

# ESTRUCTURAS ANULARES ESTACIONARIAS EN SISTEMAS REACCIÓN-DIFUSIÓN CON CONDICIONES DE CONTORNO PARCIALMENTE REFLECTIVAS

J. M. Reyes de Rueda, G. Izús\*, O. Ramírez, R. Deza

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Mar del Plata, Deán Funes 3350 (7600) Mar del Plata.*

H. S. Wio\*\*

*División Teoría, Centro Atómico Bariloche (8400) San Carlos de Bariloche*

En una realización con geometría circular de un sistema que modela una inestabilidad electrotérmica (el resistor de balasto), estudiamos la influencia de condiciones de contorno de *albedo* sobre la formación y estabilidad de estructuras estacionarias de no equilibrio. En este trabajo restringimos el análisis a patrones independientes del ángulo acimutal tales que la región central está activada y la exterior desactivada. Se discute además la estabilidad de tales estructuras.

In a realization with circular geometry of a system which models an electrothermal instability (the ballast resistor), we study the influence of *albedo* boundary conditions on the formation and stability of nonequilibrium stationary structures. In this work we restrict the analysis to patterns which are independent of the azimuthal angle and such that the central region is activated and the exterior one is unactivated. The stability of such structures is discussed.

## I. INTRODUCCIÓN

En una serie reciente de trabajos hemos analizado el efecto de condiciones de contorno parcialmente reflectivas o de *albedo* sobre la formación y estabilidad de estructuras estacionarias en dos sistemas modelo unidimensionales del tipo *reacción-difusión* (RD): uno unicomponente (el *resistor de balasto*)<sup>1</sup> y uno bicomponente (el modelo de *Fitz-Hugh-Nagumo*)<sup>2</sup>. En ambos casos, la manera de tener en cuenta el carácter no lineal del término de reacción fue considerarlo una función escalón de Heaviside que se "encendía" cuando el campo apropiado (la temperatura en el primer caso y la concentración del activador en el segundo) sobrepasaba un valor umbral. Esta aproximación hizo posible realizar cálculos analíticos en ambos modelos, dado que (en el caso estacionario unidimensional) éstos se reducían a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias *lineales* a ser resueltas en las regiones donde el campo correspondiente estaba por encima

o por debajo del umbral. La solución global estaba determinada por las condiciones de contorno (objetivo principal de nuestro análisis), por la diferenciabilidad en la frontera entre ambas regiones, y por la condición adicional que el campo correspondiente tomase el valor umbral en dicha frontera. Como la familia de condiciones de albedo interpola continuamente (al variar el parámetro de albedo  $k$ ) entre las totalmente absorbivas de Dirichlet y las totalmente reflectivas de Neumann, pudimos encontrar transiciones en comportamiento (tanto en forma como en estabilidad) entre las estructuras correspondientes a ambos límites.

En este trabajo encaramos la primera extensión de los análisis realizados a sistemas multidimensionales. Los experimentos muestran que bastan dos dimensiones para encontrar una enorme riqueza de estructuras, como las espirales en los sistemas de Belousov-Zhabotinski. Nuestro objetivo inicial, más modesto, son las estructuras anulares en sistemas RD unicomponentes, que sin embargo tienen "per

\*Becario de Perfeccionamiento del CONICET

\*\*Investigador del CONICET

se" un interés experimental (anillos de supercorriente en sistemas sin geometría toroidal).

## II. EL MODELO Y SU ANÁLISIS

El resistor de balasto es un modelo de transferencia térmica en micropuentes superconductores. Consideramos aquí un disco superconductor de radio  $L$  sumergido en un baño térmico (por ej., He líquido) y a través del cual circula (de adentro hacia afuera) una corriente eléctrica  $I$ . Si en alguna región la temperatura está por encima de  $T_c$  habrá una fuente adicional de calor (efecto Joule). Este sistema puede ser modelado por una ecuación RD donde el término de reacción es un escalón de Heaviside en la temperatura. Si tomamos la temperatura del baño como cero y nos desligamos (mediante escaleos apropiados de las variables espaciotemporales) de coeficientes numéricos como el calor específico por unidad de longitud, la conductividad térmica y el coeficiente de transferencia térmica al baño, nos queda la siguiente ecuación:

$$T_\tau(r, \tau) = T_{rr}(r, \tau) + (1/r)T_r(r, \tau) - T(r, \tau) + T_h \theta(T(r, \tau) - T_c), \quad 0 < r < r_L \quad (1)$$

cuyas soluciones estacionarias ( $T_\tau = 0$ ) serán en general combinaciones de funciones de Bessel modificadas. El parámetro  $T_h$  es el cociente entre el calor Joule disipado y el coeficiente de transferencia térmica al baño.

En el caso unidimensional (alambre de material superconductor) se encontró una transición en comportamiento, como función del parámetro de

albedo  $k$ , de un estado en el que las únicas soluciones estacionarias estables son las "calientes" (aquellas en que  $T > T_c$  en todo el alambre) a uno en el que los patrones inhomogéneos (frío-caliente-frío) resultan estables. Ésta ocurría en un valor:<sup>1</sup>

$$k^* = (T_h / T_c - 1) \tanh(y_L)$$

El patrón estacionario que proponemos es este caso es tal que en la región central ( $r < r_c$ ) es  $T > T_c$ , y en la externa es  $T < T_c$ . Suponemos condiciones de albedo en  $r_L$ :

$$(dt/dr)|_{r_L} = -kT(r_L) \quad (2)$$

## III. ESTRUCTURAS ESTACIONARIAS Y SU ESTABILIDAD

La ecuación trascendente  $T(r_c) = T_c$ , como en los casos unidimensionales, debe ser resuelta numéricamente. En la Fig. 1 graficamos el radio crítico  $0 < r_c \leq r_L$  como función del parámetro de albedo  $k$ , en el rango  $0 \leq k \leq 12$  para valores de la relación  $T_c / T_h$  entre 0,15 y 0,5. El resultado es fuertemente reminiscente del obtenido en (1). Por razones metodológicas debimos tomar  $r_L = 2$ ; para cierto valor  $0,3 < k^* < 0,4$  (que dependerá de  $r_L$ ) se produce una transición entre un régimen en el que las estructuras propuestas son inestables a uno en el que -si se toma el mayor  $r_c$ - pueden ser estables. En este caso no es inmediato obtener  $k^*$  analíticamente, como en la Ref.<sup>1</sup> (tampoco es posible echar mano de la analogía mecánica). En la Fig. 2 se grafica  $r_c$  vs.  $k$  para  $0,3 \leq T_c / T_h \leq 0,4$ . Esto permite estimar gráficamente

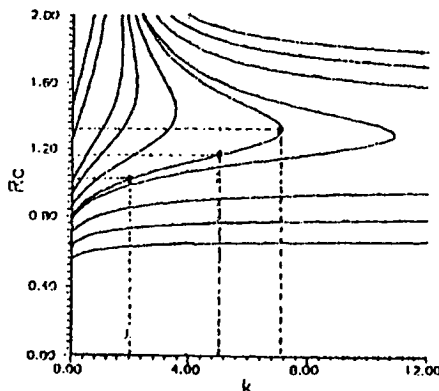


Fig. 1:  $r_c$  vs.  $k$  para valores crecientes de  $T_c / T_h$  entre 0,15 y 0,5. Se observa una transición dinámica similar a la de la Ref. 1.

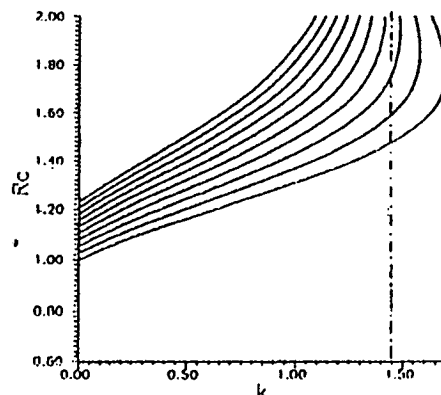


Fig. 2:  $r_c$  vs.  $k$  para valores crecientes de  $T_c / T_h$  entre 0,3 y 0,39. Permite estimar  $k^* = 1,45 \pm 0,05$ .

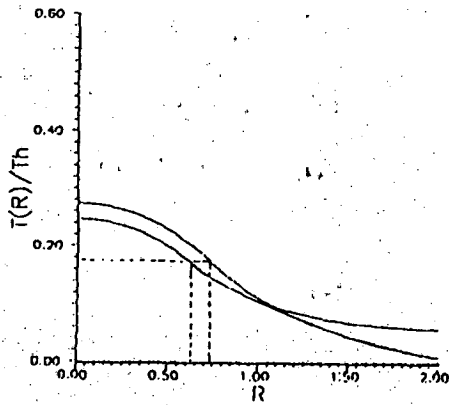


Fig. 3: Estructuras para  $T_c / T_h = 0,175$  y  $k = 0$  ( $r_c = 0,6318$ ), 3 ( $r_c = 0,7461$ ), 3,9 ( $r_c = 2$ ) y 10 ( $r_c = 1,7248$ ). Como se observa, para los dos últimos valores se graficaron sólo las correspondientes a los mayores valores de  $r_c$ .

camente (pero con precisión suficiente)  $k^* = 1,45 \pm 0,05$ . En las Figs. 3 y 4 se puede apreciar la forma típica de las estructuras para dos valores de  $T_c / T_h < 0,3$  y distintos valores de  $k$ . La línea de trazo grueso en la Fig. 4 corresponde al máximo valor de  $k$ . Los resultados del análisis de estabilidad lineal son los esperados de acuerdo a la gran similitud que este caso presenta con el de la Ref.<sup>1</sup>: para  $k < k^*$  las estructuras son inestables; para  $k > k^*$ , las correspondientes a los valores mayores de  $r_c$  (aquellos que están por encima de la línea de estabilidad determinada por los vértices) resultan estables, mientras que para  $r_c$  por debajo de la línea de estabilidad son inestables. La posible relevancia experimental de los patrones hallados se encuentra bajo estudio.

#### IV. CONCLUSIONES

El problema del resistor de balasto con simetría cilíndrica es cualitativamente similar al unidi-

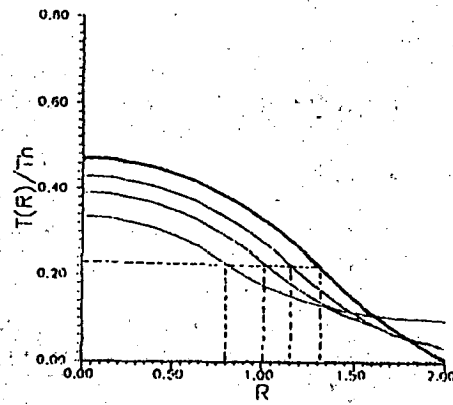


Fig. 4. Estructuras para  $T_c / T_h = 0,23125$  y  $k = 0$  ( $r_c = 0,7998$ ), 2 ( $r_c = 1,0217$ ) y 5 ( $r_c = 1,1654$ ) (para los valores menores de  $r_c$ ) y  $k = 2,32$  ( $r_c = 2$ ) y 5 ( $r_c = 1,5455$ ) para los mayores. La curva de trazo grueso corresponde a  $k = 7,08$  ( $r_c = 1,3217$ ).

mensional simétrico<sup>1</sup>.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado con apoyo parcial del CONICET.

#### REFERENCIAS

1. C. Schat y H. S. Wio, *Physica A* **180**, 295 (1992).
2. H. S. Wio, G. Izús, O. Ramírez, R. Deza y C. Borzi, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**, 4281 (1993).  
H. S. Wio, C. Borzi, G. Izús, O. Ramírez y R. Deza, *Anales AFA* **3**, 60 (1992).