

# INTERMITENCIA TEMPORAL LAMINAR-TURBULENTO EN SISTEMAS HIBRIDOS ELECTROOPTICOS REALIMENTADOS

M.Alonso, R. D'Angelo, E. Izaguirre

*Laboratorio de Láseres Atómicos, Centro de Investigaciones en Láseres y Aplicaciones, Instituto de Investigaciones Científicas y Técnicas de las Fuerzas Armadas y CONICET, Zufriategui 4380, 1603 Villa Martelli, Buenos Aires.*

Hector L. Mancini

*Laboratorio de Láseres Atómicos, Centro de Investigaciones en Láseres y Aplicaciones, Instituto de Investigaciones Científicas y Técnicas de las Fuerzas Armadas y CONICET, Zufriategui 4380, 1603 Villa Martelli, Buenos Aires. Laboratorio de Optoelectrónica y Láser, Escuela de Física, Universidad Nacional de San Luis, Chacabuco y Pedernera. 5700 San Luis.*

La aparición de intermitencia temporal en sistemas representables por mapas unidimensionales es conocida en dinámica de fluidos, donde además ha sido verificada experimentalmente. Este trabajo presenta resultados obtenidos numéricamente en un sistema electroóptico realimentado, cuya dinámica es descrita sin aproximaciones por un mapa armónico cosinusoidal. En particular se muestran las condiciones de intermitencia a uno y tres estados estables, y la dependencia de la longitud de la región laminar en función de la diferencia respecto al valor crítico del parámetro de control. También se presentan las características de la salida del sistema en función del tiempo y de la diferencia respecto de ese valor crítico.

## INTRODUCCION

La aparición de intermitencia temporal como etapa de transición a la turbulencia, ha sido observada en fluidos convectivos y analizada en trabajos pioneros de Pomeau y Manneville [1].

También ha sido observada y analizada en otros contextos y en relación a sistemas que producen ruido  $1/f$  [2]. En particular ha sido observada intermitencia de tipo I en sistemas híbridos electroópticos, donde se presenta en condiciones que resultan relativamente sencillas de reproducir y analizar, y con características similares a las que se producen numéricamente en el mapa logístico, el sistema discreto más simple y conocido.

El estudio teórico de bifurcaciones tangentes inversas explica satisfactoriamente el comportamiento de estos sistemas, tanto los que admiten una representación dinámica simple, cuanto aquellos más complejos como el modelo de Lorenz [2]. En una bifurcación de este tipo, al acercarse el valor del parámetro de control al valor crítico ( $R_c$ ) para el cual un estado estable (simple o múltiple) se desordena a un estado caótico, el sistema se caracteriza por presentar un comportamiento que muestra interrupciones de duración finita en su comportamiento regular.

Durante un cierto tiempo, que se suele denominar "laminaridad" en obvia alusión al comportamiento de fluidos, el sistema mantiene su salida en un estado estable. Esta laminaridad se ve interrumpida bruscamente por una serie de impulsos denominados "burst", cuya amplitud es caótica y cuyo número depende de la diferencia del parámetro de control respecto de su valor crítico. Una vez finalizada esta secuencia, el sistema retorna a oscilar en sus estados regulares para ese valor del parámetro (un "chasquido" interrumpe una fase laminar; al cesar da comienzo otra, y así sucesivamente).

El tiempo que transcurre entre una interrupción y otra es aleatorio, mucho mayor y no correlacionado con el tiempo propio de las oscilaciones correspondientes al estado laminar. Este tiempo, que da la duración de la región, aumenta al acercarse el parámetro de control  $R$  a  $R_c$ , se vuelve infinito cuando se ingresa en la región laminar ( $R > R_c$ ). Esta situación puede verse en la Fig. 1, en la cual  $l_i$  representa la longitud (en número de impulsos o su equivalente en tiempo) de la región laminar.

El presente trabajo muestra, en primer lugar, el comportamiento temporal del sistema híbrido electroóptico cuando se aproxima a una bifurcación tangente inversa, en función de la diferencia entre el valor del

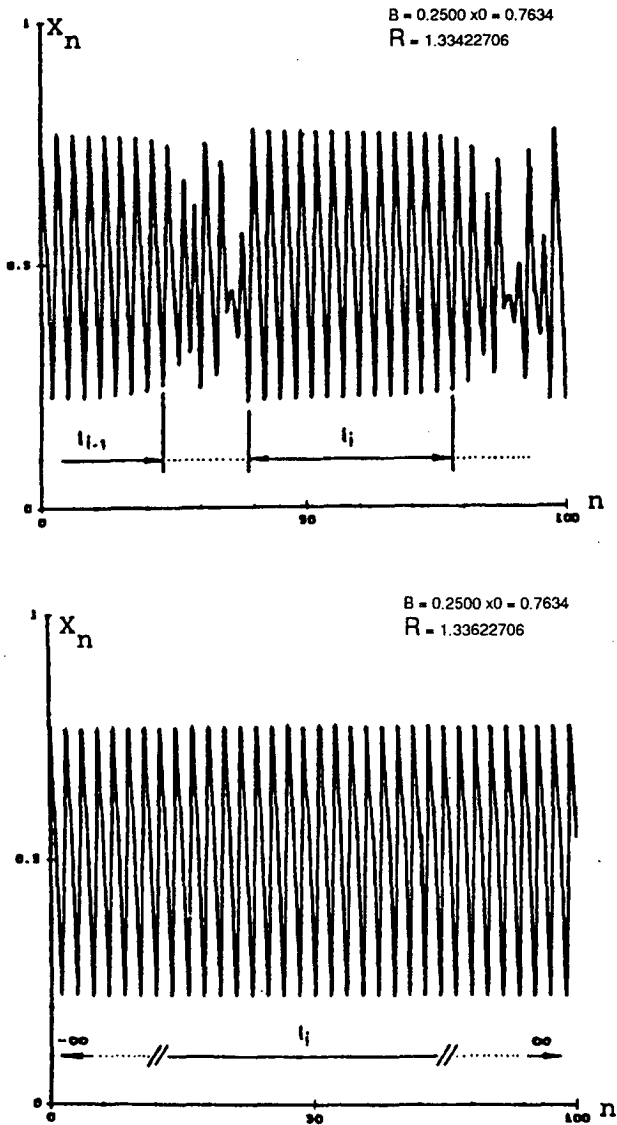


Fig.1 Salida "temporal" para dos valores del parámetro  $R$  en la vecindad de  $R_c$ , uno inferior mostrando la interrupción de la región laminar, y el otro en la región laminar. Eje vertical amplitudes  $X_{n+1}$  en la iteración  $n+1$  en función del número de iteraciones. Se ha indicado con  $l_i$ , la duración de la  $i$ ésima región laminar.

parámetro de control y el valor crítico, obtenidos por simulación numérica para los casos en que el sistema sale de una región caótica a uno, dos y tres estados estables. Se presentan además, los resultados obtenidos en el cálculo de la longitud de los estados

laminares como función de la diferencia respecto al valor crítico en el caso de los tres estados estables. Cabe destacar que el mapa que modela el comportamiento del sistema no es unimodal [3] (puede introducir más de un máximo en el intervalo y además asimetrizar la función de transferencia), y por ello, si bien localmente se mantienen las propiedades de universalidad y escala que otros autores han obtenido en relación al mapa logístico, este mapa no es reducible a aquél. De esta manera se obtienen bifurcaciones tangentes a uno y dos estados estables, que el mapa logístico no posee.

Un análisis sobre el comportamiento asintótico del sistema híbrido electroóptico en función de los distintos parámetros que ese sistema posee ( $R, B$ , y  $\lambda$ ), y la influencia de estos sobre el mapa que describe su comportamiento, puede verse en la comunicación de H.Mancini, D. Maza y D.Valladares, "Dinámica no lineal en sistemas realimentados", en el presente volumen [4].

### ANÁLISIS DE LA ZONA DE INTERMITENCIA

El sistema híbrido electroóptico ha sido analizado en trabajos anteriores, donde se mostró la posibilidad de obtener intermitencia Tipo I en el caso de salida del

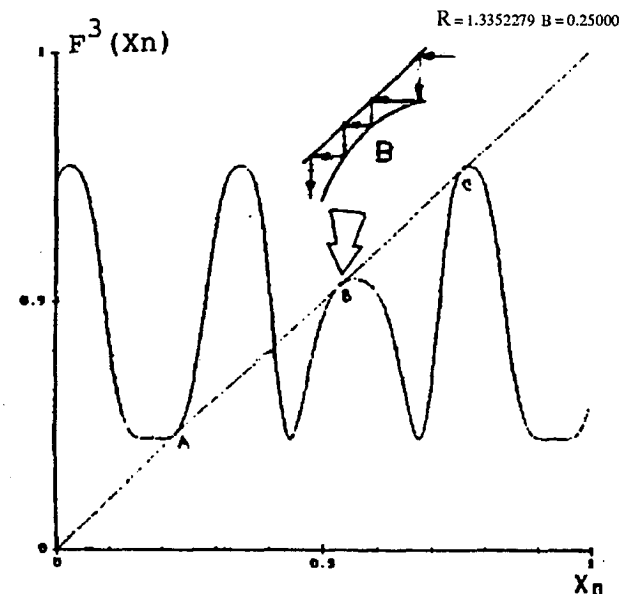


Fig. 2.a. Diagrama asintótico en función del parámetro de control. Eje vertical: salida luego de eliminado el transitorio (300 iteraciones)  $X_n$  correspondiente a  $n = \infty$ , en función del parámetro de control, en la vecindad de  $R = R_c$ .

caos a tres estados estables,[3]. Para describir este proceso, (fig 2a), resulta necesario observar el comportamiento del sistema referido a tres iteraciones-trás, es decir analizando la función iterada 3 veces:

$$F^3(X) = F\{F[F(X)]\} \quad (1)$$

La salida correspondiente al pulso  $n+3, (X_{n+3})$ , en función de la salida al pulso  $n (X_n)$ , será para nuestro sistema:

$$X_{n+3} = F^3(X_n, R, B, \dots) \quad (2)$$

Donde con  $F^3(X_n, R, B, \dots)$  se pretende indicar que la salida al tiempo  $n+3$  se obtiene como función de la salida al tiempo  $n$  (tres iteraciones antes), y de los parámetros del sistema, de los cuales interesa aquí en función del cual se produce el valor crítico correspondiente a la bifurcación tangente inversa ( $R$ ). Los demás valores permanecen fijos para la experiencia, y no afectan al comportamiento que se describe. En algunas de las figuras de este trabajo aparecen los valores del parámetro  $B$ , que en este trabajo sólo importa en la ubicación de la bifurcación. Una discusión de su relevancia puede encontrarse en la referencia [4].

En la fig 2b, se muestra el mapa  $R = R_c$ . Para este valor crítico de  $R$ , la función iterada tres veces es

tangente a la bisectriz y se originan 6 puntos fijos, de los cuales 3 son estables y corresponden a los valores de amplitud que tomará el sistema en la región laminar. Para valores de  $R < R_c$ , aparece el caso que produce la intermitencia. El mapa no tiene puntos fijos estables, pero las trayectorias son atrapadas y la salida permanece en valores cercanos al correspondiente al punto de tangencia  $X_c$ , requiriéndose numerosas iteraciones para moverse a través del canal formado por la función del mapa y la bisectriz (Fig 2b, detalle). Esto conduce a la formación de regiones laminares para valores de  $R$  ligeramente inferiores a  $R_c$ , en una zona para la cual el comportamiento debiera ser caótico. Después de abandonar el canal, el movimiento se vuelve caótico hasta que el sistema es reinyectado nuevamente en la vecindad de  $X_c$ , dando comienzo otra secuencia de movimiento regular.

El comportamiento temporal del sistema puede observarse para distintos valores de  $R$ , ligeramente inferiores a  $R_c$ , en las figuras 3a, 3b, y registrando las sucesivas iteraciones que equivalen a la respuesta temporal del sistema. En las figuras puede verse que la longitud promedio de las regiones laminares  $l_m$  se incrementa a medida que  $R$  tiende a  $R_c$ . Para el valor correspondiente a  $R_c$ , se aprecia el comportamiento sin intermitencias.

La secuencia mostrada corresponde a la ventana de tres estados mostrada en la figura 2a., comportamiento que también puede ser observado en el mapa logístico [5]. A pesar de esto, el sistema electroóptico presenta una dinámica mucho más rica y pueden observarse salidas desde el caos a uno, dos y tres estados estables mediante bifurcaciones tangentes inversas, para intervalos del parámetro de control que permiten una más fácil implementación experimental.

La figura 4 muestra un diagrama temporal para valores del parámetro del control  $R$  cercanos a una bifurcación a un solo estado estable. En este caso el análisis se debe realizar directamente con la función  $F$ , pues corresponde a una tangencia en la primera iteración. En todas las figuras aparecen números pequeños que indican el valor de  $B$ , que, como se dijo, no es relevante en este contexto, y la condición inicial  $X_0$ .

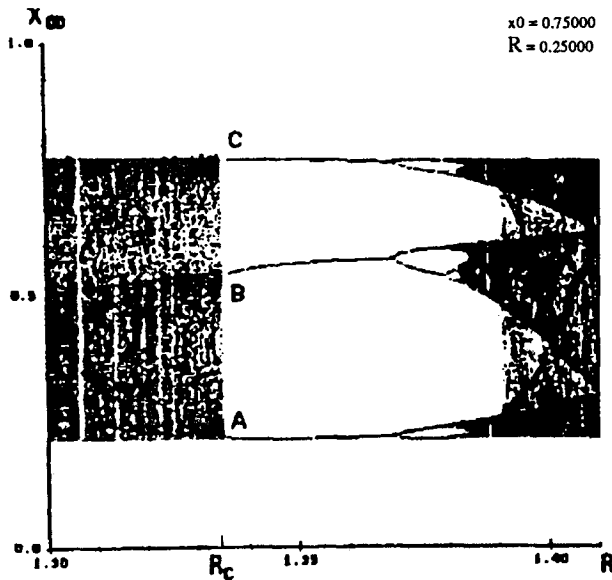
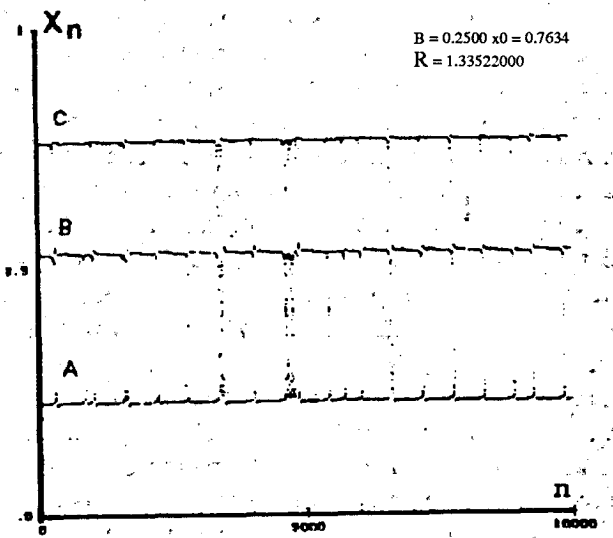
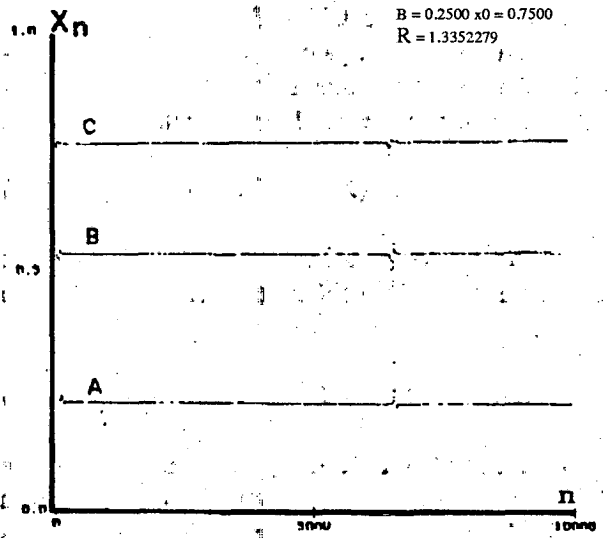


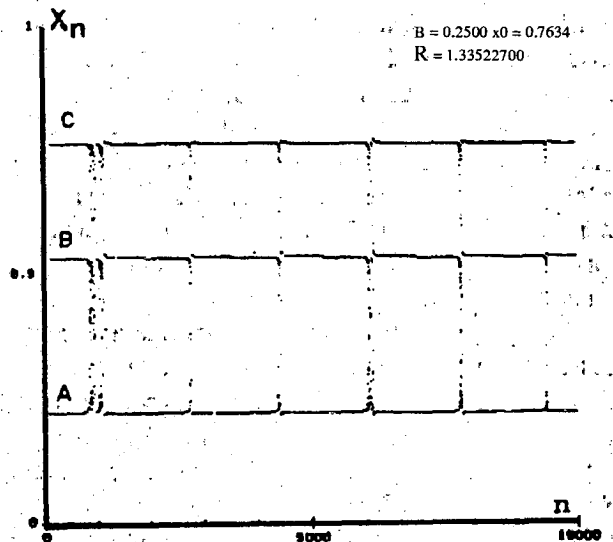
Fig. 2 b. Mapa correspondiente a la función iterada 3 veces, donde aparecen los puntos de tangencia correspondientes a los tres estados estables.



a)



b)



c)

Fig. 3. Comportamiento temporal del sistema al aproximarse el valor del parámetro de control al valor crítico, para tres valores de  $R - R_c$ , (a)  $R - R_c = 7.9 \cdot 10^{-6}$ , (b)  $R - R_c = 7.0 \cdot 10^{-6}$ , (c)  $R - R_c = 10^{-7}$ . Eje horizontal: número de iteraciones.

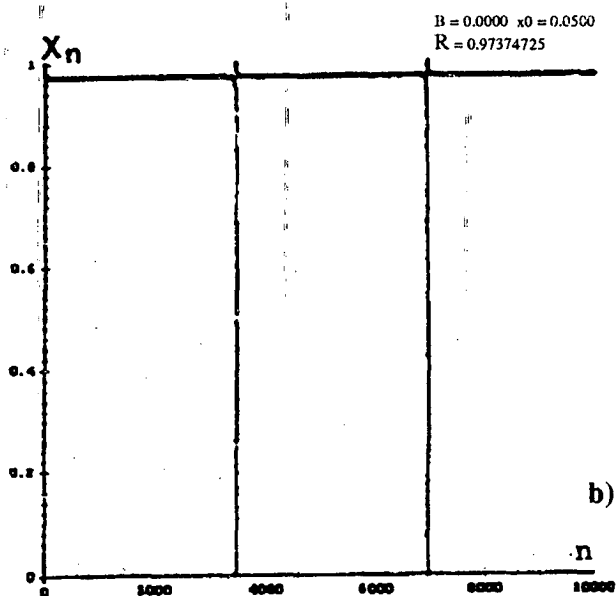
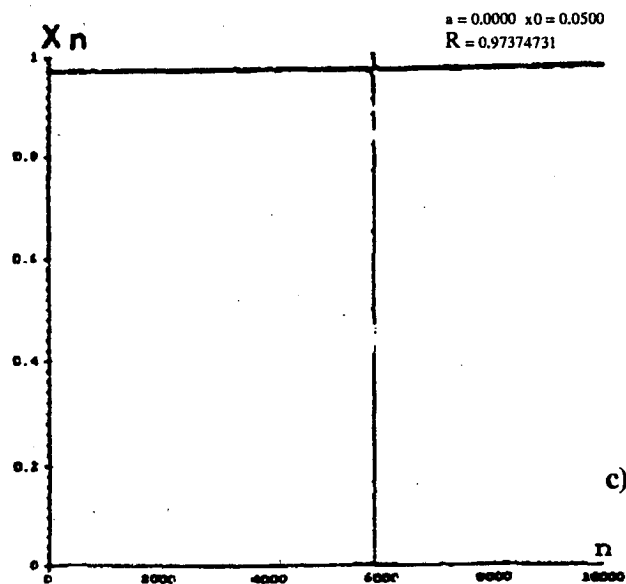
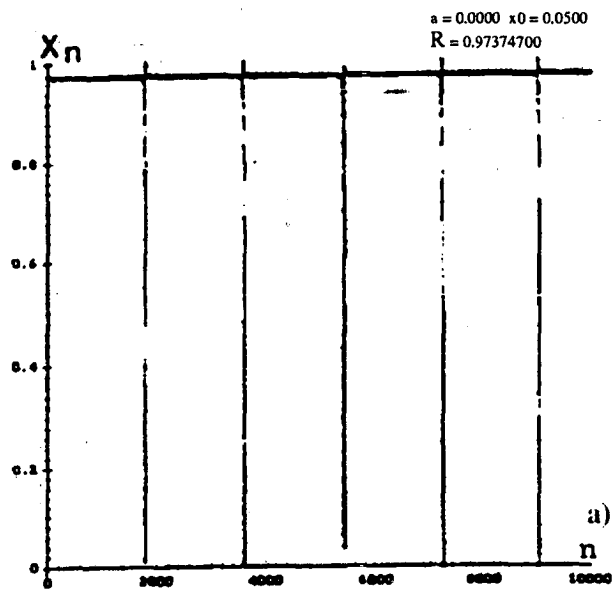


Fig. 4. Comportamiento temporal para un valor del parámetro inferior al crítico en el caso de un solo estado estable. (a)  $R - R_c = 3.1 \times 10^{-7}$ , (b)  $R - R_c = 2.5 \times 10^{-7}$ , (c)  $R$  muy próximo a  $R_c$ . Eje vertical amplitud  $X_n$ , Eje horizontal número de iteraciones.

## LONGITUD DE LAS REGIONES LAMINARES

El cálculo de la longitud media de tránsito por el canal  $l_m$ , en función de la distancia ( $R_c - R$ ), se realiza desarrollando la función iterada tres veces (para el caso de tres estados) alrededor del punto de tangencia ( $X=X_c$ ), considerándolo como un punto fijo de la función y recordando que la pendiente de ésta coincide con la bisectriz. Se puede así obtener una relación de recurrencia para las sucesivas iteraciones y reemplazarla por una ecuación diferencial [5]. La integración de esa ecuación da una duración (el número de pasos de iteración) que transcurre desde que comienza un proceso a la entrada del canal, hasta que llega a la salida. El tiempo de tránsito medio se obtiene promediando sobre la distribución de probabilidades de reinyección en la región laminar. Puede demostrarse [6] que esa longitud se puede aproximar por:

$$l_m = \pi/2 \cdot a \cdot (R - R_c)^{-1/2} \quad (3)$$

donde  $a$  es una constante.

Esta relación tiene analogía con los procesos termodinámicos en zonas próximas a las transiciones de fase continuas, donde se observa que las variables termodinámicas presentan una longitud de correlación dependiente de la temperatura ( $T - T_c$ ) del mismo tipo. La figura 5 muestra el cálculo de las longitudes medias de la región laminar en función de la diferencia respecto del valor crítico para el sistema que nos ocupa, que concuerda con la teoría. Puede verse en esa figura cómo va incrementándose la dispersión de los valores al alejarnos de la región  $R=R_c$ . Una salida típica obtenida en el experimento real puede observarse en el oscilograma de la figura 6.

## CONCLUSIONES

El sistema híbrido electroóptico presenta muchas más posibilidades dinámicas que las normalmente analizadas con el mapa logístico. En este trabajo se da cuenta de las salidas de regiones caóticas mediante intermitencias del Tipo I a uno, dos y tres estados estables. El comportamiento temporal en el experimento numérico verifica las previsiones teóricas, y el experimento real reproduce las salidas correspondientes a los valores del parámetro.

No parece haber diferencia en el comportamiento analizado para los tres casos, en lo que respecta

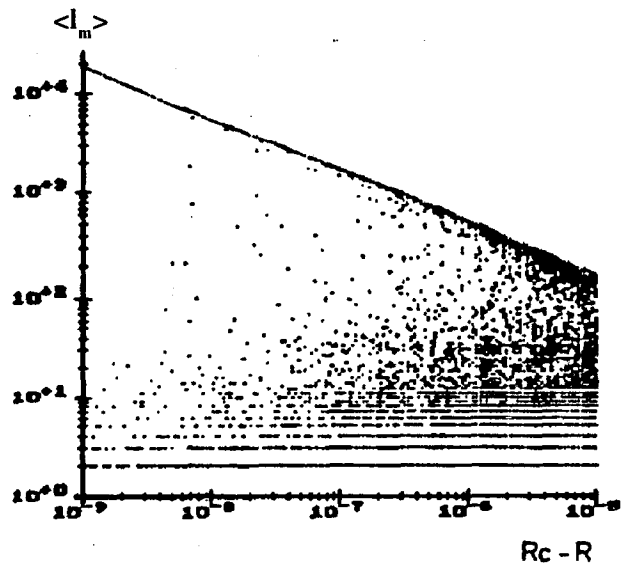


Fig. 5. Representación de las longitudes laminares  $l_m$  en función de la diferencia respecto al valor crítico para el caso de 3 estados estables. La recta que muestra el límite superior de la dispersión de valores permite calcular el exponente de la ecuación(3). Cada punto representa una longitud calculada, pudiendo observarse la mayor dispersión de valores para valores de  $R - R_c$  más grandes.

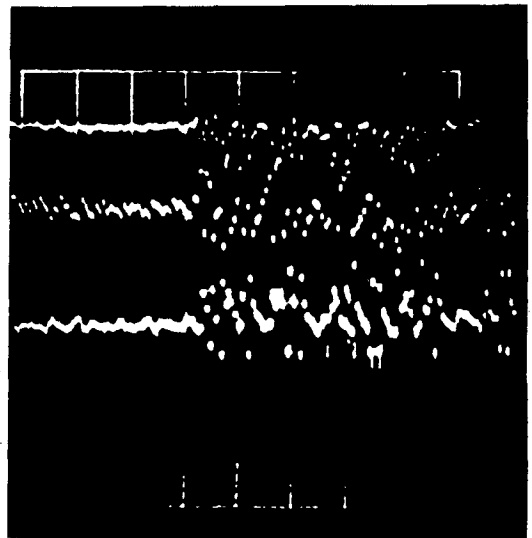


Fig.6. Oscilograma experimental obtenido para una distancia pequeña al valor crítico, mostrando caos y laminaridad. Eje vertical: amplitud de salida (volts). Eje horizontal: tiempos correspondientes a número de iteraciones.

al orden del exponente de la ecuación (3). Falta realizar un análisis estadístico sobre las probabilidades

de reinyección, para determinar si son similares en los tres casos.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] P. Manneville and Y. Pomeau, Phys Lett. 57A, 1 (1979). Ver también de los mismos autores Physica 1D, 219, (1980); Comn.Math.Phys. 74, 189 (1980), y referencias en Hao Bai Lin, "CHAOS", World Scientific Publishing Co. (1985).
- [2] H.G.Shuster "DETERMINISTIC CHAOS", Physik Verlag (1984), y referencias Cap. 4.
- [3] H.Mancini, E.Izaguirre, M.Alonso, R.D'Angelo, Proceedings of the Nonlinear Dynamics in Optical Systems Conference, Oklahoma, USA 1990.
- [4] H. Mancini, D. Maza, D. Valladares. Anales AFA volumen 2 (a publicarse).
- [5] J.Hirsch, B. Huberman, D.Scalapino, Phys. Rev. A25, 519 (1982), N. Rassband, "CHAOTIC DYNAMICS OF NONLINEAR SYSTEMS", J. Wyley and Sons, (1990).
- [6] Ver excelente discusión en P.Bergé, Y.Pomeau, C. Vidal en "L'ORDRE DANS LE CHAOS", Hermman Ed. (1984).

CEILAP  
CITEFA - CONICET  
ZUFRIATEGUI Y VARELA  
1603 VILLA MARTELLI  
REPUBLICA ARGENTINA