PÉRDIDA DE COHERENCIA EN EL MOVIMIENTO BROWNIANO CUÁNTICO

M. Castagnino[1,2], F. Gaioli[2], F. Lombardo[2]

[1] *Instituto de Astronomía y Física del Espacio, Casilla de Correo 67, Sucursal 28, (1428) Buenos Aires, Argentina.*

[2] *Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, (1428) Buenos Aires, Argentina.*

En este trabajo consideramos una partícula cuántica acoplada linealmente a un entorno compuesto por un conjunto continuo de osciladores armónicos. Resolvemos este problema por medio de una diagonalización exacta del Hamiltoniano, utilizando un método de prolongación analítica para el problema de autovalores. Obtenemos la ecuación maestra para el operador densidad reducido y estudiamos el proceso de pérdida de coherencia, en relación con la transición del período cuántico al período clásico para sistemas abiertos. El aporte esencial de este trabajo está dado por la simplicidad de cálculo que se deriva de la resolución exacta de la ecuación de autovalores. El comportamiento disipativo del sistema es evidenciado por la aparición de autovectores generalizados correspondientes a autovalores complejos del operador hamiltoniano, en el marco de la mecánica cuántica con espacios de Hilbert equipados.

We consider a quantum particle linearly coupled to a general environment composed of a set of harmonic oscillator. We solve the problem by means of an exact diagonalization of the Hamiltonian, using an analytic continuation method for the eigenvalue problem. We obtain the master equation for the reduced density matrix and we study the decoherence process in relationship to the quantum to classical transition for open systems and the measurement problem. The key ingredient of our approach is given by the simplicity of calculations derived from the exact solution of the eigenvalue equation. The dissipative behavior of the system is shown by means of the generalized eigenvectors corresponding to complex eigenvalues of the hamiltonian, in the frame of Rigged Hilbert Spaces Quantum Mechanics.

I. INTRODUCCIÓN

Un gran número de trabajos[1] se han hecho sobre el problema del movimiento Browniano cuántico como ejemplo de un sistema cuántico abierto. El reciente interés en el tema está relacionado con la posible observación de efectos macroscópicos en sistemas cuánticos, procesos de pérdida de coherencia (debidos a la interacción sistema-entorno), disipación y transición cuántico-clásica.

Nuestra motivación es estudiar el carácter irreversible de la evolución de un sistema cuántico (un oscilador armónico) acoplado a un campo (un conjunto continuo de osciladores armónicos), como posible camino hacia el entendimiento de la transición del período cuántico al clásico en cosmología cuántica.

II. EL MODELO

Consideramos una partícula Browniana con masa M y frecuencia Ω. El entorno es un conjunto continuo de osciladores armónicos con masa m y frecuencia ω. La partícula está acoplada linealmente a cada oscilador de una manera tal que el hamiltoniano es[2-3]:

$$H = \Omega\, a^{\dagger} a + \int_0^{\infty} d\omega\, \omega\, b_{\omega}^{\dagger} b_{\omega} + \lambda \int_0^{\infty} d\omega\, g(\omega) \left(a^{\dagger} b_{\omega} + a b_{\omega}^{\dagger} + a^{\dagger} b_{\omega}^{\dagger} + a b_{\omega}\right) + const, \tag{1}$$

donde los operadores $a, a^{\dagger}$, b_{ω} y $b_{\omega}^{\dagger}$ son los operadores de creación y destrucción para la partícula y el campo, respectivamente, y cumplen las reglas de conmutación usuales.

III. DIAGONALIZACIÓN

Encontraremos operadores $\tilde{b}_{\omega}$ y $\tilde{b}_{\omega}^{\dagger}$, funciones analíticas de λ, de manera tal que:

$$H = \int_0^{\infty} d\omega\, \omega\, \tilde{b}_{\omega}^{\dagger} \tilde{b}_{\omega} + const, \tag{2}$$

e-mail: castagnino@iafe.edu.ar - lombardo@dfuba.edu.ar

donde $\tilde{b}_\omega \to b_\omega$ y $\tilde{b}_\omega^{\,\dagger} \to b_\omega^\dagger$, cuando $\lambda \to 0$, y $[\tilde{b}_\omega, \tilde{b}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$.

Para lograr tal fin proponemos:

$$\tilde{b}_\omega = \xi_\omega\, a + \eta_\omega\, a^\dagger + \int_0^\infty d\omega' \left(\Phi_\omega(\omega')\, b_{\omega'} + \Psi_\omega(\omega')\, b_{\omega'}^\dagger\right), \tag{3}$$

y de la misma forma para $\tilde{b}_\omega^{\,\dagger}$.

Por medio de las ecuaciones de Heisenberg podemos calcular los coeficientes de la transformación generada por el *ansatz* (3):

$$\eta_\omega = \frac{\omega - \Omega}{\omega + \Omega}\, \xi_\omega, \tag{4}$$

$$\Psi_\omega(\omega') = \frac{\omega - \omega'}{\omega + \omega'}\, \Phi_\omega(\omega'), \tag{5}$$

donde xi_ω y $\Phi_\omega(\omega')$ están dados por:

$$\Phi_\omega(\omega') = \delta(\omega - \omega') + \frac{2\Omega}{\omega + \Omega}\left(\frac{\lambda\, g(\omega')\, \xi}{\omega - \omega' + i\,\varepsilon}\right) \tag{6}$$

$$\xi = \frac{\lambda\, g(\omega)}{\alpha(\omega + i\,\varepsilon)}, \tag{7}$$

donde la función α es:

$$\alpha(z) = z - \Omega - \frac{4\Omega}{z + \Omega}\, \lambda^2 \int_0^\infty dz'\, \frac{g^2(z')\, z'}{(z - z')\,(z + z')}. \tag{8}$$

Para hacer explícito el comportamiento disipativo del sistema podemos promover a la energía a una variable compleja z, extendiendo analíticamente las funciones que aparecen en la descomposición espectral del hamiltoniano (2). Es necesario entonces, extender la noción de espacio de Hilbert para contemplar los autovectores generalizados correspondientes a autovalores complejos. Esto se logra introduciendo los espacios de Hilbert equipados[4], cuyos detalles técnicos no serán discutidos en este trabajo[5].

Teniendo en cuenta que la función $\alpha(z)$ no es analítica en todo el plano complejo, ya que posee un corte en el eje real positivo, podemos continuar la misma por encima o por debajo del corte. Si deseamos transformar la integral sobre el eje real positivo en la ecuación (2), en una integral a lo largo de una curva compleja Γ, debemos definir la extensión de $\alpha(z)$en todo el plano complejo. De esta forma, debemos pasar a la segunda hoja de Riemann de la función α para evitar el corte, pero debemos dar cuenta de la discontinuidad en el mismo[6].

Entonces, podemos definir una función analítica de z, generalización de (7) como:

$$\alpha_\Gamma(z) = z - \Omega - \frac{4\Omega}{z + \Omega}\lambda^2 \int_\Gamma \frac{|g(z')|^2 z'}{(z - z')(z + z')}\, dz'. \tag{9}$$

La correspondiente extensión analítica a la segunda hoja de Riemann es:

$$\alpha_\Pi(z) = z - \Omega - \frac{4\Omega}{z + \Omega}\lambda^2 \int_\Gamma dz' \frac{|g(z')|^2}{(z - z')(z + z')} + 4i\,\pi\,\Omega\,\lambda^2 \frac{|g(z)|^2}{(z + \Omega)}. \tag{10}$$

La función α_Π tiene un polo z_0 cuya parte real es positiva y la imaginaria negativa. La contribución proveniente del polo (vía integración por residuos), recupera la parte discreta del espectro. Por lo tanto, la descomposición espectral del hamiltoniano es en este caso:

$$H = z_0 \tilde{a}^* \tilde{a} + \int_\Gamma z \tilde{b}_z^*\, \tilde{b}_z\, dz + const, \tag{11}$$

donde la curva Γ pasa por debajo del polo. En este caso, $\tilde{b}_z^* \neq \tilde{b}_z^{\,\dagger}$, y $\tilde{a}^* \neq \tilde{a}^{\,\dagger}$, ya que los coeficientes del *ansatz* (3) son tales que, por ejemplo, $\xi^*(z) = \xi^*(z^*)$.

Entonces, si z_0 es la raíz de (11), encontramos que para $\lambda \ll 1$, podemos aproximar a la misma por:

$$z_0 \approx \Omega + 2\lambda^2 P \int_0^\infty d\omega\, \frac{|g(\omega)|^2}{(\Omega - \omega)(\Omega + \omega)} - i\, 2\, \pi\, \lambda^2\, |g(\Omega)|^2, \tag{12}$$

donde P denota la *parte principal* de la integral, lo cual genera un corrimiento en la energía.

Podemos ver que la parte imaginaria de z_0 es proporcional a la inversa de la vida media del estado inestable, que corresponde al polo.

La descomposición espectral del hamiltoniano, en la base de Fock (generalizada en adecuados espacios de Hilbert equipados[5]), es:

$$H=\sum_n z_0 n \left| n^- \right\rangle\left\langle n^+ \right| +$$

$$\sum_{n(\omega)} \int_0^\infty d\omega\omega\, n(\omega)\left|n(\omega)^-\right\rangle\left\langle n(\omega)^+\right|,$$

donde por simplicidad de cálculo hemos tomado la aproximación en que sólo se crean partículas del campo a una dada frecuencia, o lo que es equivalente, sólo tenemos en cuenta uno de los modos del campo bosónico. Casos más generales serán demostrados en futuros trabajos.

IV. MATRIZ DENSIDAD Y PROCESO DE PÉRDIDA DE COHERENCIA

Objetos macroscópicos y aparatos de medición interactúan normalmente con entornos o baños térmicos, y es esta interacción la que produce la pérdida de coherencia en sistemas cuánticos interactuando con un entorno general.

El objeto que en realidad estamos interesados en estudiar es la matriz densidad reducida, que se obtiene haciendo una traza sobre los estados del campo de la matriz total. Esta matriz densidad reducida ρ_r contiene la evolución del sistema bajo la acción del baño térmico. En la base de número de ocupación del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ del hamiltoniano no perturbado, ρ_r es:

$$\rho_r(t)=\rho_{00}\,|0\rangle\langle 0|+\sum_{n>0}\left(\rho_{0n}U(t)_r^*+\{h.c\}\right)+$$
$$\sum_{n,m}\rho_{nm}\left|U_r(t)\right|^2|n\rangle\langle m|, \tag{14}$$

donde:

$$U_r(t)=\frac{\exp(-i\,n\,z_0\,t)}{n\alpha'(z_0)}\eta^{2n-2}+$$
$$\frac{\lambda^2}{n}\eta_\omega^2\int_0^\infty\frac{d\omega\, e^{-i\omega nt}g^2(\omega)}{\alpha(\omega+i\varepsilon)\alpha(\omega-i\varepsilon)}. \tag{15}$$

La función $g^2(\omega)$ es la llamada "frecuencia espectral". Dando $g^2(\omega)$ y el estado inicial del campo queda definida la relación fluctuación – disipación[3]. En este caso, tenemos $g^2(\omega)=\omega/(\omega^2+\Lambda^2)$, que representa a un entorno óhmico. Calculando $U_r(t)$ a orden λ^2, y para frecuencias ω menores que la frecuencia de corte (cutoff), obtenemos:

$$\rho_r(t)\approx\rho_{00}\,|0\rangle\langle 0|+\sum_{n>0}\rho_{n0}\left(\frac{e^{-in\omega_0 t}\,e^{-n\Gamma t}}{n\alpha'(z_0)}\right.$$
$$\left.\eta^{2n-2}+\frac{\lambda^2}{n^3}\eta_\omega^{2n-2}\frac{1}{\Lambda^2t^2}\right)|n\rangle\langle 0|+\{h.c\}+$$
$$+\sum_n\rho_{nn}\left(\frac{e^{2in\Gamma t}}{n^2\left|\alpha'(z_0)\right|^2}\eta^{4n-4}+\right.$$
$$\left.\frac{e^{in\omega_0 t}\,e^{-n\Gamma t}}{n^4}\left(\eta^*\right)^{2n-2}\eta_\omega^{2n-2}\frac{\lambda^2}{\Lambda^2t^2}+\{h.c\}\right)|n\rangle\langle n|+$$
$$\sum_{n,m}\rho_{nm}\left(\frac{e^{i(n-m)\omega_0 t}\,e^{-(n+m)\Gamma t}}{nm\left|z_0\right|^2}\left(\eta^*\right)^{2m-2}\eta^{2n-2}+\right.$$
$$\frac{e^{im\omega_0 t}\,e^{-m\Gamma t}}{mn^3\alpha'(z_0)}\left(\eta^*\right)^{2m-2}\eta_\omega^{2n-2}\frac{\lambda^2}{\Lambda^2t^2}+$$
$$\left.\frac{e^{-in\omega_0 t}\,e^{-n\Gamma t}}{nm^3\alpha'(z_0)}\eta_\omega^{2n-2}\eta^{2m-2}\frac{\lambda^2}{\Lambda^2t^2}\right)|n\rangle\langle m|, \tag{16}$$

donde Γ es proporcional a la parte imaginaria de z_0.

De la expresión de la matriz reducida podemos ver que para tiempos largos esta matriz se vuelve diagonal, lo que llamamos pérdida de coherencia. Esto implica que las interferencias entre los distintos estados del sistema total se han suprimido[3]. A altas temperaturas, los términos extra-diagonales altas temperaturas, los términos extra-diagonales "caen" en una escala de tiempo del orden de Λ^{-1} (inversa de la frecuencia de cutoff). Para bajas temperaturas, la correlación cae en una escala de tiempo del orden de KT^{-1} (donde K es la constante de Bolztman, y T la temperatura del baño). En el caso de tiempos intermedios podemos ver que el decaimiento se produce a una escala de tiempo dada por la vida media Γ (independientemente de la temperatura del baño), y es esta escala temporal la que se conoce en la literatura como correspondiente al tiempo de memoria del entorno.

REFERENCIAS

1. J. Schiwinger. J. Math. Phys. **2**,407 (1961); Feynman and F. Vernon. Ann. Phys. (NY) **24**, 118 (1963); K. Lindenberg and B. West. Phys. Rev. **A30**, 568 (1984); V. Hakim and V. Ambegoakar. Phys. Rev. **A32**, 423 (1985); F. Haake and R. Reibold. Phys. Rev. **A32**, 2462 (1985).
2. A. Caldeira and A. Leggett. Physica **A121**, 587 (1983).
3. B. Hu, J. Paz, and Y. Zhang. Phys. Rev. **D45**, 2843 (1992).
4. I. Gel'fand and N. Vilenkin. *Generalized Functions* (Academic Press, New York, 1964); A. Bohm, *The Rigged Hilbert Space and Quantum Mechanics* (Springer Verlag, Berlín, 1973).
5. M. Castagnino, F. Gaioli and E. Gunzig. Preprint IAFE (1993); M. Castagnino y F. Gaioli. ANALES AFA, 4 (1992).
6. E. Sudarshan, C. Chiu, and V. Gorini. Phys. Rev. **D18**, 2914 (1978).