsilon_{ij}k^j), e, \frac{e}{2m}(q_i - p_i - i\epsilon_{ij}k^j) \right). \quad (3.12)$$

Por lo tanto se establecen las siguientes reglas de Feynman:

i) Se asocia una línea ondulada con el propagador $D_{\Sigma\Lambda}$ del campo bosónico X_{Σ} .

$$X_{\Sigma} \quad \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ \leftarrow \\ \text{---} \end{array} \quad X_{\Lambda} \quad \equiv D_{\Sigma\Lambda}(k),$$

ii) Se asocia una línea simple con el propagador no relativista del campo de materia ψ

$$\text{---} \quad p \rightarrow \quad \equiv \frac{1}{\left(\omega - \frac{p^2}{2m}\right)}.$$

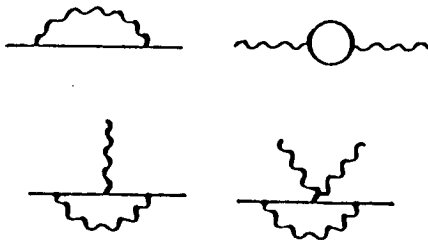
iii) Se asocia respectivamente con los vértices de tres y cuatro patas los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \text{---} \quad \equiv \Gamma_{\Sigma}, \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \text{---} \quad \equiv -\frac{1}{2m}V^{\Sigma\Lambda}.$$

iv) Como es usual, se debe poner un signo menos por cada loop fermiónico y otro para diagramas relacionados entre sí por el intercambio de dos líneas fermiónicas internas o externas. También se debe tener en cuenta el factor combinatorio que tenga en cuenta el doble conteo de partículas idénticas.

Este modelo que describe la interacción del objeto bosónico X_{Σ} con el campo de materia ψ , puede ser analizado en el marco de la teoría perturbativa.

A los efectos del estudio de las divergencias, el análisis del conteo de potencias a un loop muestra que sólo se deben tener en cuenta los siguientes diagramas, los cuales muestran un grado de divergencia superficial:



El comportamiento ultravioleta de los dos primeros diagramas (los cuales representan respectivamente las correcciones a las líneas fermiónicas y bosónicas) y del tercero (que representa la corrección al vértice de tres patas) son similares a las de la QED. El último diagrama, que representa la corrección al vértice de cuatro patas, es un diagrama nuevo y es consecuencia del término magnético en el Lagrangiano (2.1). Análogamente a lo que ocurre en la QED, este modelo puede ser regularizado y renormalizado siguiendo los métodos usuales.

¹ C. R. Hagen, Ann. Phys. (NY) 157 342 (1984); Phys. Rev. D31, 848 (1985); D31, 2135 (1985). D. Arovas, J. Schrieffer, F. Wilczek and A. Zee, Nucl. Phys. B251, 117 (1985). See a review see also R. Jackiw, in: Physics, geometry and topology, ed. H. C. Lee (Plenum, New York, 1990).

² I. I. Kogan, Phys. Lett. B262, 83 (1991); I. I. Kogan and G. W. Semenoff, Nucl. Phys. B368, 718 (1992).

³ J. Stern, Phys. Lett. B 265, 119 (1991).

⁴ A. Cabo, M. Chaichian, R. Gonzalez Felipe, A. Perez Martinez and H. Perez Rojas, Phys. Lett. A 166, 153 (1992).

⁵ J. L. Cortes, J. Gamboa and L. Velazquez, Phys. Lett. B 286, 105 (1992).

⁶ C. Chou, V. P. Nair and A. P. Polychronakos, Phys. Lett. B 304, 105 (1993).

⁷ M. Chaichian, R. Gonzalez Felipe and D. L. Martinez, Phys. Rev. Lett. 71, 3405 (1993).

⁸ J. L. Cortes, J. Gamboa and L. Velazquez, Int. J. of Modern Physics A 9, 953 (1994).

⁹ Faddeev L.D., Theor. Math. Phys. 1 (1970) 1.

¹⁰ Senjanovic P., Ann. of Phys. (NY) 100 (1976) 227.

¹¹ Sundermeyer K., "Constrained Dynamics" Springer-Verlag (1982).