POLINOMIOS DE POINCARE PARA MODELOS CP_m NO DIAGONALES

G. Aldazabal, I. Allekotte

Centro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, e Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, 8400 S.C. de Bariloche.*

E. Andrés

Centro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica, e Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, 8400 S.C. de Bariloche.

C. Núñez

Instituto de astronomía y Física del Espacio y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, C.C. 67, suc. 28, 1428 Buenos Aires.

Calculamos los polinomios de Poincaré asociados a modelos de clases laterales $N = 2$ del tipo CP_m relevantes en la copactificación de cuerdas a cuatro dimensiones. Mostramos cómo se calcula el número de generaciones de fermiones que predicen estos modelos de supercuerdas a partir del conocimiento de los polinomios en los sectores "twisted" de la teoría. Desarrollamos el formalismo para tener en cuenta el cociente por simetrías de fase discretas que poseen estos modelos.

Teorías de supercuerdas en 4 dimensiones pueden construirse consistentemente acoplando los grados de libertad espacio-temporales a teorías internas obtenidas como productos tensoriales de teorías superconformes $N = 2$ con carga central total $c_{int} = 9$[1,2]. La supersimetría espacio-temporal se logra usando como proyector la corriente $U(1)$ del álgebra $N = 2$ y manteniendo sólo estados de carga impar. La invariancia modular queda asegurada al incluir sectores retorcidos o "twisted" por la carga $U(1)$.

Esta construcción algebraica puede codificarse en un polinomio de Poincaré que cuenta estados primarios quirales con su respectiva carga $U(1)$. Este polinomio es el objeto crucial para establecer la equivalencia entre estos modelos y la compactificación geométrica de Calabi- Yau.

Las teorías $N = 2$ superconformes con $c_{int} = 9$ más generales que pueden construirse explícitamente están dadas por productos tensoriales de modelos de clases laterales (o "cosets") $N= 2$. En este artículo calculamos los polinomios de Poincaré para modelos de cosets del $N = 2$ tipo $CP_m \equiv SU(m + 1) / SU(m) \times U(1)$, acoplando los sectores derecho e izquierdo de la teoría con invariantes modulares no diagonales[3] tanto para $SU(m + 1)$ como para $SU(m)$. A partir de ellos calculamos el número de generaciones de E_6 para modelos de supercuerdas basados en productos tensoriales de estos cosets. Estos modelos poseen simetrías discretas Z_N y la factorización por estas simetrías puede reducir considerablemente el número de generaciones. Estos "moddings" pueden incluirse en los polinomios de la misma manera que los sectores retorcidos, necesarios para garantizar la invariancia modular.

La función de partición de los modelos de cosets CP_m es de la forma

$$Z = \sum_{\Lambda,\lambda,\bar{\Lambda},\bar{\lambda},\tilde{\Lambda}} x^{N=2}_{\Lambda,\lambda,\tilde{\Lambda}} N_{\Lambda,\bar{\Lambda}} M_{\lambda,\bar{\lambda}} x^{N=2*}_{\bar{\Lambda},\bar{\lambda},\tilde{\Lambda}} \qquad (1)$$

donde $x_{\Lambda,\lambda,\tilde{\Lambda}}$ son los caracteres del álgebra superconforme $N = 2$, Λ , $\lambda = (\hat{\lambda}, q)$ y $\tilde{\Lambda}$ son los pesos de $SU(m + 1)$ a nivel k, de $SU(m) \times U(1)$ a nivel $k + 1$ y de $SO(2m)$ a nivel 1 respectivamente y $N_{\Lambda,\bar{\Lambda}}$ y $M_{\lambda,\bar{\lambda}}$ son invariantes modulares para $SU(m + 1)$ y $SU(m) \times U(1)$. Solo en el caso de $SU(2)$ los invariantes están clasificados completamente. En la ref.3 se incluyó una extensa lista (no exhaustiva) de invariantes para casos más generales.

Los estados primarios quirales de la teoría superconforme $N = 2$ satisfacen la relación $\Delta = \frac{Q}{2}, \left(\bar{\Delta} = \frac{\bar{Q}}{2}\right)$ siendo $\Delta(\bar{\Delta})$ y $Q(\bar{Q})$ el peso conforme y la carga $U(1)$ del álgebra conmutativa bigraduada a la que puede asociarse un polinomio de Poincaré:

$$P(t,\bar{t}) = \sum_{\text{estados quirales}} t^{DQ}\bar{t}^{D\bar{Q}} \qquad (2)$$

siendo D el menor entero tal que DQ sea entero para todos los estados.

Cada modelo de supercuerda cuyo sector interno está compuesto de un producto tensorial de r cosets CP_m estará caracterizado por un polinomio producto:

$$\mathcal{P}(t,\bar{t}) = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{P}_i(t^{D/D_i}, \bar{t}^{D/D_i}) \qquad (4)$$

donde

$$\mathcal{P}_i^{(s)}(t,\bar{t}) = \sum_{estados\ quirales, q_i - \bar{q}_i = sm_i(m_i+1)} t^{DQ_i}\bar{t}^{D\bar{Q}_i} \qquad (5)$$

A partir de los $\mathcal{P}_i^{(s)}(t,\bar{t})$ se pueden obtener los números N_{27} y $N_{\overline{27}}$ de representaciones $27 y \overline{27}$ del grupo de gran unificación E_6 como los coeficientes de $t^D t^D$ y $t^D t^{2D}$ en

$$\mathcal{P}^{sum} = \sum_{s=0}^{D-1} \mathcal{P}^{(s)} \qquad (6)$$

Una fórmula para calcular el número de generaciones fermiónicas $N_{gen} = \left|N_{27} - N_{\overline{27}}\right|$ empleando únicamente polinomios de Poincaré del sector unwisted fue derivada por *E.* Butovic[4], basado en razonamientos de C.Vafa[5].

$$N_{gen} = \frac{1}{2D}\sum_{r,2=0}^{D-1} P_{r,s} \qquad (7)$$

con

$$P_{r,s} = \mathcal{P}(t = e^{2i\pi x/D + i\pi/D}, \bar{t} = e^{-i\pi/D}) \qquad (8)$$

y donde x es el máximo común divisor entre r y s. La suma s incluye todos los sectores retorcidos y la suma sobre r proyecta sobre estados de carga Q entera.

La ecuación (7) puede escribirse en términos de polinomios twisted

$$N_{gen} = \frac{1}{2D}\sum_{r,s=0}^{D-1}\prod_{i=1}^{r} \mathcal{P}_i^{(s)}(t = e^{2i\pi r/D + i\pi/D}, \bar{t} = e^{-i\pi/D}) \qquad (9)$$

lo que resulta útil al considerar modings por simetrías discretas. En efecto, tener en cuenta las simetrías Z_{k+m+1} que poseen los cosets CP_m es equivalente a introducir condiciones de contorno retorcidas. Si caracterizamos un modding (una descripción más detallada de los cálculos involucrados se encuentra en Ref.7) por un vector $\gamma = (\gamma_1; ...; \gamma_r)$ ($\gamma_i M$ entero módulo $(ki + m_i + 1)$) es posible calcular el número de generaciones a partir de los polinomios de twisted. Obtenemos

$$N_{gen} = \frac{1}{2MD}\sum_{R,S=0}^{D}\sum_{x,y=0}^{M} P_{r,y;s,x} \qquad (10)$$

con

$$P_{r,y;s,x} = \prod_{i=1}^{r} (P_i)_{r,y;s,x} =$$

$$= \prod_{i=1}^{r} e^{-2i\pi y\gamma_i^2 x n_i/(k_i+m_i+1)} \mathcal{P}_i^{(s+x\gamma_i)} \qquad (11)$$

$$(t = e^{2i\pi r/D + i\pi/D + 2i\pi y\gamma_i/D}; \bar{t} = e^{-i\pi/D})$$

Hemos analizado todos los modelos de cosets CP_m necesarios para construir teorías de cuerdas $N = 2$ y computamos los estados quirales con un programa que también calcula su carga $U(1)$.

Si N o M son diagonales los polinomios toman la forma

$$\mathcal{P}(t\bar{t}) = \sum N_{\Lambda,\Lambda} M_{\lambda,\lambda} (t\bar{t})^{DQ} \qquad (12)$$

donde la suma solo se extiende sobre estados quirales de la forma $\left(\Lambda = \Lambda, \lambda = \Lambda, \tilde{\Lambda} = 0\right)$. Cuando ambos N y M son no diagonales, $Q \neq Q$ y la forma del polinomio es más compleja, debido a que hay que tener en cuenta las identificaciones de campos[6]. Algunos de estos casos se listan en la Tabla I a modo de ejemplo.

A partir de estos polinomios encontramos equivalencias entre varios modelos que están enumeradas en la Ref.7.

Consideramos 1144 modelos sin moddings, los números de generaciones más frecuentemente obtenidos son cero y múltiplos de 8, 12 y 18, resultados que no difieren sustancialmente de los hallados previamente en la literatura[8,3]. estudiamos también 4813 modelos tomando un sólo modding por modelo, más de la mitad de éstos corresponden a cero número de generaciones. Hemos encontrado también 8, 4, 111 y 260 modelos con N_{gen} = 4, 6, 8 y12 respectivamente. La lista completa de los resultados anteriores se encuentra en la Ref.9.

Modelo	Polinomio de Poincaré
$(2,9)CE$, $(3,4)\ CC$	$\mathcal{P}(t,\bar{t})=1+t^2+t\bar{t}+t\bar{t}^3+\bar{t}^2+(t\bar{t})^2+t^3\bar{t}+(t\bar{t})^3$
$(2,9)EE$	$\mathcal{P}(t,\bar{t})=1+t\bar{t}+5(t\bar{t})^2+4(t\bar{t})^3+5(t\bar{t})^4+(t\bar{t})^5+(t\bar{t})^6$
$(3,8)CC$, $(4,5)CC$	$\mathcal{P}(t,\bar{t})=1+2t+t^2+2\bar{t}+4t\bar{t}+2t^2\bar{t}+\bar{t}^2+2t\bar{t}^2+(t\bar{t})^2$
$(3,8)CE$, EC, EE, $(4,5)EC$	$\mathcal{P}(t,\bar{t})=1+t^2+20t\bar{t}+\bar{t}^2+(t\bar{t})^2$
$(4,7)CC$, CE	$\mathcal{P}(t,\bar{t})=1+4(t\bar{t})^2+t^2\bar{t}^5+8(t\bar{t})^3+8(t\bar{t})^4+t^5\bar{t}^2+4(t\bar{t})^5+(t\bar{t})^7$
$(5,6)CC$	$\mathcal{P}(t,\bar{t})=1+2t^2+t^4+t\bar{t}+2t\bar{t}^3+t\bar{t}^5+2\bar{t}^2+4(t\bar{t})^2+2t^2\bar{t}^4+$ $+2t^3\bar{t}+4(t\bar{t})^3+2t^3\bar{t}^5+\bar{t}^4 2t^4\bar{t}^2+(t\bar{t})^4+t^5\bar{t}+2t^5\bar{t}^3+(t\bar{t})^5$
$(5,6)\tilde{C}C$	$\mathcal{P}(t,\bar{t})=1+t^2+t\bar{t}+t\bar{t}^3+\bar{t}^2+2(t\bar{t})^2+t^2\bar{t}^4+t^3\bar{t}+$ $+2(t\bar{t})^3+t^3\bar{t}^5+t^4\bar{t}^2+(t\bar{t})^4+t^5\bar{t}^3+(t\bar{t})^5$
$(6,7)CC$	$\mathcal{P}(t,\bar{t})=1+3t+3t^2+t^3+3\bar{t}+9t\bar{t}+9t\bar{t}^2+3t\bar{t}^3+3\bar{t}^2+9t^2\bar{t}+$ $+9(t\bar{t})^2+3t^2\bar{t}^3+\bar{t}^3+3t^3\bar{t}+3t^3\bar{t}^2+(t\bar{t})^3$

REFERENCIAS

1. D. Gepner, Nucl. Phys. **B296**, 757 (1987); "Lectores on $N = 2$ strings", Proceedings of the Trieste Spring School 1989, M. Green et al. (eds.), Singapore: World Scientific 1990.
2. Y. Kazama y H. Suzuki, Nucl. Phys. **B 321**, 232 (1989).
3. G. Aldazabal, I. Allekotte, A. Font y C núñez, Int. J. Mod. Phys. **A 7(25)** (1992).
   G. Aldazabal, I. Allekotte, E. Andrés, A. Font y C. Núñez, Anales AFA, vol. 2, (1991).
4. E. Buturovic', Nucl. Phys. **B 352**, 163 (1991).
5. C. Vafa, Mod. Phys. Lett. **A 4**, 1169 (1989).
6. D. Gepner, Phys. Lett. **B 222**, 207 (1989).
7. G. Aldazabal, I. Allekotte, E. Andrés y C. Núñez, "Nondiagonal $C\,P_m$ Coset Models and their Poincaré Polinomials", enviado a publicación.
8. A. Lütken and G. G. Ross, Phys. Lett. **B 213**, 512 (1988);
   M. Linker and R.Schimmrigk, Nucl. Phys. **B 339**, 121 (1990);
   J. Fuchs, A. Klemm, C. Scheich and M. Schmidt, Phys. Lett. **B 232**, 317 (1989);
   Ann. Phys. **204**, 1 (1990);
   A Font, L. Ibañez and F. Quevedo, Phys. Lett. **B 217,** 271 (1989);
   E. Buturovic', Phys. Lett. **B 236**, 277 (1990);
   D. Bailin, D.C. Dunbar and A. Love, Int. J. Mod. Phys. **A 6,**1659 (1991);
   M. Lynker and R. Schimmrigk, Phys. Lett. **B** [illegible], 83 (1991);
   J. Fuchs, A. Klemm and M. Schmidt, Ann. Phys. 214, 221 (1992);
   A. N. Schellekens, Nucl. Phys. **B 366**, 27 (1991)

9.- G. Aldazabal, I. Allekotte, E. Andrés and C. Núñez, Informe Técnico CNEA-CAB 92/033.