

ANOMALIAS Y ECUACIONES CLASICAS DE MOVIMIENTO.

J.Magnin y L.Maspero

Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro,
Comisión Nacional de Energía Atómica y Universidad Nacional de Cuyo,
CC 439, 8400 San Carlos de Bariloche.

Se muestra como la anomalía para modelos quirales abelianos surge de la no validez de las ecuaciones clásicas de movimiento. Extendiendo los grados de libertad según la técnica BRST, las ecuaciones clásicas para los campos bosónicos son compatibles con la anomalía y se pueden derivar las identidades de Ward, de las que sigue la renormalizabilidad de la teoría.

INTRODUCCION

En el formalismo de integrales de camino, la anomalía surge de la no invariancia de la medida fermiónica ante transformaciones locales infinitesimales¹.

Tsutsui² mostró que la anomalía puede interpretarse, de una manera alternativa, como debida a la discrepancia entre ecuaciones clásicas y cuánticas de movimiento.

En este trabajo, se calcula la anomalía para el modelo de Schwinger quiral en 1+1 dimensiones y para el modelo abeliano quiral en 3+1 dimensiones y se muestra que el método de Tsutsui conduce a expresiones coincidentes con las encontradas en la literatura^{1,3}. Se hace luego el tratamiento BRST del modelo abeliano quiral en 3+1 dimensiones siguiendo ref.(4), lo que permite usar las ecuaciones clásicas para los campos bosónicos y definir una carga conservada, y se encuentran las identidades de Ward de la teoría.

Finalmente se muestra que el modelo en 3+1 dimensiones es renormalizable si se supone que la anomalía no se renormaliza tal como se ha mostrado en ref.(8).

NO VALIDEZ DE LAS ECUACIONES CLASICAS DE MOVIMIENTO.

En ref.(1) se muestra que, ante transformaciones globales infinitesimales que dejen invariante el Lagrangiano vale

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \bar{\delta} \mathcal{L} \rangle = 1/N \int D\Phi \bar{\delta} \mathcal{L} e^{iI} = \\ &= \langle \frac{\delta I}{\delta \Phi} \bar{\delta} \Phi \rangle - \alpha \langle \partial_\mu j^\mu \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\bar{\delta} \Phi = i\alpha \Phi$ y $I = \int d^d x \mathcal{L}[\Phi]$ con N factor de normalización. En el formalismo de integrales de camino, las ecuaciones cuánticas de movimiento pueden derivarse de

$$0 = 1/N \int D\Phi \frac{\delta}{\delta \Phi} \{ \bar{\delta} \Phi e^{iI} \} = i \langle \frac{\delta I}{\delta \Phi} \bar{\delta} \Phi \rangle + \langle \frac{\delta \bar{\delta} \Phi}{\delta \Phi} \rangle \quad (2)$$

lo cual implica que

$$\langle \partial_\mu j^\mu \rangle = i/a \langle \frac{\delta \bar{\delta} \Phi}{\delta \Phi} \rangle \quad (3)$$

Aunque el miembro derecho de ec.(3) contiene una divergencia mal definida $\delta(0)$, lo cual implica que las manipulaciones anteriores son formales, esta relación muestra que no puede tomarse como garantida la conservación de la corriente de Noether en las teorías cuánticas.

Siguiendo con la metodología de ref.(1), hacemos el cálculo de la anomalía para el modelo de Schwinger quiral en 1+1 dimensiones. Consideramos entonces

$$\mathcal{L} = -\frac{F^2}{4} + i\bar{\Psi} D\Psi ; D = \gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu (\frac{1-\gamma_5}{2})) \quad (4)$$

y realizamos transformaciones globales infinitesimales que dejen invariante el Lagrangiano (4)

$$\delta \bar{\Psi} = i\alpha (\frac{1-\gamma_5}{2}) \Psi ; \bar{\delta} \Psi = -i\alpha \bar{\Psi} (\frac{1+\gamma_5}{2}) \quad (5)$$

De acuerdo con ec.(3), la divergencia de la corriente j_L^μ es

$$\langle \partial_\mu j_L^\mu \rangle = \{ \frac{\delta}{\delta \Psi} [\bar{\Psi} (\frac{1+\gamma_5}{2})] - \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} [(\frac{1-\gamma_5}{2}) \Psi] \} \quad (6)$$

Para la evaluación de la expresión (6) hacemos un desarrollo de Ψ y $\bar{\Psi}$ en términos de autofunciones φ_n

$$\Psi(x) = \sum_n \varphi_n(x) ; \bar{\Psi}(x) = \sum_n \bar{b}_n \varphi_n^+(x)$$

que satisfacen

$$\int dx \varphi_n^+(x) \varphi_m(x) = \delta_{nm} ; \sum_n \varphi_n^+(x) \varphi_n(y) = \delta(x-y)$$

Definimos ahora las derivadas funcionales regularizadas²

$$\delta/\delta\Psi(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \varphi_n^+(x) e^{-\lambda_n^2/M^2} \quad (7)$$

$$\delta/\delta\bar{\Psi}(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n (\partial/\partial\bar{b}_n) e^{-\lambda_n^2/M^2} \varphi_n(x)$$

con lo cual la ec.(6) puede reescribirse como

$$\langle \partial \cdot j_L \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \varphi_n^+(x) \gamma_5 e^{-\lambda_n^2/M^2} \varphi_n(x) \quad (8)$$

El operador cuyos autovalores son λ_n puede ser⁵ más general que iD . Si en particular elegimos

$$i\hat{D} = i\gamma^\mu [\partial_\mu - ig A_\mu (\frac{1-\gamma_5}{2}) - ig a A_\mu (\frac{1+\gamma_5}{2})] \quad (9)$$

de manera que

$$i\hat{D} \varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x)$$

entonces la ec. (8) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \langle \partial \cdot j_L \rangle &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \varphi_n^+(x) \gamma_5 \alpha^{-(i\hat{D})^2/M^2} \varphi_n(x) = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} + r \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-ik \cdot x} \gamma_5 e^{-(i\hat{D})^2/M^2} e^{-ik \cdot x} \end{aligned} \quad (10)$$

donde se ha hecho una transformación unitaria de los vectores de la base $\varphi_n(x)$ a ondas planas¹.

Para la evaluación de (10) usamos la identidad

$$\begin{aligned} \hat{D}^2 &= [\partial_\mu \partial^\mu - ig(1+a) A_\mu \partial^\mu + \frac{ig}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\mu] \gamma_5 (a-1) A_\nu \partial^\nu] + \\ &+ \left\{ \frac{-ig}{2} (1+a) \partial_\mu A^\mu - \frac{ig}{2} (a-1) \gamma_5 \partial_\mu A^\mu - ag^2 A_\mu A^\mu - \frac{ig}{8} [\gamma^\mu, \gamma^\mu] \right. \\ &\quad \left. [(1+a) F_{\mu\nu} + \gamma_5 (a-1) F_{\mu\nu}] \right\} \end{aligned}$$

con lo cual resulta

$$\begin{aligned} \langle \partial \cdot j_L \rangle &= \lim_{M \rightarrow \infty} \text{fr} \gamma_5 \exp \frac{1}{M^2} \left\{ \frac{-ig}{2} (1+a) \partial_\mu A^\mu - \right. \\ &\quad \left. - \frac{ig}{2} (a-1) \gamma_5 \partial_\mu A^\mu - ag^2 A_\mu A^\mu - \right. \\ &\quad \left. - \frac{ig}{8} [\gamma^\mu, \gamma^\mu] [(1+a) F_{\mu\nu} + (a-1) \gamma_5 F_{\mu\nu}] \right\} \times \\ &\times \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-ik_1 x} \exp \frac{1}{M^2} \{ \partial_\mu \partial^\mu - ig(1+a) A_\mu \partial^\mu + \\ &\quad + \frac{ig}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\mu] \gamma_5 (a-1) A_\mu \partial^\mu \} e^{-ik_1 x} \end{aligned} \quad (11)$$

Se observa que haciendo un desarrollo en serie de la exponencial que está fuera de la integral, el único término que contribuye es el de primer orden ya que los de orden superior contienen potencias mayores que $(1/M)^2$ y pueden despreciarse. Redefiniendo luego $k^\mu \rightarrow k^\mu/M$ se observa que, dentro de la integral, el único término que contribuye es $\exp \partial_\mu \partial^\mu$ por lo que ec.(11) se reduce a:

$$\begin{aligned} \langle \partial \cdot j_L \rangle &= \lim_{M \rightarrow \infty} \text{fr} \gamma_5 \left\{ \frac{-ig}{2} (1+a) \partial_\mu A^\mu - \right. \\ &\quad \left. - \frac{ig}{2} (a-1) \gamma_5 \partial_\mu A^\mu - ag^2 A_\mu A^\mu - \right. \\ &\quad \left. - \frac{ig}{\epsilon} [\gamma^\mu \gamma^\mu] [(1+a) F_{\mu\nu} + (a-1) \gamma_5 F_{\mu\nu}] \right\} \cdot \\ &\cdot \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-ik \cdot x} \partial_\mu \partial^\mu e^{ikx} = \\ &= \frac{-g}{4\pi} [(a-1) \partial_\mu A^\mu + (a+1) \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu] \end{aligned} \quad (12)$$

La expresión (12) obtenida para la divergencia de la corriente es equivalente a la obtenida por Jackiw y Rajaraman³.

El cálculo de la anomalía para el modelo abeliano quiral en 3+1 dimensiones es análogo al anterior, salvo en lo referido a la elección del operador cuyos autovalores van a actuar como reguladores en las derivadas funcionales. En este caso, la elección de un operador de la forma de la ec.(9) conduce a una expresión de la anomalía que contiene términos divergentes y términos imaginarios, además de un término proporcional a $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$.

Esto es así ya que se obtiene una expresión similar a ec.(11) donde, ahora, en la exponencial de afuera de la integral contribuyen los términos de primer y segundo orden. El término de primer orden, luego de

la redefinición $k^\mu \rightarrow k^\mu/M$, adquiere un factor M^2 , mientras que los demás términos vienen de la contribución de segundo orden.

En el caso particular $a=1$ los términos imaginarios y el término divergente se anulan y se obtiene

$$\langle \partial \cdot j_L \rangle = \frac{g}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad (13)$$

lo cual indica que el operador aceptable es de la forma

$$i \hat{D} = i \gamma^\mu (\partial_\mu - ig A_\mu) \quad (14)$$

FORMALISMO BRST E IDENTIDADES DE WARD

Consideremos el Lagrangiano en $d+1$ dimensiones⁴,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F^2 + i \bar{\Psi} \partial \Psi + g A_\mu j_L^\mu + \frac{b^2}{2} b \partial \cdot A + \\ & \partial^\mu \bar{c} \partial_\mu c + m^2 K(\partial_\mu \Theta, A_\mu) + \lambda \Theta P(\partial_\mu A_\nu) \end{aligned} \quad (15)$$

que corresponde al modelo abeliano quiral cuantizado en el calibre $\partial A = b$. La segunda línea de ec.(15) es el término de Wess-Zumino, el cual debe compensar el cambio de la medida fermiónica en la integral funcional; $K(\partial_\mu \Theta, A_\mu)$ es el posible término cinético relacionado con la variable Θ del grupo de calibre y $P(\partial_\mu A_\nu)$ es la densidad de Chern-Pontryagin.

La transformación BRST de los campos está definida por

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \delta_\mu c & \delta \bar{c} &= -b & \delta \Psi_L &= ig \Psi_L c \\ \delta c &= \delta b = 0 & \delta \Theta &= c & \delta \bar{\Psi}_L &= -ig \bar{\Psi}_L c \end{aligned} \quad (16)$$

Las ecuaciones de movimiento para los campos A_ν y Ψ son

$$\begin{aligned} -\partial_\mu F^{\mu\nu} - e j_L^\nu - \partial^\nu b - m^2 \frac{\partial K}{\partial A} + \lambda \partial_\mu \Theta \frac{\partial P}{\partial A_\mu} &= 0 \\ m^2 \partial_\mu \frac{\partial K}{\partial \partial_\mu \Theta} - \lambda P &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

que pueden considerarse como clásicas en el sentido de que son las ecuaciones de Euler-Lagrange del Lagrangiano (15), aunque son diferentes a las ecuaciones clásicas de movimiento debido a que el Lagrangiano clásico no contiene los términos $K(\partial_\mu \Theta, A_\mu)$ y $P(\partial_\mu A_\nu)$. De las ecs.(17) y de la condición $\square b = 0$ sigue

$$-g \partial \cdot j_L + \lambda P - m^2 \partial_\nu \left(\frac{\partial K}{\partial A_\nu} + \frac{\partial K}{\partial \partial_\nu \Theta} \right) = 0 \quad (18)$$

y dado que j_L^ν no es conservada, no valen las ecuaciones de movimiento clásicas para los fermiones. En 1+1 dimensiones $\lambda P = \frac{g^2}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu$ y eligiendo³,

$$m^2 K(\partial_\mu \Theta, A_\mu) = \frac{g^2}{4\pi} (a-1) \partial_\nu \Theta \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Theta - A_\mu \right)$$

se encuentra que

$$\partial \cdot j_L = \frac{g}{4\pi} [\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu + (a-1) \partial_\mu A^\mu]$$

que es una expresión equivalente⁶ a la expresión (12).

En 3+1 dimensiones $P = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$ y la ec.(13) sugiere que $K(\partial_\mu \Theta, A_\mu)$ debe ser elegido invariante de calibre para que sea compatible con ec.(18).

Tomando $\langle \partial_\mu \Theta, A_\mu \rangle$ invariante de calibre, la corriente BRST

$$j_B^\nu = F^{\mu\nu} \partial_\mu c - \lambda \Theta \frac{\partial P}{\partial \partial_\nu A_\mu} \partial_\mu c + g j_L^\nu c + b \partial^\nu c - m^2 \frac{\partial K}{\partial \partial_\nu \Theta} c$$

es conservada⁴, lo que implica que la carga BRST es independiente del tiempo, hecho que permite demostrar la unitariedad de la teoría.

Consideremos ahora la funcional generatriz como una integral sobre todos los campos

$$d[\phi] = D\bar{\Psi} D\Psi D b D\bar{c} Dc D\Theta DA_\mu \quad (19)$$

Siguiendo ref.(7), introducimos fuentes para todos los campos cuánticos

$$\int J \cdot \phi = \int (J^\mu A_\mu + J_\Theta \Theta + \xi c + c \bar{\xi} + B b + \zeta \Psi_L + \bar{\Psi}_L \bar{\zeta}) \quad (20)$$

Dado que la transformación BRST (16) involucra campos compuestos, es necesario introducir fuentes para ellos

$$\int L \cdot s\phi = \int (L i g \Psi_L c - i g \bar{\Psi}_L c \bar{L}) \quad (21)$$

La funcional generatriz completa es entonces

$$\begin{aligned} Z = & \int d[\phi] \exp [i \int d^4x \mathcal{L}_B + i \int d^4x \lambda \Theta P + \\ & + i \int d^4x J \cdot \phi + i \int d^4x L \cdot s\phi] \\ \mathcal{L}_B = & -\frac{1}{4} F^2 + i \bar{\Psi} \partial \Psi + g A_\mu j_L^\mu + \frac{b^2}{2} b \partial \cdot A + \\ & + \partial^\mu \bar{c} \partial_\mu c + m^2 K(\partial_\mu \Theta, A_\mu) \end{aligned} \quad (22)$$

Construimos ahora el operador funcional

$$\omega = \int \frac{\delta}{\delta \phi} \delta \phi = \int \left\{ \frac{\delta}{\delta A_\mu} \partial_\mu c + \frac{\delta}{\delta \Theta} c - \frac{\delta}{\delta c} b + \frac{\delta}{\delta \Psi_m} i g \Psi_L c - i g \bar{\Psi}_L c \frac{\delta}{\delta \Psi_m} \right\} \quad (23)$$

y redefinimos la medida en la integral funcional (22) como

$$d'[\phi] = d[\phi] \exp i \int d^4x \lambda \Theta P \quad (24)$$

de manera que $d'[\phi]$ es invariante bajo la acción de ω . Con esto, ec.(22) puede reescribirse como

$$Z[J, L] = \int d'[f] \exp [i \int \mathcal{L}_B + i \int J \cdot \phi + i \int L \cdot \delta \phi] \quad (25)$$

y la acción de ω sobre $Z[J, L]$ se reduce solamente a la parte que contiene a $\int J \cdot \phi$. Como por otra parte $\omega = 0$ por ser la integral de una derivada total, entonces

$$0 = \omega Z[J, L] = \int \left\{ J \partial_\mu \frac{\delta}{\delta \xi} + J_\Theta \frac{\delta}{\delta \xi} - \frac{\delta}{\delta B} \bar{\xi} + \zeta \frac{\delta}{\delta L} + \frac{\delta}{\delta L} \zeta \right\} Z \quad (26)$$

Definiendo ahora $W[J, L]$ de manera que

$$Z[J, L] = \exp i W[J, L] \quad (27)$$

se sigue de ec. (26) que

$$\omega W[J, L] = 0$$

y siendo la acción cuántica efectiva Γ

$$\Gamma[\phi, L] = W[J, L] - \int J \cdot \phi$$

$$\Phi = \frac{\delta W}{\delta J} \quad J = - \frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi}$$

resulta que

$$-\omega W = \int \left\{ \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} \partial_\mu c + \frac{\delta \Gamma}{\delta \Theta} c - b \frac{\delta \Gamma}{\delta c} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \Psi_L} \frac{\delta \Gamma}{\delta L} + \frac{\delta \Gamma}{\delta L} \frac{\delta \Gamma}{\delta \Psi_L} \right\} = 0 \quad (28)$$

El hecho que el término de fijación de calibre sea de

la forma $b^2/2 - b \partial \cdot A$ permite escribir

$$\Gamma = \tilde{\Gamma} + \int \left(\frac{b^2}{2} - b \partial \cdot A \right) ; \quad \frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta b} = 0 \quad (29)$$

y de $-\frac{\delta}{\delta b} (-\omega W) = 0$ resulta

$$\delta_{gh} \Gamma = \partial_\mu \partial^\mu + \frac{\delta \Gamma}{\delta c} = 0 \quad (30)$$

Usando ecs.(29) y (30), la ec. (28) puede reescribirse como

$$\int \left\{ \frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta A_\mu} \partial_\mu c + \frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta \Theta} c + \frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta \Psi_L} \frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta L} + \frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta \Psi_L} \frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta L} \right\} = 0 \quad (31)$$

La ecs.(30) y (31) son las ecuaciones fundamentales para la simetría BRST de la acción cuántica.

RENORMALIZABILIDAD

Las ecs.(30) y (31) deben ser válidas para todas las amplitudes calculadas en un desarrollo en lazos. A orden cero

$$\tilde{\Gamma}^{(0)} = \tilde{S} = S_{\text{INV}}(g\phi)/g^2 + \int (\partial^\mu \bar{c} \partial_\mu c + i g L \Psi_L c - i g \bar{\Psi}_L c \bar{L}) \quad (32)$$

En el proceso de renormalización, los términos necesarios para hacer finita la teoría son generados por la acción desnuda \tilde{S}_0 , la cual a su vez es solución de (30) y (31).

La expresión más general para \tilde{S}_0 en 3+1 dimensiones consistente con (30) es de la forma

$$\tilde{S}_0(\phi) = S_0(\phi) + \int (\partial^\mu \bar{c} \partial_\mu c + i g L \Psi_L c - i g \bar{\Psi}_L c \bar{L}) \quad (33)$$

El hecho que \tilde{S} debe satisfacer la ec.(31) implica que

$$\int \left[- \partial_\mu \frac{\delta S_0}{\delta A_\mu} + \frac{\delta S_0}{\delta \Theta} + \frac{\delta S_0}{\delta \Psi_L} i g \Psi_L - i g \bar{\Psi}_L \frac{\delta S_0}{\delta \Psi_L} \right] c = 0 \quad (34)$$

por lo que $S_0(\phi)$ debe ser invariante ante transformaciones de calibre quirales

$$S_0(\phi) = \frac{Zg}{g^2} S_{\text{INV}}(g Z_\phi^{1/2} \phi)$$

$$S_{\text{INV}} = - \frac{Z_1 F^2}{4} + \frac{m^2}{2} Z_4 (\partial_\mu \Theta - A_\mu)^2 + i \bar{\Psi}_L D^\circ \Psi_L$$

$$D^\circ = \gamma^\mu (Zg \partial_\mu - i g Z_1 A_\mu) = Zg \gamma^\mu (\partial_\mu - i g \frac{Z_1}{Z} A_\mu) \quad (35)$$

Del hecho que \tilde{S}_0 debe ser solución de (31) sigue que $Z_1 = Z_2$ y $Zg = Z_3$, y entonces se puede expresar en términos de cantidades desnudas definidas por

$$g^2 = Z_3 g_0^2; (A_{\mu 0}, \Theta_0) = Z_3^{1/2} (A_{\mu}, \Theta) \quad ; \quad m_0 = \frac{Z_4}{Z_3} m^2$$

$$(\Psi_{L0}, \bar{\Psi}_{L0}) = Z_1^{1/2} (\Psi_L, \bar{\Psi}_L)$$

$$(L_0, \bar{L}_0, c_0) = \left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^{1/4} (L, \bar{L}, c) \quad ; \quad \bar{c}_0 = \left(\frac{Z_3}{Z_4}\right)^{1/4} c$$

De acuerdo con ref.(7), el uso de las identidades (31) orden por orden de perturbación asegura la finitud de la teoría.

Queda así demostrada la renormalizabilidad del modelo abeliano quirral suponiendo, tal como se muestra en ref.(8), que la anomalía no se renormaliza.

REFERENCIAS

- 1.- K. Fujikawa- Phys. Rev. D 29, 285 (1984); 21, 2848 (1980); 22, 1499 (1980) y Phys. Rev. Lett. 42, 1195 (1979)
- 2.- I.Tsutsui- Phys. Rev. D, 40, 3543 (1989)
- 3.- R.Jackiw and R. Rajaraman- Phys.Rev.Lett., 54, 1219 (1985)
- 4.- A. Della Selva, L.Maspero and G. Thompson- Phys.Rev.D, 37, 2347 (1988)
- 5.- M.V.Manías, M.C.von Reichenbach, F.Schaposnik and M.Trobo, J.Math. Phys., 28, 1632 (1987)
- 6.- R. Banerjee- Phys.Rev.Lett., 56, 1889 (1986)
- 7.- H. Osborn- Lectures on gauge theory methods- DAMTP/86-14
- 8.- D.Issler- Preprint SLAC-PUB-4943, March 1990

CEILAP
CITEFA CONICET
ZUFRIATEGUI Y VARELA
1603 VILLA MARTELLI
REPUBLICA ARGENTINA