La ecuación covariante de Sitter para spin 1/2

F. H. GAIOLI and E. T. GARCIA-ALVAREZ

INSTITUTO DE ASTRONOMIA Y FISICA DEL ESPACIO

C.C. 67, SUCURSAL 28, 1428, BUENOS AIRES - ARGENTINA

e-mail: gaioli@iafe.uba.ar

In previous works we have developed the formalism of proper time parametrized quantum mechanics for spin-$\frac{1}{2}$ systems. This formalism is based on the parametrization of the Dirac equation originally proposed by Feynman. In this work we show that this equation is a non-massive Dirac equation in a five-dimensional pseudo-Euclidean manifold and corresponds to an irreducible representation of the inhomogeneous de Sitter group. This fact reinforces the proper time interpretation we have given to the evolution parameter in previous works.

En trabajos anteriores hemos desarrollado un formalismo de la mecánica cuántica relativista parametrizada en un "tiempo propio" para sistemas de espín-$\frac{1}{2}$. Este formalismo se basa en la parametrización de la ecuación de Dirac propuesta originalmente por Feynman. En este trabajo mostramos que dicha ecuación puede verse como una ecuación de Dirac "no-masiva" en un espacio pseudo-euclideano de cinco dimensiones, correspondiente a una representación irreducible del grupo de Sitter inhomogéneo. Esto refuerza la interpretación que dimos en trabajos previos del parámetro que rotula la evolución como el tiempo propio.

Introducción

En una serie de trabajos previos [1–3] hemos estudiado la parametrización de la ecuación de Dirac propuesta por Feynman [4] en sus trabajos originales de la Electrodinámica Cuántica y que también ha sido estudiada por otros autores más recientemente [5,6]. Dicha parametrización,

$$-i\frac{\partial}{\partial s}\psi(x,s) = \gamma^{\mu}p_{\mu}\psi(x,s), \tag{1}$$

debe interpretarse como una ecuación de Schrödinger, donde s es un parámetro invariante que rotula la evolución dinámica de los estados del sistema.

Trabajando en el cuadro de Heisenberg correspondiente a la ecuación (1) hemos obtenido ecuaciones de movimiento que pueden ponerse en correspondencia con las ecuaciones clásicas de precesión del spin [7,8]. Además hemos probado que el parámetro s se reduce al tiempo propio en la aproximación semiclásica [9]. En la Ref. [1] hemos desarrollado el marco teórico correspondiente a la ecuación (1) el cual provee, en principio, una unificación consistente de la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial a nivel de la teoría de una "partícula." El precio que debemos pagar es que dicha partícula representa a un sistema de masa indefinida, lo cual permite reinterpretar el problema de la Localización [10], extendiendo el álgebra del grupo de Poincaré [11,2]. Por otro lado, señalemos que el interés por extender el grupo de Poincaré ha sido la posibilidad de: (a1) unificar dicho grupo con los grupos de simetrías internas [12]; (b1) desarrollar una física de partículas compatible con el grupo general de transformaciones de coordenadas de la Relatividad General [13]. En ambos casos, una de las extensiones más naturales la constituyen los grupos de de Sitter inhomogéneo y homogéneo, ya que: (a2) el grupo inhomogéneo es el grupo de transformaciones lineales que dejan invariante la forma cuadrática correspondiente a la extensión dimensional más simple del espacio de Minkowski (un hiperespacio plano de 4 + 1 dimensiones) [14,15]; (b2) el grupo homogéneo de de Sitter es el grupo de transformaciones lineales homogéneas que dejan invariante una hiperesfera en el espacio de "Minkowski" de 4 + 1 dimensiones. Tal hiperesfera es el espacio-tiempo no trivial más simple (de curvatura constante) donde se puede desarrollar la idea mencionada en (b1).

Incidentalmente, en un trabajo reciente Barut y Thacker [6] han encontrado el álgebra del grupo de de Sitter estudiando la *Zitterbewegung* covariante correspondiente a la ecuación (1). (Nosotros hemos discutido este problema en un trabajo previo desde otro punto de vista [3,16].) Aquí intentamos demostrar que dicha conexión no es casual. En efecto, dentro del contexto expresado en (a2), en este trabajo mostramos que la ecuación (1) corresponde a una representación no "masiva" del grupo de de Sitter inhomogéneo, resultando además natural la identificación del parámetro s con el tiempo propio. La ecuación "masiva" se construye añadiendo la matriz γ^5 a las matrices de Dirac estándar, la cual surge naturalmente en este marco teórico.

Por simplicidad comenzamos en la sección II desarrollando esta idea partiendo de un espacio-tiempo de 1 + 1 dimensiones, que luego extendemos a un espacio-tiempo tridimensional. En la sección III repetimos este desarrollo pasando del espacio-tiempo de Minkowski a un espacio plano de 4 + 1 dimensiones.

La ecuación de Dirac en 1+1 dimensiones

Consideremos el análogo en dos dimensiones del espacio-tiempo de la relatividad especial. Si x^1 y x^2 son las coordenadas de tipo espacial y temporal respectivamente, el cuadrado del elemento de arco se lee

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(dx^1)^2 + (dx^2)^2, \quad (2)$$

donde los índices griegos corren de 1 a 2 y hemos adoptado la convención

$$g_{\mu\nu} = diag(-1, 1) \quad (3)$$

para el tensor métrico. Es sabido que si intentamos escribir una ecuación de Dirac

$$\gamma^\mu i\partial_\mu\psi = m\psi, \quad (4)$$

donde las matrices γ satisfacen

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (5)$$

la dimensión más pequeña en que se consigue realizar el álgebra (5) corresponde a matrices de dos por dos. Nótese además que la dimensión de las matrices coincide con la dimensión del espacio-tiempo. Por ejemplo, una representación de dichas matrices se consigue eligiendo las matrices de Pauli

$$\gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = \sigma_2. \quad (6)$$

Nuestra elección ha sido tal que las matrices γ son henmíticas o antihermíticas de acuerdo con la signatura de la métrica:

$$(\gamma^1)^\dagger = -\gamma^1, \quad (\gamma^2)^\dagger = \gamma^2. \quad (7)$$

Ahora bien, sabemos que las anteriores no son las únicas matrices que anticonmutan entre sí y de cuadrado $\pm I$. Podemos definir aún, una matriz

$$\gamma^3 = \frac{i}{2!}\epsilon_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = i\gamma^2\gamma^2, \qquad (8)$$

que en la representación anterior es

$$\gamma^3 = ii\sigma_1\sigma_2 = -i\sigma^3, \qquad (9)$$

la cual satisface el álgebra

$$(\gamma^3)^2 = -I, \quad \gamma^3\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^3 = 0 \qquad (10)$$

y es antihermítica

$$(\gamma^3)^\dagger = -\gamma^3. \qquad (11)$$

Nuestra nueva matriz no es otra cosa que el análogo en dos dimensiones de la matriz γ^5!

La existencia de una nueva matriz con las propiedades (10) es un hecho importante. Nótese que es precisamente dicha propiedad la que nos permite escribir una ecuación de Dirac en un espacio-tiempo con una dimensión superior, sin necesidad de alterar la dimensión de las matrices γ. En efecto, supongamos que agrandamos la dimensión de nuestro espacio-tiempo (al cual le invertimos la signatura de la métrica) introduciendo una nueva coordenada x^3 de tipo temporal, de modo tal que el cuadrado del nuevo elemento de arco se lea

$$dS^2 = g^{AB}dx_A dx_B = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \qquad (12)$$

Entonces, de la discusión anterior es inmediato que, eligiendo

$$\Gamma^1 = i\gamma^1, \quad \Gamma^2 = i\gamma^2, \quad \Gamma^3 = i\gamma^3, \qquad (13)$$

se satisface el álgebra

$$\Gamma^A\Gamma^B + \Gamma^B\Gamma^A = 2g^{AB} \qquad (14)$$

y podemos escribir la ecuacion

$$\Gamma^A i\partial_A\Psi = M\Psi, \qquad (15)$$

donde para evitar confusiones hemos distinguido con mayúsculas las cantidades correspondientes al espacio-tiempo tridimensional. Nótese además que seguimos respetando la coordinación entre la signatura y la hermiticidad

$$(\Gamma^1)^\dagger = \Gamma^1, \quad (\Gamma^2)^\dagger = -\Gamma^2, \quad (\Gamma^3)^\dagger = \Gamma^3. \qquad (16)$$

Otro hecho interesante es el siguiente. La ecuación no masiva

$$\Gamma^A i\partial_A\Psi = 0, \qquad (17)$$

clásicamente corresponde a una partícula con intervalo "lumínico" (dS=0!), es decir,

$$(dx^3)^2 = -(dx^1)^2 + (dx^2)^2 = ds^2. \qquad (18)$$

Por lo tanto, la coordenada adicional x^3 resulta igual al tiempo propio de la teoría en dimensión inferior.

Con esta última observación en mente, teniendo en cuenta que para dos vectores cualesquiera

$$a^A b_A = -a^\mu b_\mu + a^3 b_3, \qquad (19)$$

podemos reescribir a la ecuación (17) en la forma sugestiva

$$-i\frac{\partial\Psi(x^\mu, s)}{\partial s} = \tilde{\gamma}^\mu i\partial_\mu\Psi(x^\mu, s), \qquad (20)$$

donde

$$\tilde{\gamma}^\mu = \gamma^3\gamma^\mu. \qquad (21)$$

Las matrices $\tilde{\gamma}^\mu$ son una nueva representación de las matrices γ^μ, o sea, existe una matriz S tal que

$$\tilde{\gamma}^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}, \qquad (22)$$

ya que

$$\tilde{\gamma}^1 = i\gamma^2 = i\sigma^2, \quad \tilde{\gamma}^2 = i\gamma^1 = -\sigma^1, \qquad (23)$$

las cuales satisfacen el álgebra

$$\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu = 2g^{\mu\nu}. \qquad (24)$$

Esto puede comprobarse en general verificando que la transformación S está dada por

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}(I + i\gamma^3). \qquad (25)$$

La ecuación (20) no es otra cosa que la parametrización de la ecuación de Dirac originalmente introducida por Feynman [4] que hemos discutido en trabajos previos [1–3].

La ecuación de Dirac en 4 + 1 dimensiones

Siguiendo un procedimiento análogo al de la sección anterior, veamos como a partir de la ecuación de Dirac en el espacio-tiempo de Minkowski se puede construir su análogo en un espacio de 4 + 1 dimensiones.

Sea entonces

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ &= -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2, \end{aligned} \tag{26}$$

$$g_{\mu\nu} = diag(-1,-1,-1,1), \tag{27}$$

el cuadrado del elemento de arco y la métrica de nuestro espacio-tiempo, donde ahora los índices griegos corren de 1 a 4.

Al igual que en el caso anterior, la ecuación de Dirac

$$\gamma^\mu i\partial_\mu \psi = m\psi, \tag{28}$$

con

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \tag{29}$$

necesita de matrices cuadradas de al menos la dimensión del espacio-tiempo para realizar el álgebra (matrices 4×4). En este caso también vamos a elegir una representación en la cual nuestras matrices tengan las siguientes relaciones de hermiticidad

$$(\gamma^1)^\dagger = -\gamma^1, \quad (\gamma^2)^\dagger = -\gamma^2, \tag{30}$$

$$(\gamma^3)^\dagger = -\gamma^3, \quad (\gamma^4)^\dagger = \gamma^4. \tag{31}$$

Además consideramos la siguiente definición para la matriz γ^5:

$$\gamma^5 = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \tag{32}$$

que de acuerdo con las propiedades anteriores resulta de cuadrado negativo [17]

$$(\gamma^3)^2 = -I, \quad \gamma^3\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^3 = 0 \tag{33}$$

y antihermítica

$$(\gamma^5)^\dagger = -\gamma^5. \tag{34}$$

Ahora agrandemos nuevamente la dimensión de nuestro espacio-tiempo para convertirlo en un espacio de 4 + 1 dimensiones, cuyo elemento de arco al cuadrado se lea

$$dS^2 = g^{AB}dx_A dx_B = -g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu + (dx^5)^2. \tag{35}$$

Es inmediato comprobar que, eligiendo

$$\Gamma^\mu = i\gamma^\mu, \quad \Gamma^5 = i\gamma^5, \tag{36}$$

se satisface el álgebra

$$\Gamma^A\Gamma^B + \Gamma^B\Gamma^A = 2g^{AB}, \tag{37}$$

lo cual permite escribir la ecuación [18]

$$\Gamma^A i\partial_A\Psi = M\Psi. \tag{38}$$

Se puede demostrar que esta última ecuación es covariante frente al grupo de transformaciones lineales que dejan invariante a la forma cuadrática dS^2 (grupo inhomogéneo de de Sitter). La demostración es análoga a la correspondiente al grupo de Poincaré, y en esencia consiste en demostrar que debido a (37), el spin

$$\Sigma^{AB} = \frac{1}{2i}\left[\Gamma^A, \Gamma^B\right], \tag{39}$$

satisface el álgebra

$$\begin{aligned} [\Sigma^{AB}, \Sigma^{CD}] = -i(&g^{AD}\Sigma^{CB} - g^{BD}\Sigma^{CA} \\ &+ g^{BC}\Sigma^{DA} - g^{AC}\Sigma^{DB}). \end{aligned} \tag{40}$$

Es interesante destacar que el tensor de spin tiene en su parte espacial al opuesto del tensor de spin de Dirac, y en su parte temporal a la polarización de Michel y Wightman [19], es decir,

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{2i}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right], \qquad (41)$$

$$\Sigma^{\mu 5} = i\gamma^5\gamma^\mu. \qquad (42)$$

Escribamos ahora dicha ecuación en forma Hamiltoniana:

$$i\partial_5\Psi = (\Gamma^5\Gamma^\mu i\partial_\mu + \Gamma^5 M)\Psi. \qquad (43)$$

Reemplazando las Γ por la viejas γ esta ecuación puede reescribirse como

$$-i\partial_5\Psi = (\gamma^5\gamma^\mu i\partial_\mu - i\gamma^5 M)\Psi. \qquad (44)$$

Ahora bien, efectuando la tranformación

$$\tilde{\Psi} = S\Psi, \qquad (45)$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}(I - i\gamma^5), \qquad (46)$$

se obtiene

$$\tilde{\gamma^5\gamma^\mu} = S\gamma^5\gamma^\mu S^{-1} = \gamma^\mu. \qquad (47)$$

Vemos así que nuestra ecuación de Schrödinger se lee en la nueva representación como

$$-i\partial_5\tilde{\Psi} = H\tilde{\Psi}, \qquad (48)$$

con

$$H = (\gamma^\mu i\partial_\mu - i\gamma^5 M), \qquad (p_\mu = i\partial_\mu), \qquad (49)$$

que es la parametrización de Feynman generalizada al caso de la ecuación de Leiter y Szamozi [20], la cual hemos discutido en un trabajo previo [3,21] en relación con la tranformación de Foldy-Wouthuysen covariante [22] y de la cual surge naturalmente la ecuación de segundo orden de Feynman y Gell-Mann [23].

Al igual que en la sección anterior vemos que en el límite de "masa" cero ($M = 0$) es $dS = 0$, por lo que de (35) tenemos

$$x^5 \longmapsto s, \qquad (50)$$

recuperando la parametrización de Feynman de la ecuación de Dirac estándar

$$-i\partial_s\tilde{\Psi}(x^\mu, s) = \gamma^\mu i\partial_\mu\tilde{\Psi}(x^\mu, s). \qquad (51)$$

Esto refuerza la interpretación que en trabajos previos [9] diéramos del parámetro s como el tiempo propio a partir de consideraciones semiclásicas.

Por último, notemos que proyectando la matriz $i\gamma^5$ sobre el subespacio de "energías" positivas ($p^5 = \sqrt{M^2 + p^\mu p_\mu}$) tenemos

$$\Lambda i\gamma^5\Lambda = \frac{M}{p^5}, \qquad (52)$$

donde

$$\Lambda = \frac{1}{2}(I + \frac{H}{p^5}). \qquad (53)$$

Esta ecuación tiene total analogía con la ecuación obtenida proyectando la matriz γ^4 con el proyector de energías positivas ($p^4 = \sqrt{m^2 + p^i p_i}$, $i = 1, 2, 3$) del caso estándar [24]. Es decir,

$$\lambda_+\gamma^4\lambda_+ = \frac{m}{p^4}, \qquad (54)$$

donde

$$\lambda_+ = \frac{1}{2}(I + \frac{H}{p^4}), \qquad H = \gamma^4\gamma^i p_i + \gamma^4 m. \qquad (55)$$

De este modo podemos pensar a $i\gamma^5$ como una generalización 5-dimensional del factor de Lorentz de la relatividad especial. Este hecho fue utilizado por Heitler [25] en el caso estándar para derivar el Hamiltoniano de Dirac en forma heurística.

Referencias

1 -J.P. Aparicio, F.H. Gaioli y E.T. García Alvarez, Anales AFA **4**, 9 (1992).
2 -F.H. Gaioli y E.T. Garcia Alvarez, Anales AFA **5**, 39 (1993).
3 -J.P. Aparicio, F.H. Gaioli y E.T. Garcia Alvarez, Anales AFA **5**, 45 (1993).
4 -R.P. Feynman, Phys. Rev. **84**, 108 (1951). Ver también, S.S. Schweber, Rev. Mod. Phys. **58**, 449 (1986).
5 -La parametrización (1) fue también discutida por Rumpf para estudiar el problema de creación de partículas en un espacio-tiempo curvo. Véase, H. Rumpf, Gen. Rel. Grav. **10**, 509 (1979).
6 -A.O. Barut and W. Thacker, Phys. Rev. D **31**, 1836 (1985).
7 -J.P. Aparicio *et al.*, Anales AFA **2**, 81 (1990); **3**, 46, 51 (1991).
8 -J.P. Aparicio, F.H. Gaioli, and E.T. Garcia Alvarez, Phys. Rev. A **51**, 96 (1995).
9 -J.P. Aparicio, F.H. Gaioli, and E.T. Garcia Alvarez, Phys. Lett. A **200**, 233 (1995).
10-Una revisión del problema de la localización hasta la década del 70 puede encontrarse en A.J. Kálnay, *The Localization Problem*, in "Problems in the Foundations of Physics," ed. M. Bunge (Springer-Verlag, 1971).
11-J.E. Johnson, Phys. Rev. **181**, 1755 (1969).
12-Ver, por ejemplo, L. O'Raifeartaigh, Phys. Rev. Lett. **14**, 575 (1965).
13-Ver, por ejemplo, C. Fronsdal, Rev. Mod. Phys. **37**, 221 (1965).
14-L. Castell, Nuovo Cimento **46**A, 1 (1966).
15-J.J. Aghassi, P. Roman, and R.M. Santilli, J. Math. Phys. **11** (1970) 2297.
16-J.P. Aparicio, F.H. Gaioli, E.T. Garcia Alvarez, and A.J. Kálnay, *Proper time approach to the Localization Problem: A reinterpretation of the Feynman-Bunge covariant position for relativistic spin-*1/2 *systems*, enviado a Phys. Rev. A.
17-Las propiedades (33) de la matriz γ^5 fueron destacadas por W. Pauli en *General Principles of Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, 1980), Sec. 19.
18-Las reglas de conmutación (37) y una ecuación similar a (38) fueron estudiadas originalmente por J.A. De Vos and J. Hilgevoord, Nucl. Phys B **1**, 454 (1967).
19-L. Michel and A.S. Wightman, Phys. Rev. **98**, 1190 (1955). Ver también, K. Rafanelli and R. Schiller, Phys. Rev. **135**, B279 (1964).
20-D. Leiter and G. Szamosi, Lett. Nuovo Cimento **5**, 814 (1972).
21-La aparición de un signo − en la ecuación (49) se debe al cambio de convención para la matriz γ^5 respecto de nuestro trabajo [3]. Allí utilizamos las convenciones de Messiah $\gamma^5 = \gamma^4\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Ver, A. Messiah, *Mécanique Quantique* (Dunod, Paris, 1964), chap. 20.
22-J.E. Johnson and K.K. Chang, Phys. Rev. D**10**, 2421 (1974).
23-R.P. Feynman and M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 193 (1958).
24-J.P. Aparicio, M.A. Castagnino, F.H. Gaioli, E.T. Garcia Alvarez, and A.J. Kálnay, *Positive energy states por the relativistic spin* 1/2 *particle*, enviado a Phys. Rev. A.
25-W. Heitler, *Quantum Theory of Radiation* (Oxford Univ. Press, 1954).

CEILAP
CITEFA - CONICET
ZUFRIATEGUI Y VARELA
1603 - VILLA MARTELLI
REPUBLICA ARGENTINA