

# APROXIMACION EN REFLEXIONES MULTIPLES DE UN MODELO FERMIONICO SIMPLE.

M.De Francia, O.Trabocchi

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas,  
Universidad de La Plata, C.C. 67, 1900 La Plata.*

A través del desarrollo en reflexiones múltiples se calcula la función de Green correspondiente a fermiones libres confinados en una bolsa quirral bidimensional estática, acoplados con un campo externo estático, analizándose completamente el modo de convergencia.

También se calcula la energía libre a  $T=0$  del sistema, estudiándose las contribuciones de cada orden del desarrollo.

## 1 - INTRODUCCION

Existen situaciones de interés, en las que el cálculo de magnitudes físicas requiere el conocimiento de funciones de Green que satisfacen determinadas condiciones de contorno [1]. Por ejemplo, en modelos efectivos para interacciones fuertes del tipo de las bolsas quirales [2].

Resulta interesante contar con un método aproximado, que permita el cálculo de la función de Green con suficiente generalidad en las condiciones de contorno.

El método de reflexiones múltiples [3] es apropiado para el tratamiento de este tipo de problemas [4], aunque su modo de convergencia depende de la situación considerada en cada caso.

En el presente trabajo se estudia la función de Green de un sistema bidimensional simple de fermiones libres sin masa, confinados en una región acotada del espacio y acoplados mediante condiciones de contorno quirales, con un campo bosónico escalar externo estático.

Dicho cálculo se realiza en la sección 2, para un sistema simple consistente en una bolsa estática de longitud  $L$ , y sin contornos temporales. El método de reflexiones múltiples permite el desarrollo de la función de Green en términos que representan la presencia de imágenes por bordes alternados y en este caso se logra un análisis completo de la convergencia de la serie de reflexiones.

En la sección 3 se encuentra la energía libre a temperatura cero del sistema considerado, a partir del desarrollo de la función de Green en reflexiones múltiples.

Finalmente en la sección 4 se presentan algunos comentarios y conclusiones.

## 2 - CALCULO DE LA FUNCION DE GREEN POR EL METODO DE REFLEXIONES MULTIPLES

Consideremos un sistema bidimensional de fermiones libres sin masa, confinados en una región acotada del espacio  $\Omega$ , acoplados a un campo bosónico escalar estático en el exterior, mediante condiciones de contorno quirales en su borde  $\partial\Omega$ .

La función de Green del problema  $G(x,y)$ , satisface:

$$i\delta_x G(x,y) = \delta^{(2)}(x-y), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

y las condiciones de contorno:

$$K(\alpha)G(\alpha,y) = 0 \quad \alpha \in \partial\Omega \quad (2)$$

donde  $K = U^{-1} B U^{-1}$ ,  $U^{-1} = e^{-i\gamma^5 \phi}$ ,  $B = 1/2 (1-\gamma^5)$ . Anotamos con  $\phi$  al campo bosónico escalar externo,  $n$  a la normal externa en  $\partial\Omega$  y nuestra convención es:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El método de las reflexiones múltiples constituye una generalización del método de las imágenes y para sistemas de fermiones fue desarrollado en la referencia [4]. Su modo de convergencia depende de las características del problema que se esté estudiando.

Siguiendo la ref.[4] proponemos la función de Green de la forma:

$$G(x,y) = G_0(x,y) - 2i \int_{\partial\Omega} G_0(x,\alpha) \mu(\alpha,y) d\alpha \quad (3)$$

donde  $G_0(x,y)$  es la función de Green libre:

$$G_0(x,y) = (1/2\pi i) \frac{x-y}{|x-y|^2} \quad (4)$$

y  $\mu(x,y)$  representa una densidad sobre el borde.

Puede verificarse que  $G(x,y)$  así propuesta satisface la ecuación (1) en la región  $\Omega$ , e imponiéndole las condiciones de contorno se determina la forma de  $\mu(x,y)$ . Para esto último tomamos:

$$G(\alpha,y) = \lim_{x \rightarrow \alpha} G(x,y), \quad (5)$$

teniendo en cuenta que:

$$\lim G_0(x,\beta) = VPG_0(\alpha,\beta) + \frac{i n(\alpha)}{2} \delta_{\alpha,\beta} (\alpha_0 - \beta_0) \quad (6)$$

La condición de contorno implica que  $\mu(\alpha,y)$  satisface:

$$\begin{aligned} \mu(\alpha,y) = & K(\alpha)G_0(\alpha,y) - \\ & - 2i VP \int_{\partial\Omega} K(\alpha)G_0(\alpha,\beta)K(\beta)e^{2i\gamma^2\phi(\beta)}\mu(\alpha,y)d\beta \quad (7) \end{aligned}$$

La presencia del valor principal en (7) es lo que dificulta el análisis general del modo de convergencia.

Se estudiará un modelo simple de bolsa estática, con contornos espaciales en 0 y L, y sin contornos a tiempo euclídeo finito. Los valores del campo en los contornos serán  $\phi(0)$  y  $\phi(L)$  y se denotará su diferencia por  $\phi = \phi(0) - \phi(L)$ .

En este caso particular, si  $\alpha$  y  $\beta$  son coordenadas en el mismo borde:

$$G_0(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \alpha_1) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\gamma^0}{\alpha_0 - \beta_0} \quad (8)$$

y del carácter estático del campo:

$$K(\alpha)G_0(\alpha,\beta)K(\beta) = K_{\alpha_1} \bar{K}_{\alpha_1} G_0(\alpha,\beta) = 0. \quad (9)$$

En virtud de (9), el integrando de (7) se anula si  $\alpha$  y  $\beta$  están en el mismo borde y el valor principal se vuelve superfluo. En este caso la ecuación (7) se reduce a:

$$\begin{aligned} \mu(\alpha,y) = & K(\alpha)G_0(\alpha,y) - 2i \int_{\partial\Omega} K(\alpha)G_0(\alpha,\beta) \\ & K(\beta)e^{2i\gamma^2\phi(\beta)} \mu(\beta,y)d\beta \quad (10) \end{aligned}$$

que resolvemos por aproximaciones sucesivas.

Obtenemos:

$$\mu(\alpha,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(\alpha,y) \quad (11)$$

donde:

$$\mu_0(\alpha,y) = K(\alpha)G_0(\alpha,y)$$

$$\begin{aligned} \mu_n(\alpha,y) = & (-2i)^n \int \dots \int d\beta d\beta^{(1)} \dots d\beta^{(n-1)} K(\alpha) \\ & G_0(\alpha,\beta)K(\beta) \dots K(\beta^{(n-1)})G_0^{(n-1)}(\beta,y), \quad (12) \end{aligned}$$

y cada integral se realiza sobre el borde opuesto de la anterior, comenzando por el correspondiente a  $\alpha$ .

Dada la serie para  $\mu(\alpha,y)$  se obtiene para  $G(x,y)$ :

$$G(x,y) = G_0(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x,y) \quad (13)$$

con

$$G_n(x,y) = (-2i) \int_{\partial\Omega} G_0(x,\alpha)\mu_{n-1}(\alpha,y)d\alpha \quad (14)$$

El análisis del primer orden es ilustrativo respecto del comportamiento de la serie completa. La corrección de primer orden a la función de Green libre, por la presencia de las paredes es:

$$\begin{aligned} G_1(x,y) = & (-2i) \int_{\partial 0} G_0(x,\alpha)K(\alpha)G_0(\alpha,y)d\alpha + \\ & + (-2i) \int_{\partial L} G_0(x,\alpha)K(\alpha)G_0(\alpha,y)d\alpha \quad (15) \end{aligned}$$

Estas integrales se resuelven cerrando el camino de integración por el plano complejo, obteniéndose:

$$\begin{aligned} (-2i) \int_{\partial 0} G_0(x,\alpha)K(\alpha)G_0(\alpha,y)d\alpha = & G_0(x,y_0,-y_1)\gamma^1 e^{2i\gamma^2\phi(0)} \\ (-2i) \int_{\partial L} G_0(x,\alpha)K(\alpha)G_0(\alpha,y)d\alpha = & \\ = G_0(x,y_0,2L-y_1)(-\gamma^1) e^{2i\gamma^2\phi(L)} \quad (16) \end{aligned}$$

Los segundos miembros no son más que la función de Green libre evaluada en la imagen correspondiente al borde en cuestión y corregida por una matriz que ajusta las condiciones de contorno.

Consideremos por el momento el problema corres-

pendiente a una sola pared: la serie de reflexiones (13) se reduce a

$$G(x,y) = G_0(x,y) + (-2i) \int_0^{\phi_-} G_0(x,\alpha) K(\alpha) G_0(\alpha,y) d\alpha \quad (17)$$

De acuerdo a la expresión para la integral (16), se obtiene:

$$G(x,y) = G_0(x,y) + G_0(x,y_0 - y_1) \gamma^1 e^{2i\gamma^1 \phi(0)}, \quad (18)$$

que corresponde a la existencia de una imagen al otro lado de la pared.

Si  $x > \alpha$  en el borde, esta expresión puede ser reordenada, para obtener:

$$G(\alpha,x) = (1 - \gamma^1 e^{2i\gamma^1 \phi(0)}) G_0(\alpha,y) = \bar{U} \bar{B} U^{-1} G_0(\alpha,y) \quad (19)$$

donde  $\bar{B}$  es el proyector octogonal a B. Por aplicación de  $K(\alpha)$ , la expresión (19) se anula y se satisfacen adecuadamente las condiciones de contorno.

Volviendo a la ecuación (15) se ve que la integral correspondiente a  $\partial L$  impide el cumplimiento de las condiciones de contorno, por la aparición de un término que sólo será cancelado si se considera el orden siguiente del desarrollo.

Las siguientes correcciones pueden calcularse considerando sucesivas imágenes por bordes alternados, y corregidas por las matrices adecuadas.

Así:

$$G_{2k}(x,y) = G_0(x,y_0 - 2kL + y_1) M^{-k} + G_0(x,y_0 + 2kL + y_1) M^k \quad k \geq 1 \quad (20)$$

$$G_{2k+1}(x,y) = G_0(x,y_0 - 2kL + y_1) M^{-k} M_0 + G_0(x,y_0 + 2(k+1)L - y_1) M^k M_L, \quad k \geq 0$$

con

$$M = -e^{2i\gamma^1 \phi}, M_0 = \gamma^1 e^{2i\gamma^1 \phi(0)}, M_L = -\gamma^1 e^{2i\gamma^1 \phi(L)} \quad (21)$$

Notemos que el término general de la serie de reflexiones se comporta como:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G_k(x,y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma^1}{2kL} e^{2i\gamma^1 \phi - k} = 0. \quad (22)$$

Aunque la convergencia es lenta, la ecuación (13) es una serie de Fourier en la variable  $\phi_-$ , que se suma a la extensión  $\pi$ -periódica de:

$$G(x,y) = 1/(4Li) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{2i\gamma^1 \phi(0)} e^{2i\gamma^1 \phi - csc(\pi\chi/2)} & e^{-i\tau\phi} csc(\pi\tau/2) \\ e^{i\tau^* \phi - csc(\pi\tau^*/2)} & e^{-2i\phi(0)} e^{i\chi^* \phi - csc(\pi\chi^*/2)} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\text{donde } \chi = \frac{(x_1 + y_1) + i(x_0 - y_0)}{L}, \tau = \frac{(x_1 + y_1) + i(x_0 - y_0)}{L}.$$

Es posible verificar directamente que  $G(x,y)$ , hallada como suma del desarrollo en reflexiones múltiples, satisface la ecuación diferencial y las condiciones de contorno.

### 3 - CALCULO DE LA ENERGIA LIBRE A T=0

Como aplicación del desarrollo anterior, calcularemos la energía libre a  $T = 0$  del sistema en cuestión.

Es bien sabido que la función de partición está dada por:

$$Z \sim \text{Det}[(i\partial)_{BU^{-1}}] \quad (24)$$

donde  $(i\partial)_{BU^{-1}}$  está definido como el operador de Dirac actuando sobre funciones que satisfacen las condiciones de contorno  $BU^{-1}\psi(\alpha) = 0$ .

Para hallar una expresión explícita para la energía libre, notemos que [1]:

$$\text{Det}[(i\partial)_{BU^{-1}}] = \text{Det}[(U^{-1}i\partial U)_B] \quad (25)$$

donde hemos extendido de modo suave la función  $U(x)$  de modo que  $U(0) = U_0$  y  $U(L) = U_L$ , y el operador de la derecha actúa sobre funciones que satisfacen  $B\chi(\alpha) = 0$ .

Así, de (25), resulta:

$$-\beta F = \text{Tr} \log[(U^{-1}i\partial U)_B] \quad (26)$$

Dado que en el sistema estudiado, la energía libre depende de la diferencia de los valores del campo en los bordes, esto es  $\phi_-$ , introducimos un parámetro  $\rho$ , cambiando  $\phi_- \rightarrow \rho\phi_-$ . Siguiendo la referencia [1], de (26) se obtiene:

$$\frac{dF}{d\rho} = -\frac{1}{\beta} \text{Tr} \int_{\partial L} [i\gamma^5 \phi_-^{(R)} G^k(x,x)], \quad (27)$$

donde, debido a la singularidad que presentan los elementos diagonales de  $G(x,y)$ , se introdujo una ver-

sión regularizada, de la forma:

$$G^R(x,x) = G(x,x+\epsilon). \quad (28)$$

Además, por simplicidad, se ha elegido  $\phi(0) = 0$ , quedando limitada la integral al borde  $L$ . La presencia de  $\phi^{(R)} = \phi(L)$  se debe a la manera en que el campo ingresa en las condiciones de contorno, que sólo dependen de  $\phi(L)$  módulo  $\pi$ .

Introduciendo en (27) los términos del desarrollo en reflexiones (20), podemos calcular las sucesivas correcciones a la energía libre por la presencia de los contornos.

Cabe consignar que los elementos  $G_0$  y  $G_1$  son los únicos que presentan singularidades, correspondientes a la coincidencia sobre el borde del punto fuente y el de observación, o bien de la primera imagen y el punto de observación, respectivamente.

Calculadas las trazas de las matrices correspondientes, el aporte de tales términos se anula.

De este modo, podemos tomar  $\epsilon \rightarrow 0$ , obteniendo:

$$\frac{dF}{d\rho} = -\frac{1}{\beta} \sum_{n=2}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \tau |n\gamma^5 \phi^{(R)} G_n(\alpha, L, \alpha, L) \quad (29)$$

que, considerando adecuadamente el comportamiento de los términos pares e impares (nulos), se transforma en:

$$\frac{dF}{d\rho} = \frac{1}{\pi L} \phi^{(R)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(2n\rho\phi)}{n}, \quad (30)$$

serie de Fourier que se suma a la extensión  $\pi$  periódica de  $\rho\phi$ .

Integrando (30) sobre la variable  $\rho$  entre 0 y 1, se obtiene:

$$F[\phi_-] = F[0] + \frac{(\phi_-^{(R)})^2}{2\pi L}. \quad (31)$$

Este valor coincide con el hallado en la referencia [5] por un método alternativo, y con el resultado de la energía de Casimir calculada a partir de los autovalores del hamiltoniano de Dirac:

$$E_n = [n + (\frac{1}{2} - \frac{\phi_-}{\pi})]. \quad (32)$$

La expresión (32) para los autovalores explica la dependencia de la energía libre con  $\phi_-^{(R)}$ . En efecto, el cambio de  $\phi$  por  $\phi \pm \pi$  da lugar a que un nivel de energía ingrese o deje el mar de Dirac, reestableciéndose

en la suma que da la energía de vacío la dependencia original con  $\phi_-$ .

#### 4 - CONCLUSIONES

Se ha aplicado el método de reflexiones múltiples a un modelo de prueba simple con el objeto de analizar el modo de convergencia.

Para el caso estudiado, solamente deben considerarse las reflexiones correspondientes a bordes alternados. De este modo, se pudo construir la serie de reflexiones considerando las sucesivas imágenes por las paredes de la bolsa, adecuadamente corregidas por matrices que aseguran el cumplimiento de las condiciones de contorno.

Por otra parte, del desarrollo en reflexiones múltiples resulta una serie de Fourier que se suma a la extensión  $\pi$  periódica de una función conocida de la diferencia de los campos en los bordes, obteniéndose de este modo la función de Green exacta (23).

En la Sección 3 se calculó la energía libre a  $T = 0$  del sistema, utilizándose el desarrollo de la función de Green anteriormente hallado. Los términos divergentes  $G_0$  y  $G_1$ , una vez regularizados no aportan a la energía libre. De los términos no nulos, nuevamente se halló una serie de Fourier que se suma a la extensión  $\pi$ - periódica de una función conocida de la variable  $\phi$ -

El resultado obtenido coincide con el presentado en la referencia [5] y con la energía de vacío calculada a partir de los autovalores del hamiltoniano de Dirac.

#### REFERENCIAS

- [1] H.Falomir, M.A.Muschicetti, and E.M.Santangelo, *Jour.Math.Phys.* 31, 989 (1990).
- [2] A.Chodos, and C.B.Thorn, *Phys.Rev.* D12, 2733 (1975); T.Inowe, and T.Maskawa, *Progr.Theor.Phys.* 54, 1833 (1975); G.E.Brown, and M.Rho, *Phys.Lett.* B82, 177 (1979).
- [3] R.Balian and C.Bloch, *Ann.Physics (N.Y.)* 60, 401 (1970).
- [4] T.H.Hansson and R.L.Jaffe, *Ann.Phys.* 151, 204 (1983)
- [5] H.Falomir, and E.M.Santangelo, *Phys.Rev. D*, en prensa.