

# ENFOQUE GEOMETRICO PARA OBTENER LA VISIBILIDAD. SU RELACION CON EL TEOREMA DE VAN CITTERT-ZERNIKE

H.J.Rabal\*, N.Bolognini\*

*Centro de Investigaciones Opticas, Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires y CONICET, C.C. 124, 1900 La Plata.*

El teorema de Van Cittert-Zernike proporciona una descripción adecuada de la distribución de coherencia generada por una fuente arbitraria. A partir de dos fuentes puntuales incoherentes y mediante una experiencia de Young, se obtiene la visibilidad del sistema en un plano arbitrario. El enfoque didáctico empleado permite reproducir la expresión de la visibilidad como surge del teorema de Van Cittert-Zernike.

## INTRODUCCION

Para describir adecuadamente la coherencia parcial que existe entre dos puntos espacio-temporales de un frente de onda producido por una fuente extensa policromática, es necesario medir la correlación que existe entre las vibraciones del campo en dichos puntos. La medida de dicha correlación está íntimamente relacionada con el diagrama de interferencia y difracción producido al combinar las vibraciones de ambos puntos.

El cálculo del grado de coherencia y la intensidad mutua (que reemplaza a la función de coherencia mutua cuando la fuente finita es cuasimonocromática) conduce al teorema de Van Cittert-Zernike, de gran utilidad en la teoría de coherencia parcial. Este teorema establece que el grado de coherencia complejo que describe la correlación de las vibraciones en un punto fijo  $P_2$  y un punto variable  $P_1$  en un plano iluminado por una fuente cuasimonocromática, extensa e incoherente, es igual al valor de la amplitud compleja normalizada en un punto  $P_1$  de una figura de difracción. Dicha figura se obtiene al reemplazar la fuente por una apertura difractante idéntica a ella en tamaño y forma y al iluminarla con una onda esférica convergente en  $P_2$ , cuya distribución de amplitud se corresponde punto a punto con la de la fuente.

Si las dimensiones lineales de la fuente y las distancias entre  $P_1$  y  $P_2$  son pequeñas comparadas con la distancia de estos puntos a la fuente, el módulo del grado de coherencia es igual al valor absoluto de la transformada de Fourier normalizada de la función distribución de intensidad de la fuente.

Debe remarcarse que la teoría de la coherencia parcial opera con cantidades medibles, correlaciones e intensidades y se vale del concepto auxiliar de visibilidad de un sistema de franjas de interferencia.

En este sentido, se propone en este trabajo mediante un enfoque de óptica geométrica paraxial, entender el significado de coherencia en términos de la visibilidad de sistemas de franjas. Para ello se pone énfasis en que la aparición de franjas se debe a la superposición en consonancia de múltiples sistemas debidos a distintos elementos de la fuente que son incoherentes entre sí. Se describen el caso de dos fuentes puntuales cuasimonocromáticas y la extensión al caso de una distribución continua.

Finalmente, cabe remarcar la naturaleza de una fuente cuasimonocromática. En este caso, el retraso temporal  $T$  que interviene tanto en la correlación entre dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  del frente de onda, como en la interferencia de dos haces que se originen en ellos, puede despreciarse.

Esto es así, porque  $T$  es mucho menor que  $1/f$ , siendo  $f$  el contenido espectral de la fuente.

## DESARROLLO OPERATIVO

### 1.- DOS FUENTES PUNTUALES INCOHERENTES

En la figura 1, A y B en el plano  $\Pi$  representan dos fuentes muy lejanas, puntuales, cuasimonocromáticas e incoherentes entre sí, separadas una distancia  $X'_0$ . Poseen la misma irradiancia y su longitud de onda es  $\lambda$ . los orificios  $P_1$  y  $P_2$ , separados una distancia  $d$ , tienen dimensión despreciable tal que la distribución luminosa que resulte en el plano  $\Pi$  no representa variaciones

\* Investigador CONICET

debido a la difracción en ellos.

La lente L de distancia focal  $f_0$  conjuga los planos  $\Pi'$  y  $\Pi$ . Además, la distancia  $Z'$  es mucho mayor que las dimensiones transversales involucradas y la distancia  $Z \approx f_0$ . Así, para cada fuente cuasi-monocromática, se corresponde en el plano  $\Pi$  la distribución luminosa de una experiencia de Young.

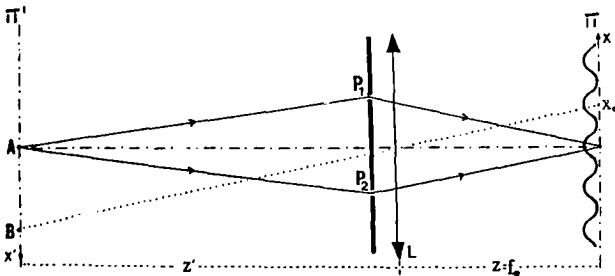


Figura 1: Esquema experimental

Las distribuciones de intensidad  $I_A$  e  $I_B$  en el plano  $\Pi$  debidas a las fuentes A y B se pueden describir respectivamente, según:

$$I_A(x) = I_0 \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{f_0} x \right]$$

$$I_B(x) = I_0 \cos^2 \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{f_0} (x - x_0) \right]$$

donde  $x_0 = f_0/Z'$

Como las fuentes son incoherentes, la intensidad total será:

$$I(x) = I_A(x) + I_B(x)$$

Si  $w_x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{f_0}$

resulta

$$I(x) = I_0 \{ 1 + \cos [w_x (2x - x_0)] \cos w_x x_0 \}$$

y la visibilidad V resulta:

$$V = \frac{I_{MAX} - I_{MIN}}{I_{MAX} + I_{MIN}} = | \cos w_x x_0 | =$$

$$= \left| \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X'_0}{Z'} d \right|$$

Es decir, la visibilidad depende de la separación entre  $P_1$  y  $P_2$  (puntos que se correlacionan en el teorema de Van Cittert-Zernike) así como de la relación  $X'_0 / Z'$ . Así, por ejemplo, imponiendo un desfase de  $2\pi$  (o múltiplos) entre los sistemas de franjas, coincidirán y habrá visibilidad máxima. En general, cada desfase tendrá asociado un valor particular de la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$ . Es evidente que la medida del grado de coherencia espacial, o sea la visibilidad, tiene la misma geometría que las franjas de Young.

## 2. DISTRIBUCION CONTINUA $I(x')$

En el caso de N fuentes puntuales discretas de irradiancia  $I_i$  ubicadas en los puntos  $X'_i$ , la distribución de intensidad en el plano  $\Pi$  resulta:

$$I(x) = \sum_{i=1}^N I_i \cos^2 w_x \left( x \frac{Z}{Z'} x_i \right)$$

En cualquier caso práctico el número de fuentes elementales puede suponerse tan grande que se puede considerar a la fuente como continua. Así, suponiendo una distribución de densidad lineal de irradiancia  $I(x')$  en el plano  $\Pi'$  y teniendo en cuenta el cambio de escala  $z/z'$  que se toma unitario por simplicidad, resulta, en el plano  $\Pi$ :

$$I(x) = I(x') \cos w_x (x - x') dx' =$$

$$= B + \frac{1}{2} A \cos (2 w_x x - \delta)$$

$$A \cos \delta = \int_F I(x') \cos (2 w_x x') dx'$$

$$B = \frac{1}{2} \int_F I(x') dx'$$

$$A \sen \delta = \int_F I(x') \sen (2 w_x x') dx'$$

Entonces, la intensidad máxima y mínima del sistema de franjas será respectivamente:

$$I_{MAX} = B + \frac{1}{2} A; \quad I_{min} = B - \frac{1}{2} A$$

y la visibilidad:

$$V = \frac{I_{MAX} - I_{min}}{I_{MAX} + I_{min}} = \frac{A}{2B} =$$

$$\frac{\left\{ \left[ \int_f I(x') \cos(2w_x x') dx' \right]^2 + \left[ \int_f I(x') \sin(2w_x x') dx' \right]^2 \right\}}{\int_f I(x') dx'}$$

Es decir, representa el valor absoluto de la transformada de Fourier normalizada de la función distribución de intensidad de la fuente, y por lo tanto el grado de coherencia, que es el resultado que se hubiere obtenido empleando el teorema de Van Cittert-Zernike.

## CONCLUSIONES

Puede concluirse que la coherencia espacial transversal tiene la misma estructura geométrica que el fenómeno de interferencia de franjas de Young, si se pone énfasis en el proceso de suponer en intensidad los distintos sistemas originados por cada elemento de la fuente.

Luego, con el auxilio del concepto de visibilidad se recuperan los resultados clásicos.

En este enfoque no se requieren cálculos avanzados. Se utilizan expresiones usuales de interferencia con luz coherente e identidades trigonométricas. Asimismo, es conocido que el desarrollo clásico del tema, por otra parte imprescindible por los importantes conceptos involucrados, requiere del empleo de varias clases en un curso de óptica.

Finalmente, este formalismo permite prever cual será el grado de coherencia para otras configuraciones de la fuente, como por ejemplo una distribución longitudinal.

## REFERENCIAS

M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press (1980).