ALGEBRA DE LOS VINCULOS PARA EL SISTEMA ACOPLADO W-Z⊕SUGRA

A. Foussats* y O. Zandron*
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura , Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario.

Partiendo de un formalismo canónico covariante de primer orden, es posible obtener el Hamiltoniano de un formalismo de segundo orden en función del conjunto de vínculos de primera clase, los cuales clausuran un álgebra (álgebra de los vínculos). Dicho conjunto de vínculos genera así todas las simetrías de calibre del Hamiltoniano. Se muestra, además, que el Hamiltoniano así obtenido es el generador de la evolución temporal de funcionales genéricas de campos y momentos.

INTRODUCCION

En trabajos previos (1), se ha desarrollado un formalismo canónico covariante (FCC) de primer orden sobre variedades con estructura de grupo, el cual nos permite describir teorías de calibre supersimétricas. En particular, en Ref. (2) hemos aplicado dicho formalismo al sistema acoplado W-Z⊕SUGRA (supermultiplete de materia de Wess-Zumino acoplado a la supergavedad en dimensión D=4). Dicho formalismo nos permitió, entre otras cosas, introducir en este lenguaje Hamiltoniano el concepto de supercorriente del multiplete de materia de W-Z que actúa como fuente para el campo supergravitacional y obtener toda la información de los campos auxiliares de la supergravedad. Es bien conocido que la transición de un formalismo de primer orden a uno de segundo orden permite separar los verdaderos grados de libertad dinámicos de los de calibre. Así, la importancia de tratar estos sistemas vinculados en un formalismo Hamiltoniano de segundo orden se pone de manifiesto cuando se considera el problema de la cuantificación de dichos sistemas vinculados. También, este tipo de formulación debería ser útil para implementar nuevas ideas sobre la cuantificación del campo gravitatorio. Es en este punto que el FCC juega un rol importante, debido a la estructura más simple y compacta de las ecuaciones. Por otra parte, también se mostró que el FCC no es un formalismo propiamente Hamiltoniano. Es decir, este formalismo no define un sistema mecánico ''standard'' en el sentido que no es una teoría Hamiltoniana como la usual (no covariante), la cual propaga datos definidos sobre una hipersuperficie inicial Σ. Esto se debe a que el FCC toma la derivada exterior d como una forma observable y ella no tiene un análogo directo en el formalismo Hamiltoniano en componentes. En consecuencia, el FCC y el formalismo Hamiltoniano usual en componentes deben ser relacionados y, como es posible mostrar, esta relación no es trivial. La primera cuestión es que en la construcción del FCC se utilizó el concepto de ''form-bracket'' y debemos relacionarlo con el concepto de paréntesis de Poisson usual que aparece en las teorías Hamiltonianas en componentes. Por lo tanto, partiendo de la 4-forma H_τ definida en el FCC (2), debemos construir el generador de evoluciones temporales. Esto se hace hallando el conjunto de vínculos de primera clase, los cuales son los generadores del álgebra de los vínculos (3). De esta manera, el Hamiltoniano correcto queda dado como una funcional de estos generadores.

2.- DESCOMPOSICION ESPACIO-TIEMPO Y LA RELACION ENTRE PARENTESIS DE POISSON Y "FORM-BRACKETS"

Para llevar a cabo la descomposición en el espacio-tiempo, el primer paso es escribir en componentes todas las ecuaciones y cantidades que en Ref. (2) fueron escritas en lenguaje de formas usando cálculo exterior sobre formas diferenciales. Todos los campos dinámicos deben ser considerados solamente como formas restringidas: es decir, formas definidas sobre la variedad coset M^4 = G/H (superespacio

* Investigador CONICET

físico) donde G es la variedad supergrupo y $H \subset G$ un subgrupo bosónico de G (H grupo de simetría de calibre). Luego las formas extendidas se obtienen naturalmente para todo el supergrupo de Lie G mediante transformaciones-H de calibre. Consideramos que las formas reducidas definidas sobre M^4 están escritas en la base holónoma dx^μ. Finalmente, ecuaciones de campo, vínculos y todas las formas deben ser proyectadas sobre una hipersuperficie Σ de tres dimensiones de tipo "space-like" $x^o = t = t^o$. Esto requiere la introducción de un mapeo inyectivo $\chi : \Sigma \to M^4$, de tal manera que el "pull-back" χ^* asociado actúa sobre formas genéricas, haciendo $t = t^o$ y $dt = 0$.

LLamamos $\mu^A(x) = [\, -\omega^{ab}(x), L^a(x), \xi^\alpha(x)]$ (i= 1, 2, 3; a,b = 1,2,3,4,) a las componentes de las 1-formas (potenciales de Yang-Mills) $\mu^A = (\omega^{ab}, V^a, \xi^\alpha)$ en la base dx^i sobre Σ. Los correspondientes momentos canónicos conjugados 2-formas definidos en Ref. (2) $\pi_A = (\pi_{ab}, \pi_a, \pi_\alpha)$, se escriben en la base de la siguiente manera:

$$\pi_A = 1/2\, g^{-1/2}\, \pi_A^i(x)\, \varepsilon_{ijk}\, dx^j \wedge dx^k =$$

$$= g^{-1/2}\, \pi_A^i(x)\, \Sigma_i, \qquad (1)$$

donde $\pi_A^i(x)$ son las correspondientes componentes espaciales, y la 2-forma Σ_i está definida sobre Σ. En forma análoga se escriben los otros campos dinámicos (0-forma) pertenecientes al sector del multiplete de materia de W-Z. Luego los paréntesis de Poisson usuales se escriben:

$$[L^a_j(x)\, ,\, \pi_b^j(y)] = -[\pi_b^j(y)\, ,\, L^a_j(x)] = \delta^a_b\, \delta_i^j\, \delta^3(x,y) \qquad (2)$$

y análogamente para los demás campos y momentos bosónicos; y

$$[\bar{\xi}^\alpha_j(x)\, ,\, \pi_\beta^j(y)] = [\pi_\beta^j(y)\, ,\, \bar{\xi}^\alpha_j(x)] = \delta^\alpha_\beta\, \delta_i^j\, \delta^3(x,y) \quad (3)$$

y análogamente para los demás campos y momentos fermiónicos.

Como se muestra en Ref. (1), los paréntesis de Poisson llevan más información que los "formbrackets". Es posible entonces relacionar un subconjunto particular de paréntesis de Poisson con los "form-brackets" mediante una relación integral. Para ello, definimos primero los paréntesis de Poisson entre formas. Sean A(x) y B(x) dos formas genéricas en los puntos x e y, designamos con a y b sus grados y con $|A|$ y $|B|$ los "grading" de Fermi, respectivamente. Los paréntesis de Poisson entre formas [A(x), B(x)], definen una forma de grado a+b sobre $\Sigma \times \Sigma$ Así definidos, estos paréntesis no contienen derivadas de la delta de Dirac y pueden ser evaluados expandiendo las formas A(x) y B(y) en las bases holónomas dx^i, dy^i y utilizando los paréntesis (2), (3) entre componentes de campos y momentos. Así llegamos a los siguientes paréntesis de Poisson para formas entre variables dinámicas canónicas conjugadas:

$$[\mu^A(x)\, ,\, \pi_B(x)] = \delta^A_B\, g^{-1/2}(y)\, dx^i \wedge \Sigma_i(y)\, \delta^3(x,y) \qquad (4)$$

y análogamente para los campos del sector de W-Z.

Ahora, la relación integral que permite relacionar los "form-brackets" con los paréntesis de Poisson entre formas se escribe así:

$$(-1)^{a+1+|A||B|} \int_\Sigma \alpha(x) \wedge (A,B) \wedge \beta(x) =$$

$$= \iint_{\Sigma \times \Sigma} \alpha(x) \wedge [A(x), B(y)] \wedge \beta(y)$$

donde (A,B) son los "form-brackets" definidos en Ref. (2), y α, β son dos formas de prueba de grados 3-a y 3-b y "grading" de Fermi arbitrario, respectivamente.

EL FORMALISMO HAMILTONIANO DE SEGUNDO ORDEN A PARTIR DEL FCC.

Se parte de considerar la expresión para la torsión:

$$R^a = dV^a - \omega^{ab} \wedge V_b - i/2\, \bar{\xi} \wedge \gamma^a\, x, \qquad (5)$$

asociada al álgebra graduada de Poincaré y su solución para el sistema W- Z$\oplus$SUGRA bajo consideración

$$R^a = -1/8\, \varepsilon^{abcd}\, A_b\, V_c \wedge V_d\, , \qquad (6)$$

donde el vector axial es: $A_b = 3\, \bar{\lambda}\, \gamma_5 \gamma_b\, \lambda$ (ver Ref. (2)).

A partir de estas ecuaciones, hallamos la solución para la 1-forma conexión espinorial:

$$\omega_\mu{}^{ab}(V,\xi,A) = \overset{o}{\omega}_\mu{}^{ab}(V) - C_\mu{}^{ab}(\xi,A)\, , \qquad (7)$$

donde $\overset{o}{\omega}_\mu{}^{ab}$ es el mismo funcional de la tetrada que para la gravitación pura.

El segundo término del miembro derecho de (7) lo forman las componentes del tensor de contorsión, funcionales bilineales del campo del gravitino ξ (como en la supergravedad pura) y también contiene el campo espinorial λ perteneciente al supermultiplete de materia W-Z. Es decir, en esta teoría la contorsión (v.g. la torsión) es generada por los dos campos espinoriales presentes en ella.

Utilizando la descomposición espacio-temporal y escribiendo la torsión en componentes, después de algunas manipulaciones algebraicas se llega a:

$$\omega_i^{ab} = \Omega_i^{ab} + (n^b L^{aj} - n^a L^{bj}) K_{ij}\,, \tag{8}$$

donde Ω_i^{ab} es la conexión espinorial y K_{ij} la curvatura extrínseca de la hipersuperficie Σ. La ec. (8) vincula las dos conexiones espinoriales ω_i^{ab} y Ω_i^{ab}, las cuales quedan completamente determinadas utilizando la condición métrica en la variedad M^4 y en la hipersuperficie Σ. Luego, a partir de (8) vemos que la condición métrica en M^4 y su análoga en Σ, nos provee informaciones muy diferentes, las cuales están contenidas en la curvatura extrínseca K_{ij}, dada por:

$$K_{ij} = (1/2N^{\perp})(-g_{ij} + N_{i|j} + N_{j|i}) - C_{ji\perp}\,. \tag{9}$$

LOS VINCULOS DE PRIMERA CLASE Y EL HAMILTONIANO

El Hamiltoniano $\mathcal{H}$, generador de evoluciones temporales, para un funcional genérico F de los campos y momentos

$$\dot{F} = [F, \mathcal{H}]\,, \tag{10}$$

se obtiene a partir de la 4-forma H_τ definida en Ref.(2), haciendo la descomposición espacio-temporal y escribiendo

$$\int H_\tau = \int dx^o \wedge \mathcal{H} \tag{11}$$

Consideremos la 3-forma $\mathcal{H}$ integrada en la hipersuperficie Σ. El Hamiltoniano resulta así:

$$\mathcal{H} = \int \mu_o^{\Lambda}\, \mathcal{H}_\Lambda(x)\, d^3x = \int [1/2\, \omega_o^{ab}\, \mathcal{H}_{ab}(x) +$$

$$+ L^a{}_o \mathcal{H}_a(x) + \bar{\mathcal{H}}(x)\, \xi_o]\, d^3x \tag{12}$$

Después de manipulaciones algebraicas se llega a:

$$H_{ab} d^3x = 2\{(-2R^{c} \wedge V^d \varepsilon_{abcd} + J_{ab}) +$$

$$+ 1/2\, [\Phi_a \wedge V_b - \Phi_b \wedge V_a]\}_{|\Sigma} \approx 0$$

$$\mathcal{H}_a d^3x = \{(-2R^{bc} \wedge V^d \varepsilon_{abcd} + 4\mathcal{D}\bar{\xi} \wedge \gamma_5\gamma_a \xi + J_a)$$

$$-[1/4\, \varepsilon_{abcd} A^c V^d + \omega^b a] \wedge \Phi_b\}_{|\Sigma} \approx 0$$

$$\bar{\mathcal{H}} d^3x = \{(-8\mathcal{D}\bar{\xi}\gamma_5\gamma_a \wedge V^a + 4\bar{\xi}\gamma_5\gamma_a \wedge R^a + 2J)$$

$$-i\bar{\xi}\gamma \wedge \Phi\}_{|\Sigma} \approx 0$$

Hacemos notar que las expresiones incluidas entre llaves, son las ecuaciones inhomogéneas para el campo supergravitacional con fuente, proyectadas sobre Σ (ver Ref.(2)). Estos resultados se hallaron utilizando las siguientes prescripciones sobre los vínculos primarios de segunda clase que nos provee el FCC:

$$\Phi_{ab} = 0\,,\ \varphi_a = 0\,,\ \eta_a = 0$$

$$\chi^x\Phi^\alpha = 0,\ \chi^x\Phi = 0,\ \chi^x\Phi = 0,\ \chi^x\Psi^\alpha = 0$$

y

$$\chi^x\Phi_a \approx 0.$$

Después de pesadas manipulaciones algebraicas, se puede mostrar que las cantidades debilmente cero $\mathcal{H}_{ab}$, $\mathcal{H}_a$ y $\bar{\mathcal{H}}$ son los vínculos de primera clase del sistema acoplado bajo consideración y ellos clausuran el álgebra:

$$[\mathcal{H}_A(x)\,,\ \mathcal{H}_B(y)] = \Delta^C{}_{AB}\, \mathcal{H}_C(y)\, \delta(x-y),$$

donde $\Delta^C{}_{AB} = R^C{}_{AB} - C^C{}_{AB}$ para curvaturas $R^C{}_{AB}$ y constantes de estructura de Poincaré $C^C{}_{AB}$.

REFERENCIAS

1.- A.D'Adda, J.E.Nelson and T.Regge: Ann. Phys 165, (1985) 384. A.Lerda, J.E.Nelson and T. Regge: Phys. Lett. B1161, (1985) 294, 297; Int. J. Md. Phys. A2 (1987) 1843. J. E. Nelson and T.Regge: Ann.Phys. 166, (1986) 234. A.Foussats and O. Zandron: Class. Q.Grav. 5, (1988) 605. Class. Q.Grav. 5, (1988) 1231, Ann. Phys. 191, (1989) 312. Class. Q.Grav. 6, (1989) 1165. Int. J.Md.Phys. A5, (1990) 725. Int. J.Md. Phys. A5, (1990) 1671.

2.- A.Foussats and O.Zandron: Ann. Phys. 189, (1989) 174.

3.- J.E.Nelson and C.Teitelboim: Phys. Lett. B69, (1977) 81. Ann.Phys. 116, (1978) 1. S.Deser and C.J. Isham: Phys. Rev.D14, (1976) 2505. S.Deser, J.H.Kay and K.S.Stelle: Phys. Rev. D16, (1977) 2448.M.Pilati: Nucl. Phys. B132, (1978) 138. Castellani, P.van Nieuwenhuizen and M.Pilati: Phys. Rev. D26, (1982) 352.