CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DEL MODO BKW EN LA ECUACION DE BOLTZMANN EXTENDIDA

G.R.Garibotti*, W.R.Cravero y M.L.Martiarena***

División Colisiones Atómicas, Centro Atómico Bariloche, 8400 S.C.de Bariloche.

En este trabajo se considera un sistema gaseoso en el que las partículas interactúan mediante colisiones elásticas y existen además procesos de remoción de partículas. Se derivan las condiciones que tal sistema debe cumplir para que exista una solución exacta de la Ecuación de Boltzmann Extendida, correspondiente al modo BKW.

La Ecuación de Boltzmann no lineal (EBNL) describe la evolución al equilibrio de la distribución de velocidades f(x,v,t) de un gas diluido, en el que las partículas interactúan a través de colisiones binarias elásticas. Hace algunos años, Krok y Wu[1], e independientemente Bobylev[2], hallaron una solución analítica exacta (modo BKW) para esta ecuación, válida para sistemas espacialmente homogéneos y modelo de moléculas de Maxwell. En este modelo la sección eficaz de colisión tiene la forma:

$$\sigma\ (b,\chi) = K\ \varphi\ (\chi)\ /\ g \qquad (1)$$

donde b es el parámetro de impacto, χ es el ángulo de deflexión y g es la velocidad relativa de las partículas antes de la colisión.

Para una sola especie gaseosa el modo BKW es:

$$f(v,t) = (2\pi\alpha_a)^{-3/2} \exp(-v^2/2\alpha_a)\ . \left(P(t) + v^2\ Q(t) \right) \qquad (2)$$

donde α_a, P_a y Q_a son funciones del tiempo. En el caso de N componentes puede hallarse una solución correspondiente al modo BKW, si se impone la condición adicional de que todas las especies tengan igual energía cinética media. En tal caso la solución correspondiente a la especie *a* se escribe:

$$f_a(v,t) = (2\pi\alpha_a)^{-3/2} \exp(-v^2/2\alpha_a)\ . \left(P_a(t) + v^2\ Q_a(t) \right) \qquad (3)$$

donde α_a, P_a y Q_a son funciones del tiempo solamente.

Sin embargo tal solución existe si ciertos parámetros que describen el sistema cumplen determinadas relaciones[3]. Sea n_a la densidad de partículas de la especie *a*, m_a la masa de las partículas *a* y K^s_{ab} la frecuencia de colisión entre dos partículas de especies *a* y *b*. Si definimos los siguientes parámetros:

$$\lambda_{ab} = n_a\ K^s_{ab}\ /\ (n_a + n_b)\tilde{K} \qquad (4)$$

$$\mu = 4m_1m_2\ /\ (m_1 + m_2)^2 \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \lambda_{22} - \lambda_{21}\ \mu\ (3 - 2\mu) \\ p_2 &= \lambda_{11} - \lambda_{12}\ \mu\ (3 - 2\mu) \end{aligned} \qquad (6)$$

la condición que debe ser satisfecha para todo tiempo resulta ser:

$$(p_1 - p_2) \left(2\mu^2 \left(\frac{\lambda_{21}}{p_1} + \frac{\lambda_{12}}{p_2} \right) - 1 \right) = 0 \qquad (7)$$

En años recientes, la EBNL ha sido extendida4 (EBNLE) de modo de considerar una mezcla gaseosa en la que tienen lugar no solo interacciones elásticas sino también procesos de creación y remoción de partículas, lo que permite el uso de la EBNL en problemas de cinética química, física de reactores nucleares,etc., donde el número de partículas no se conserva. Varios esquemas han sido propuestos para hallar soluciones de la EBNLE, especialmente para modelos de moléculas de Maxwell[5,6].

Consideremos el caso de dos especies gaseosas en las que hay procesos de colisión elásticos y de remoción de partículas. En este caso la EBNLE se escribe:

\# Investigador CONICET

* Becario CONICET

$$\frac{\partial}{\partial t} f_a(v,t) = \sum_b \int dw \int dn\, K^s_{ba} \,.$$
$$.\left(f_a(v') f_b(w') - f_a(v) f_b(w) \right) - \tag{8}$$
$$- \sum_b \int dw \int dn\, K^r_{ba} f_a(v) f_b(w)$$

donde K^r_{ba} es la frecuencia de destrucción de una partícula *a* en una colisión *a-b*.

Proponemos para la distribución de velocidades la siguiente forma:

$$f_a(v,t) = n_a(t)\, g_a(v,t) \tag{9}$$

de manera que

$$\int f_a(v,t)\, dv = n_a(t) \Rightarrow \int g_a(v,t)\, dv = 1 \tag{10}$$

Si reemplazamos la ec.(9) en la ec.(8) e integramos la ecuación resultante en la variable v, obtenemos una ecuación de evolución para las densidades,

$$\frac{d}{dt} n_a = \sum_b K^r_{ba} n_a n_b \tag{11}$$

que puede ser resuelta en forma cerrada sin necesidad de resolver la EBNLE.

Asimismo se obtiene la ecuación que determina la evolución de $g_a(v,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_a(v,t) = \sum_b n_b(t) \int dw \int dn\, K^s_{ba} \,. \tag{12}$$
$$. \left(g_a(v') g_b(w') - g_a(v) g_b(w) \right)$$

Adoptamos para $g_a(v,t)$ la siguiente forma, equivalente a la propuesta para el caso sin remoción discutido antes:

$$g_a(v,t) = (2\pi\alpha_a)^{-3/2} \exp(-v^2/2\alpha_a) \,. \tag{13}$$
$$. \left(P_a(t) + v^2 Q_a(t) \right)$$

Análogamente a lo hecho por Krook y Wu, supondremos que ambas especies gaseosas poseen igual energía cinética media, de modo que

$$m_a \alpha_a(t) = m_b \alpha_b(t) = \zeta(t) \tag{14}$$

Definimos

$$R_a(t) = Q_a(t)\, \zeta(t) / m_a \tag{15}$$

La conservación del número de partículas y de la energía impone

$$P_a + 3 R_a = 1 \quad (a=1,2)$$

$$\zeta(t) \sum_a n_a(t) \left(P_a + 5 R_a \right) = \tag{16}$$
$$= (n_1 + n_2) K_b T$$

donde K_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura del sistema.

Cuando se sustituye la expresión (13) en la ec.12, las integrales que contiene el segundo miembro se pueden efectuar explícitamente, y se obtiene una ecuación para cada especie que consiste en una igualdad de expresiones cuadráticas en v^2. Igualando los coeficientes de iguales potencias de v^2, resulta un sistema de seis ecuaciones diferenciales no lineales para las 5 funciones incógnitas ζ (t), $P_a(t)$ y $Q_a(t)$.

En consecuencia es posible encontrar soluciones de este sistema en tanto sea compatible. Las nuevas condiciones de compatibilidad que encontramos para este caso, en que tenemos procesos de remoción de partículas además de colisiones elásticas, resultan ser:

$$- \frac{K_{11}{}^r}{6} - K^r_{11} + K^r_{12} +$$
$$+ \frac{K^s_{21}\, \mu^2\, S_2}{3\, S_1} + \frac{K^s_{12}\, \mu}{2} = 0$$

$$- \frac{K_{22}{}^r}{6} - K^r_{22} + K^r_{21} + \tag{17}$$
$$+ \frac{K^s_{12}\, \mu^2\, S_1}{3\, S_2} + \frac{K^s_{21}\, \mu}{2} = 0$$

donde

$$S_A = K^s_{aa} - K^s_{ab}\, \mu(3 - 2\mu) \tag{18}$$

Notamos que las relaciones de la ec.(17) no involucran las densidades, cuya evolución está regida por la ec.(11), sino que se trata de una relación entre las frecuencias de colisión para los procesos elásticos y de remoción. Es posible además recuperar las condiciones originales de Krook y Wu, ec.(7), si elegimos frecuencias de remoción nulas.

Una vez establecidas las condiciones que debe satisfacer el sistema para tener un modo BKW de evolución al equilibrio, estamos en condiciones de derivar la solución. En efecto, del sistema de ecuaciones diferenciales mencionado anteriormente surge que

$$R_2(t) = \frac{n_1(t)\ S_2}{n_2(t)\ S_1} R_1(t) \qquad (19)$$

La solución para $R_1(t)$ se escribe

$$R_1(t) = \left(-\exp\left(-\int_0^1 (B\ n_1 + C\ n_2) \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_0^1 A n_1 \exp\left(\int_0^1 (Bn_1 + Cn_2)\, dt \right) dt + K \right) \right)^{-1} \qquad (20)$$

donde

$$A = -\frac{2}{3}\pi \left(K_{11} + \mu(3-2\mu) \frac{S_2}{S_1} K_{21}^s \right)$$

$$B = \frac{2}{3}\pi \left(- K_{11}^s + \mu^2 \frac{S_2}{S_1} K_{21}^s \right)$$

$$C = -2\pi\ \mu\ K_{21}^s \qquad (21)$$

Con las ecuaciones (19) y (20) y las ecuaciones de conservación, ec.(16), puede ser escrita la solución completa para la función de distribución $f_a(v,t)$, correspondiente al modo BKW. La única restricción para esto será que las frecuencias de colisión cumplan la ecuación (17), y que el sistema de ecuaciones que rige la evolución de las densidades,ec. (11), pueda ser resuelto en forma explícita.

REFERENCIAS

1. M.Krook y T.T.Wu, Phys.Rev.Lett. **36** (1976) 1107.
2. A.V.Bobylev, Sov. Phys. Dokl.**20** (1976) 820.
3. M.Krook y T.T.Wu, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 991.
4. V.C.Boffi y G.Spiga, Phys. Rev. **A29** (1984) 782.
5. M.L.Martiarena y C.R.Garibotti, Physica **A166** (1990) 115.
6. W.R.Cravero, D.H.Zanette y C.R.Garibotti, en: *Rarefied Gas Dynamics*, Alfred E.Beylich eds. (VCH, Weinheim, 1991).