

# FORMALISMO NO POLINOMICO PARA EL SISTEMA ACOPLADO SUPERGRAVED $\oplus$ SUPER-YANG - MILLS N=1 D=10

A. Foussats\* C. Repetto\* O.P. Zandron\* y O. Zandron\*

*Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario,  
Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario.*

Se desarrolla el formalismo Hamiltoniano no polinómico de segundo orden para la supergravedad N=1 D=10 acoplada con la teoría supersimétrica de Yang-Mills. Para ello se parte del formalismo geométrico de primer orden construido sobre una variedad con estructura de grupo. Se construye luego el Hamiltoniano del sistema acoplado-generador de evoluciones temporales-, como funcional de los vínculos de primera clase de dicho sistema. Estos vínculos clausuran un álgebra y son los generadores de todas las simetrías de calibre del Hamiltoniano.

## 1. INTRODUCCION

Consideremos una "nueva versión" del formalismo que describe la dinámica del sistema acoplado SUGRA $\oplus$ SYM N=1 D=10 sobre una variedad con estructura de grupo [1,2]. Esta clase de teorías están libres de todo tipo de anomalías (anomalías de calibre y gravitacionales) [3-8]. Esto se logra mediante la introducción del término de Lorentz-Chern-Simons (L-CH-S). En teorías formuladas sobre variedades con estructura de grupo, dicho término se introduce geoméricamente a través del álgebra diferencial libre (ADL) sobre la cual dicha teoría supersimétrica se construye [9,10]. Precisamente, esto se logra cambiando en la densidad Lagrangiana la curvatura generalizada  $\mathcal{H}$  por  $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \gamma_1 \Omega(\omega)$ , donde  $\Omega(\omega)$  es la 3-forma de L-CH-S. Se obtiene así un formalismo polinómico de primer orden que contiene términos no lineales en la curvatura de Riemann  $R^{ab}$ . Como se demostró en [1], las identidades de Bianchi (IB) se pueden resolver en forma cerrada, también en presencia de la 3-forma de L-SCH-S  $\Omega(\omega)$ . La estructura no polinómica de la teoría se obtiene cuando se pasa al formalismo de segundo orden. Como se sabe, esta teoría no polinómica se puede vincular con el sector no masivo de las teorías efectivas de supercuerdas. Este hecho motiva el interés actual de su estudio. En Ref. [2] construimos el formalismo Lagrangiano para la "nueva versión" del sistema SUGRA $\oplus$ SYM N=1 D=10. Análogamente a lo desarrollado en Ref. [10] para la "vieja versión", es posible también

aquí construir el formalismo canónico covariante (FCC) de primer orden. Para los detalles sobre el FCC ver Refs. [11,12]. La diferencia esencial entre ambas versiones de la teoría radica en que en la "vieja versión" la torsión  $R^a$  se anula a nivel lineal ( $\gamma_1 = 0$ ). En la "nueva versión", aún a nivel lineal, la torsión es distinta de cero y por lo tanto tiene lugar el mecanismo de propagación de la torsión y es así como se propaga el campo fotónico a 2-índices introducido mediante el FDA. Esta es una de las razones que hace que la "nueva versión" sea más adecuada para extenderla al caso no lineal en la curvatura de Riemann. El pasaje de la "vieja versión" a la "nueva" se hace mediante una transformación de Weyl sobre los campos. La construcción de la densidad Lagrangiana es muy laboriosa [2]. A partir de ella se pueden obtener los vínculos primarios del sistema y con ellos construir el FCC. Una vez obtenido dicho formalismo de primer orden y deducidas las ecuaciones de movimientos para los campos, se realiza la descomposición espacio-tiempo y se halla el Hamiltoniano del sistema en forma similar a lo realizado en Refs. [13, 14] para otros sistemas supersimétricos más simples. Se puede mostrar que dicho Hamiltoniano se escribe como un funcional del conjunto de vínculos de primera clase, los cuales clausuran el álgebra de los vínculos. Se eliminan los vínculos secundarios del formalismo y se pueden hallar así los corchetes de Dirac entre las componentes de campo. Es posible mostrar que la introducción de los corchetes de Dirac da origen a conmutadores no canónicos los cuales resultan ser no triviales. Se puede ver además la ventaja que representa partir del FCC de primer orden para llevar a cabo el presente programa. En este trabajo vamos a

\* Investigador CONICET

mostrar brevemente los pasos que se deben seguir para obtener los resultados arriba mencionados.

## 2. EL MARCO GEOMETRICO Y EL FORMALISMO CANONICO COVARIANTE

El FCC para el modelo de la supergravedad  $N = 1$   $D = 10$  acoplada a la teoría supersimétrica de Yang-Mills está basado en el ADL descrita por las siguientes curvaturas generalizadas (para definiciones y nomenclaturas ver Ref. [10]) :

$$R^{ab} = \Lambda^{ab} + C^{ab} = d\omega^{ab} - \omega^{ac} \wedge \omega_c^b = 0 \quad (2.1a)$$

$$R^a = \Lambda^a + C^a = dV^a - \omega^{ab} \wedge V_b - (i/2) \xi \wedge \Gamma^a \xi = 0 \quad (2.1b)$$

$$\rho = \Lambda^a + C = d\xi - (1/4) \omega^{ab} \wedge \Gamma_{ab} \xi = 0 \quad (2.1c)$$

$$\mathcal{H} = \Lambda(B) + C(B) = dB - 4\Omega(A) - \gamma_1 \Omega(\omega) - (i/2) e^{\mu\sigma} \xi \wedge \Gamma^a \xi \wedge V_a \quad (2.1d)$$

$$\mathcal{F} = \Lambda(A) + C(A) = dA + A \wedge A. \quad (2.1e)$$

Las tres formas

$$\Omega(A) = \text{Tr}(dA \wedge A + (2/3) g A \wedge A \wedge A) \quad (2.2a)$$

$$\Omega(\omega) = d\omega^{ab} \wedge \omega^{ab} - (2/3) \omega^{ab} \wedge \omega^{ac} \wedge \omega^{cb}, \quad (2.2b)$$

son respectivamente la 3-form de Ch-S del campo de calibre de Yang-Mills  $A$  y la 3-forma de la L-Ch-S. El parámetro  $\gamma_1$  es el adecuado para escribir la conexión spinorial como una serie infinita de dicho parámetro, una vez que la ecuación de torsión (2.1b) fue resuelta y el formalismo de segundo orden fue hallado. Este parámetro es proporcional a la tensión de la cuerda  $\alpha'$  ( $2k/g^2$ ) ( $k$  es la longitud de Planck y  $g$  la constante de acoplamiento de calibre) y se utiliza para escribir las expansiones perturbativas de todas las magnitudes físicas relevantes.

La elección de  $\mu = \dot{1}$  da lugar a la "vieja" for-

mulación que a nivel lineal tiene  $R^a = 0$  [9, 10]. Si elegimos el valor más conveniente  $\mu = 4/3$  [1] se obtiene la siguiente parametrización para la 2-forma torsión:

$$R^a = T_{bc}^a V^b \wedge V^c. \quad (2.3)$$

Todas las cantidades físicas se podrán escribir :

$$A = \overset{0}{A} + \gamma_1 \overset{1}{A} + 0 (\gamma_1^2) \quad (2.4)$$

y esta expansión perturbativa queda garantizada por los resultados obtenidos en Ref. [1]. Entre otros resultados, en Ref.[1] se demuestra que las IB correspondiente al ADL (2.1) se resuelven en forma cerrada aun en presencia del término de L-Ch-S. La solución de la IB es gobernada por una ecuación diferencial no lineal que tiene una estructura

$$T_{abc}^0 = T_{abc}^0 - 2\gamma_1 e^{-4/3\sigma} W_{abc}(T^{abc}, R_{cd}^{ab}, \sigma^{ab}, \sigma^a) \quad (2.5)$$

donde

$$T_{abc}^0 = -3e^{-4/3\sigma} H_{abc} + 4i\tilde{\lambda} \Gamma_{abc} \lambda. \quad (2.6)$$

El funcional  $W_{abc}$  tiene una estructura complicada :

$$W_{abc} = \square T + DT + RT + T^3 + \text{términos fermiónicos}, \quad (2.7)$$

la cual depende del tensor totalmente antisimétrico  $T^{abc}$  (representación irreducible-120),  $R_{cd}^{ab}$  (todas las representaciones irreducibles),  $\sigma^{ab}$  (representación spinorial irreducible -560) y  $\sigma^a$  (representación spinorial irreducible-144).

La ecuación (2.5) relaciona las componentes espacio-tiempo de la torsión  $R_a$  con el tensor de intensidad de campo  $H_{abc}$  (componentes internas de la 3-forma curvatura generalizada  $\mathcal{H}$ ), y ella solamente se puede resolver en forma iterativa debido a la estructura funcional de  $W_{abc}$ . De esta manera se genera la estructura no polinómica de la teoría.

Estos resultados geométricos, provenientes de la solución IB, son independientes de la existencia o

no de un formalismo Lagrangiano o Hamiltoniano. Más aún, la densidad Lagrangiana se debe determinar requiriendo que las ecuaciones de campo derivadas de dicho Lagrangiano conduzcan a la misma solución que las IB. Sin embargo, el formalismo Hamiltoniano es necesario cuando queremos obtener álgebra de los vínculos y los corchetes de Dirac entre los componentes de campo, con vista a implementar la cuantificación canónica de la teoría o la cuantificación mediante el método de la integral de camino.

Brevemente mencionamos los pasos a seguir para construir el formalismo. Se parte de la construcción de la densidad Lagrangiana, la cual será no lineal en la curvatura de Riemann y tendrá la forma [11,12]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= L^{(1)}(\mu, \Lambda) + \gamma_1 L^{(2)}(\mu, \Lambda) + \\ &+ (\Lambda^\Sigma - d\mu^\Sigma) \wedge \beta_\Sigma = \\ &= v + \Lambda^\Sigma \wedge v_\Sigma + (1/2) \Lambda^\Sigma \wedge \Lambda^\Omega \wedge v_{\Sigma\Omega} + \\ &+ (\Lambda^\Sigma - d\mu^\Sigma) \wedge \beta_\Sigma . \end{aligned}$$

luego se introduce la 3-forma  $\Omega(\omega)$  en la densidad Lagrangiana  $L^{(1)}$  reemplazando

$$\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \gamma_1 \Omega(\omega) \quad (2.9)$$

y posteriormente  $L^{(2)}$  se construye completándolo supersimétricamente, considerando todos los posibles términos de peso de escala correctos.

Hecho esto, a partir de la densidad Lagrangiana se calculan los momentos canónicos conjugados  $\pi_\Lambda$  correspondientes a los once campos dinámicos independientes que se introducen en el formalismo de primer orden. Estos momentos nos permiten escribir el conjunto de vínculos  $\Phi_\Lambda$  de la teoría. En este tipo de teorías hemos visto [10,12] que todos los vínculos son primarios y de segunda clase.

El Hamiltoniano total  $H_T$  del FCC de primer orden queda definido por

$$H_T = H_{can} + \Lambda^\Sigma \wedge \Phi_\Sigma , \quad (2.10)$$

donde  $H_{can}$  está dado por :

$$H_{can} d\mu^\Sigma \wedge \pi_\Sigma - \mathcal{L}(\mu, \Lambda) \quad (2.11)$$

y  $\Lambda^\Sigma$  son once multiplicadores de Lagrange ar-

bitrarios. El Hamiltoniano definido en (2.10) es una cantidad dinámica de primera clase en el sentido de Dirac. Las ecuaciones de campo en el FCC se definen mediante :

$$d\Phi_\Sigma = (\Phi_\Sigma, H_T) \approx 0 , \quad (2.12)$$

donde ( , ) son los corchetes entre formas introducidas por Regge [15]. Computando dichos corchetes en (2.12) se hallan las ecuaciones de movimiento, o ecuaciones reonómicas para ciertas curvaturas. En particular la ecuación de movimiento para el campo dinámico 0-forma  $T^{abc}$  nos permite hallar la ecuación reonómica para la curvatura generalizada  $\mathcal{H}$  del FDA (2.1). Es posible ver en [2], que esta ecuación permite reobtener las ecuaciones (2.5) y (2.6) a partir del formalismo Hamiltoniano (o Lagrangiano).

### 3. FORMALISMO DE SEGUNDO ORDEN. ECUACION DE LA TORSION

Como ya dijimos, la ecuación de la torsión juega un importante rol en la teoría pues provee el mecanismo de propagación del campo 2-forma B asociado a la curvatura generalizada  $\mathcal{H}$  del FDA. Por otra parte, a partir de ella se obtiene la solución para la conexión spinorial  $\omega^{ab}$  y esto nos permite pasar al formalismo no polinómico de segundo orden. Se considera la expresión para la 2-forma torsión:

$$\begin{aligned} R^a &= dV^a - \omega^{ab} \wedge V_b - (i/2) \xi \wedge \Gamma^a \xi = \\ &= T^{abc} V_b \wedge V_c \end{aligned} \quad (3.1)$$

A partir de esta ecuación y utilizando la ecuación (2.5) se obtiene la solución para la 1-forma conexión spinorial:

$$\omega_{\mu}^{ab} = \overset{(10)}{\omega}_{\mu}^{ab} + \gamma_1 \Delta_{(1)} \overset{(10)}{\omega}_{\mu}^{ab} + (\gamma_1)^2 \Delta_{(2)} \overset{(10)}{\omega}_{\mu}^{ab} + \dots , \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) a primer orden en el parámetro  $\gamma_1$  se escribe :

$$\begin{aligned} \overset{(10)}{\omega}_{\mu}^{ab} &= W_{\mu}^{ab}(V) - C_{\mu}^{ab}(\xi, T^{abc}) - \\ &- \gamma_1 C_{\mu}^{ab}(T^{abc}, R_{cd}^{ab}, \sigma^{ab}, \sigma^a). \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $W_{\mu}^{ab}$  ( $V$ ) es la 1-forma conexión para la gravitación pura en  $D = 10$ ,

$$C_{\mu}^{ab} = C_{\mu}^{ab(0)} + C_{\mu}^{ab(1)}$$

( $\mu = 0, \dots, 9$ ) son las componentes del tensor de contorsión  $C$ , a cero y primer orden en el parámetro  $\gamma_1$ .

Realizando la descomposición espacio-tiempo (9+1), utilizando el metodo de Amowitt-Deser-Misner en forma análoga a lo realizado en Refs. [13.14] para dimensión  $D = 4$ , e introduciendo las condiciones de metricidad en  $D = 10$  y sobre la hipersuperficie 9-dimensional  $\Sigma$ , resulta la siguiente ecuación:

$$\omega_i^{ab(10)} = \omega_i^{ab(9)} + (n^b L^{aj} - n^a L^{bj}) K_{ij}, \quad (3.4)$$

donde  $K_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, 9$ ) es la curvatura extrínseca de la hipersuperficie  $\Sigma$  en la variedad  $M^{10}$ . Con estos ingredientes matemáticos es posible pasar del FCC de primer orden al formalismo Hamiltoniano de segundo orden en componentes.

#### 4. VINCULOS Y EL HAMILTONIANO COMO GENERADOR DE EVOLUCIONES TEMPORALES

Se parte del análisis de los vínculos primarios de segunda clase  $\Phi$  obtenidos en el FCC. Luego se considera el mapeo inyectivo  $\chi: \Sigma \rightarrow M^{10}$  tal que el "pull-back"  $\chi$  asociado actúa sobre cualquier forma genérica eligiendo  $t = t^0$  y  $dt = 0$ . De esta forma quedan definidas las restricciones a la hipersuperficie  $\Sigma$  de los vínculos  $\Phi_{\Lambda}$  o sea:

$$\psi_{\Lambda} = \chi^* \Phi_{\Lambda} \approx 0 \quad (4.1)$$

Si siguiendo las prescripciones dadas en Refs. [14,2] se consideran a todos los  $\psi_{\Lambda}$  fuertemente nulos excepto para el índice  $\Lambda = a$  (vínculo correspondiente al "zahnbein"). Los vínculos fuertemente nulos permiten usar las ecuaciones de vínculos para resolver para los correspondientes momentos. Una apropiada combinación del vínculo  $\psi_a \approx 0$  nos permite obtener la 9-forma:

$$M_{ab} d^9x \equiv \psi_a \wedge V_b - \psi_b \wedge V_a \approx 0. \quad (4.2)$$

donde los vínculos  $M_{ab}$  son los 45 generadores del

grupo local de Lorentz para todos los campos de la teoría. Aquí se ve como a partir del FCC se obtiene directamente el vínculo  $M_{ab}$  (el cual es de primera clase), como un funcional del vínculo  $\psi_a$ .

El Hamiltoniano  $H$ , generador de evoluciones temporales queda ahora definido por:

$$\int H = \int dx^0 \wedge H. \quad (4.3)$$

Después de largas y tediosas manipulaciones algebraicas, se puede mostrar que la 9-forma  $H$  integrada en la hipersuperficie  $\Sigma$  queda definida por:

$$H = \int \left\{ (1/2) \omega_0^{ab(10)} \mathcal{H}_{ab}(x) + L_0^a \mathcal{H}_a(x) + \xi_0 \mathcal{H}(x) + \mathcal{H}(x) \xi_0 + \text{Tr} [A_0 \mathcal{H}(A)] - 2 B_{0i} \mathcal{H}^i(B) d^9x \right\}, \quad (4.4)$$

donde

$$\mathcal{H}_{ab}(x) d^9x = M_{ab}(x) d^9x \quad (4.5)$$

$$\mathcal{H}_a(x) d^9x = \mathcal{H}'_a(x) d^9x + 2 (T^c_{ab} V^b - \omega^c_a) \wedge \psi_c \quad (4.6)$$

$$\mathcal{H}(x) d^9x = \mathcal{H}'(x) d^9x - (i/2) \xi \Gamma^a \wedge \psi_a \quad (4.7)$$

$$\mathcal{H}^B(A) = (1/2) [\Delta_i \pi^{Bi} - 4 \Delta_i A_j^B \pi^{ij}(B)] \quad (4.8)$$

$$\mathcal{H}^i(B) = 2 \pi^{ij}(B)_{||j} \approx 0. \quad (4.9)$$

Además  $\mathcal{H}'_a(x) d^9x$  y  $\mathcal{H}(x) d^9x$  son respectivamente, la ecuación de Einstein y la ecuación del gravitino proyectadas sobre la superficie  $\Sigma$ . Se puede demostrar, además, que el conjunto de vínculos (4.5)~(4.9) son de primera clase y que ellos clausuran el álgebra de los vínculos.

## REFERENCIAS

- 1) D'Auria, P. Fré, M. Raciti and F. Riva, Int. J of Modern Phys. A3 (1988) 953.
- 2) A. Foussats, C. Repetto, O.P. Zandron and O.S. Zandron: "*Non-Polynomial Supergravities In Second Order Hamiltonian Formalism. Constraint Algebra*". Submitted to Physical Review D (1991).
- 3) S. Cerotti, S. Ferrara, L. Giarardello and M. Porrati, Phys. Lett. B164 (1985) 41.
- 4) S. Cerotti, S. Ferrara, L. Giarardello, A. Pasquinucci and M.Porrati, Phys. Rev. D33 (1986) 2504.
- 5) L. Castellani, R.D' Auria and P.Fré, Phys. Lett. B196 (1987) 349.
- 6) R.D' Auria and P.Fré, Modern Physics Lett.A3 (1988) 673.
- 7) R. D' Auria and P.Fré, Phys. Lett 200B (1988) 63.
- 8) M. Raciti, F. Riva and D. Zanon, Phys. Lett. 227B(1989) 49.
- 9) S.Ferrara, P.Fré and M. Porrati, Ann. of Phys. (NY) 175 (1987) 112
- 10) A. Foussats and O. Zandron, Ann. of Phys. (NY) 191 (1989) 312
- 11) A. Foussats and O. Zandron, Anales AFA, Vol1, 65 (1989)
- 12) A. Foussats and O. Zandron, Int. J. of Modern Phys. A5 (1990) 725.
- 13) A. Foussats and O. Zandron, Ann. of Phys (NY) 203 (1990) 207.
- 14) A. Foussats and O. Zandron, Physical Review D43 N 4 (1991).
- 15) A. D'Adda, J.E.Nelson and T Regge, Ann. of Phys. (NY) 165 (1985) 384; J.E. Nelson and T Regge, Ann. of Phys. (NY) 166 (1986) 234.
- 16) A. Foussats and O. Zandron Anales AFA, vol 2, 84 (1990).