FORMALISMO BRST PARA LA MECANICA CLASICA: ESPACIOS DE ORBITAS CON VINCULOS

G. Mana y R. Montemayor*

Centro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica e Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, 8400 San Carlos de Bariloche.

En este trabajo desarrollamos un formalismo BRST para la dinámica clásica. Una característica de este enfoque es que junto con la evolución de los grados de libertad del sistema explicita también la de los campos de Jacobi correspondientes. A partir de este formalismo se construye un esquema operatorial, en el cual el hamiltoniano es un operador de Fokker-Planck en un espacio ampliado con variables de Grassman. Una aplicación física de esta extensión formal se relaciona con la determinación de los exponentes de Lyapunov para sistemas no deterministas.

I. INTRODUCCION

Existen múltiples ejemplos que muestran la conveniencia de plantear un sistema físico en un espacio más amplio que el definido por sus grados de libertad. Entre ellos podemos mencionar la formulación canónica de la dinámica en un espacio fase o la descripción covariante de teorías de calibre. Otro ejemplo reciente y tal vez menos conocido es la descripción de la mecánica clásica por medio de integrales funcionales.

Una característica muy interesante de esta teoría es la aparición de una simetría BRST que permite relacionar características topológicas con información dinámica relevante [1].

El resultado anterior es el motivo por el cual en este trabajo nos proponemos reformular directamente a la mecánica clásica como una teoría BRST. En la Sección II vamos a considerar la dinámica descrita por un sistema de ecuaciones de movimiento de primer orden

$$\phi_a (x^b, \dot{x}^b) = \dot{x}^a - f^a (x^b) = 0 \quad a = 1,...,d \tag{1}$$

definidas en un espacio M, y las trataremos como relaciones de vínculo sobre el espacio de órbitas. Desde esta perspectiva aplicamos el formalismo *BRST* para replantear la dinámica en un espacio extendido. En ella se manifiestan ahora a igual nivel la evolución de los grados de libertad del sistema y de los campos de Jacobi correspondientes. La teoría resultante posee, por construcción, una simetría *BRST*. El hamiltoniano extendido es el paréntesis de Poisson de la carga BRST (conservada) y una carga fermiónica relacionada con la anti-*BRST*. Sólo cuando el espacio M es una variedad simpléctica ambas cargas son conjugadas y la teoría es supersimétrica.

En la Sección III, a partir de este formalismo clásico extendido efectuamos una "cuantización canónica", donde el operador hamiltoniano resulta identificado con el operador de difusión de la teoría original. En este sentido el formalismo *BRST* es una generalización de la versión de Liouville de la mecánica clásica, donde el hamiltoniano "cuántico" *BRST* toma el rol de un operador de Liouville. En particular, cuando M es una variedad de Riemann dicho hamiltoniano está íntimamente relacionado con el operador de Fokker-Planck, donde la matriz de difusión se identifica con el tensor métrico del espacio, g^{ab}.

II. FORMALISMO BRST LAGRANGIANO

M contiene todas las órbitas posibles para un conjunto dado de grados de libertad, que podemos considerar como correspondientes a una teoría de calibre (trivial). Las simetrías que definen esta teoría son el conjunto completo de transformaciones puntuales locales en dicho espacio. La dinámica para un sistema clásico en particular está representada por un conjunto de órbitas en la variedad M que satisfacen ciertas ecuaciones, y en este sentido se puede interpretar como una fijación de calibre de la teoría trivial mencionada anteriormente.

En primer lugar es necesario construir un lagrangiano que incorpore la fijación de calibre que define una dinámica particular, o sea a las "relaciones de vínculo" (1).
Considerando a las ecuaciones de movimiento del sistema

* Investigador CONICET

$$\phi^a(x,\dot{x}) = 0 \;, \quad \det\left[\frac{\partial \phi_a}{\partial \dot{x}^b}\right] \neq 0 \;, \; a=1,\ldots,d, \qquad (2)$$

como las relaciones de vínculo que definen las órbitas, podemos incorporarlas a una formulación variacional introduciendo d coordenadas de Stückelberg auxiliares. Así el sistema queda descrito por el lagrangiano

$$L = b_a\, \phi^a - 1/2\; b_a\, g^{ab}\, b_b \;; \qquad (3)$$

el significado del tensor simétrico regular g^{ab} será evidente más adelante.

La extensión *BRST* que corresponde al lagrangiano (3) es:

$$\begin{aligned} L &= b_a\,(\dot{x}^a - f^a) - \\ &- 1/2\; b_a\, g^{ag}\, b_b - \bar{c}_a\, \dot{c}^a + \bar{c}_a f^a_{;b}\, c^b \;, \end{aligned} \qquad (4)$$

donde $f_{;b}{}^a$ es la derivada covariante del campo vectorial f^a, y c^a y $\mathbf{c}_a$ son variables de Grassman con número fantasma opuesto. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\dot{x}_a = f^a + g^{ab}\, b_b \qquad \dot{b}_a = -b_b\, f^b_{;a}$$
$$\dot{c}^a = f^a_{;b}\, c^b \qquad \bar{c}_a = f^b_{;a}\, \bar{c}_b \;.$$

En particular, las ecuaciones de movimiento para c^a coinciden con las ecuaciones correspondientes para los campos de Jacobi de $x^a(t)$.

Las transformaciones *BRST* que dejan invariantes a este conjunto de ecuaciones son:

$$\delta x^a = c^a \;, \quad \delta c^a = 0$$
$$\delta \bar{c}_a = b_a \;, \quad \delta b_a = 0 \;.$$

Se pueden distinguir dos sectores de soluciones:

$$b_a = 0 \;, \qquad \phi^a = 0$$
$$b_a \neq 0 \;, \qquad b_a = g_{ab}\, \phi_b$$

Si consideramos el sector bosónico de esta teoría, es inmediato verificar que las soluciones del primer sector coinciden con las de la teoría original (1), mientras que las soluciones del segundo sector las contienen [2]. En el primer sector la carga *BRST* es nula, mientras que en el segundo sector tenemos $Q = b_a c^a$. En este último sector podemos desarrollar un formalismo *BRST* no trivial, donde las condiciones de borde invariantes *BRST* aseguran que el sector bosónico corresponde efectivamente a la dinámica definida por (1).

III. EL FORMALISMO CANONICO Y SU VERSION OPERATORIAL

De la ecuación de movimiento que proviene de la derivada lagrangiana con respecto a b_a podemos explicitar algebraicamente esta variable y por lo tanto eliminarla del lagrangiano [3]. Los momentos canónicos para las variables restantes son:

$$p_a = g_{ab}\, \phi^b \;, \; \bar{\pi}_a = \bar{c}_a \;, \; \pi_a = 0 \;. \qquad (5)$$

Las dos últimas ecuaciones dan lugar a vínculos de segunda clase y como resultado de ello tenemos finalmente el hamiltoniano de Dirac [3]:

$$\begin{aligned} H_{BRST} &= 1/2\; g^{ab} p_a p_b + \\ &+ p_a f^a + c^b \,.\, f^a_{;b}\, \bar{c}_a \end{aligned} \qquad (6)$$

Realizando una "cuantización canónica" de esta teoría

$$p_a \rightarrow -D_a \quad , \quad \bar{\pi}_a \rightarrow \frac{\partial}{\partial c^a}, \qquad (7)$$

donde D_a es la derivada covariante, el operador hamiltoniano resultante es:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{BRST} &= 1/2\; g^{ab}\, D_a\, D_b - D_a f^a + \\ & c^b\,(D_b f^a)\, \frac{\partial}{\partial c^a} + \alpha f^a_{;a} \;. \end{aligned} \qquad (8)$$

α parametriza la dependencia en el orden adoptado al construir el operador. Si lo elegimos tal que $\alpha = 0$, este hamiltoniano corresponde al operador de Fokker-Planck supersimétrico [5], con la matriz de difusión dada por la métrica g^{ab} asignada a M.

Para hacer explícita la estructura *BRST* subyacente podemos escribir este operador en términos de la carga *BRST*, $Q = p_a c^a$, y una carga fermiónica no conservada, **Q**, relacionada con la carga anti-*BRST* $\mathbf{Q} = p_a g^{ab} c_b$:

$$\mathbf{Q} = \bar{c}_a(g^{ab} p_b + 2f^a) = \bar{Q} + 2\{V,\bar{Q}\} \;, \qquad (9)$$

y así tenemos:

Q es el generador de las transformaciones siguien-

$$H_{BRST} = -\frac{1}{2}\{Q,Q\}\,. \tag{10}$$

tes:

$$\begin{aligned}
\delta x^a &= \{Q,x^a\} = g^{ab}\bar{c}\,,\\
\delta \bar{c}_a &= \{Q,\bar{c}_a\} = 0\,,\\
\delta c^a &= \{Q,c^a\} = g^{ab}p_b\,,\\
\delta p_a &= \{Q,p_a\} = 2i\bar{c}_b\, f^b_a
\end{aligned}$$

En general no es una carga nilpotente:

$$\{Q,Q\} = 4\bar{\pi}_a\bar{\pi}_b g^{bc} f^a_{;c} \tag{11}$$

y por lo tanto no se conserva:

$$\dot{Q} = \{H_{BRST},Q\} = \tag{12}$$
$$= g^{bc}\left[\bar{\pi}_a\bar{\pi}_b\, c^d f^a_{;c;d} + f^a_{;c}(\bar{\pi}_a p_b - \bar{\pi}_b p_a)\right].$$

Sólo es una constante de movimiento, y generador de simetrías, cuando $f^a = g^{ab}\, V_{;b}$. Para tener un hamiltoniano supersimétrico es necesario satisfacer una condición aún más restrictiva: el sistema debe ser determinista, o sea M debe ser una variedad simpléctica en lugar de serlo de Riemann.

IV. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos con este formalismo coinciden con la extensión formal de la descripción de procesos estocásticos por medio de la introducción de variables tipo Grassman.

Como un ejemplo de su aplicación podemos mencionar la relación entre los autovalores del estado base en los sectores con distinto número de Grassman y los exponentes de Lyapunov[4,5]. En otro trabajo desarrollamos en particular el caso de sistemas deterministas y encontramos las cotas que resultan para los exponentes de Lyapunov a partir de la dimensión de los subespacios del estado base con diferente número de Grassman[6].

REFERENCIAS

[1] E. Gozzi, Phys. Lett. B**201**, 525 (1988); E. Gozzi and M. Reuter, Phys. Rev. D **40**, 3363 (1989).

[2] L. Lusanna, J. Math. Phys. **31**, 428 (1990).

[3] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics* (Lecture Notes in Physics **169**, Springer Verlag, 1982).

[4] A. J.Lichtenberg and M.A. Lieberman, *Regular and stochastic motion* (Springer-Verlag, New York, 1983).

[5] R. Graham, Phys. Lett. A**109**, 436 (1985); R. Graham, Europhys. Lett. 5, 101 (1988).

[6] G. Mana y R. Montemayor, (*Integrales funcionales, números de Betti y exponentes de Lyapunov en la mecánica hamiltoniana*, Congreso AFA 1991, enviado para publicación) Anales AFA **3**, (1991).