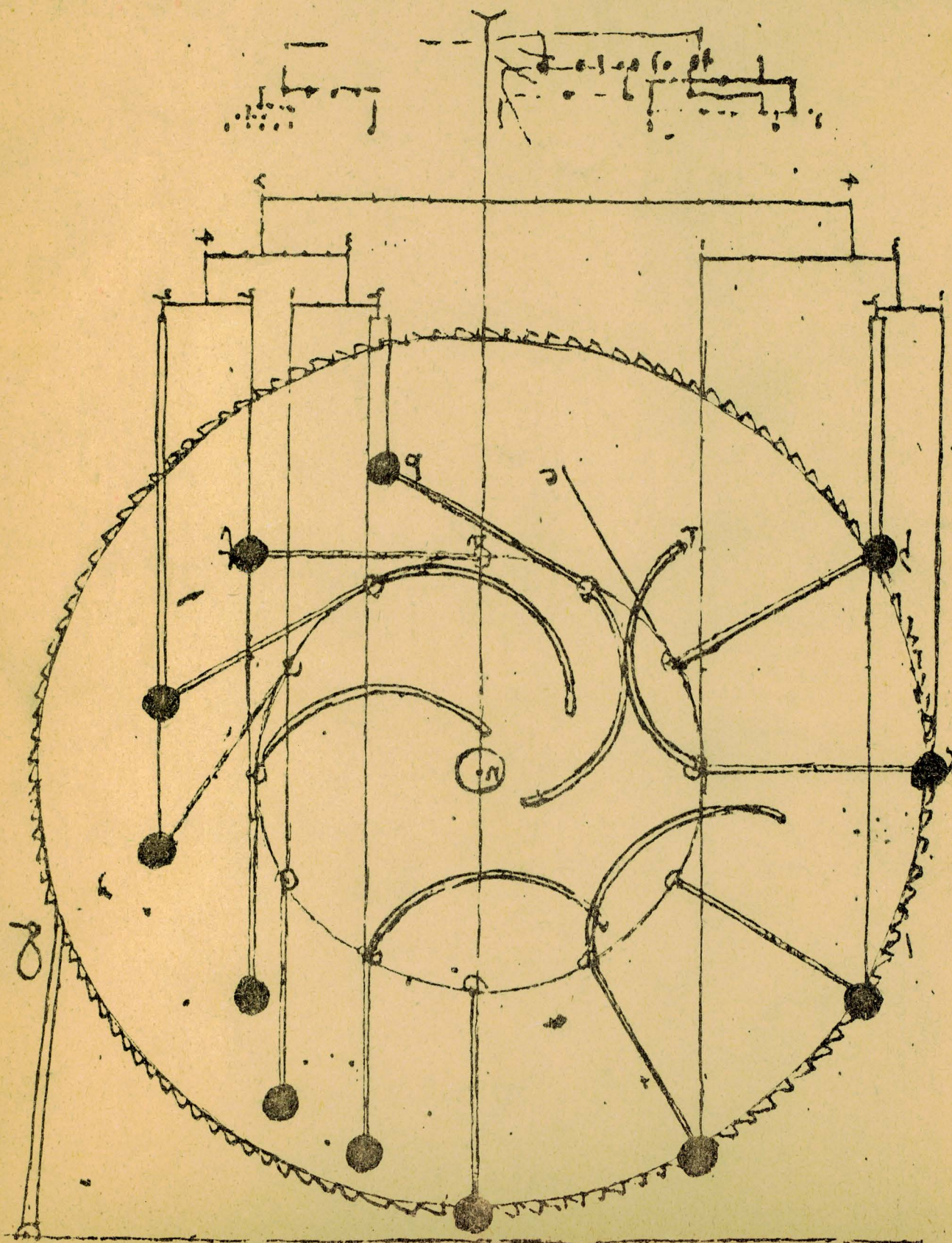


INTERACCION

La revista de los estudiantes de Física, Matemática y Computación

Año IV N°8

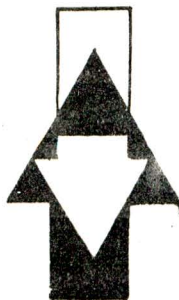


NOTES ON THE

PROGRESS OF THE WORK DURING THE YEAR 1900

1900





INTERACCION es una publicación de difusión científica, editada por un grupo de estudiantes de Física, Matemática y Computación de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Buenos Aires.

Registro de la Propiedad
Intelectual en trámite

(c) INTERACCION 1982

La responsabilidad de los artículos firmados corresponde exclusivamente a los autores.

Sumario:

Editorial	2
Física Emil Wolf	
Sobre la naturaleza de la luz	4
Universidad	
Concursos decentes	10
Computación	
Histeria de la computación	12
Universidad	
Ingreso '82	14
Matemática	
Introducción al cálculo de diferencias finitas	16
Informe Lic. Roberto Daniel Lezano	
I.N.T.I. División Optica	20
Reportaje	
Doctor Carlos Ruiz: Topología y psicoanálisis	25
Universidad	
Leyes universitarias	33
Matemática	
Teorema de Weirstrass	41
Epistemología	
Epistemo... ¿qué?	45
Facultad	
Física, carrera de obstáculos	47
Proyección cultural	
Feria del Libro: vitrina de un negocio?	50
Problemas	
Un momento de meditación	52

Editorial

Es y fue la tónica de INTERACCION, como canal de expresión de nuestras inquietudes estudiantiles, reflejar la actualidad de la Facultad en sus diferentes aspectos: científico, cultural, la investigación dentro y fuera de su ámbito, su relación con otros centros educativos y de investigación en el país, los programas de estudio y su instrumentación, etc., siempre desde el punto de vista de informar y orientar acerca de las perspectivas que se le presentan (o no) al estudiante de ciencias exactas. La premisa es dar, como parte integrante de la vida universitaria, nuestro aporte al mejoramiento del nivel académico y ampliación de perspectivas, muy necesarios para el crecimiento esperado del país.

¿Porqué decimos esto? ¿Es, acaso, una declaración de principios? No tanto. Solo que nos preceden, en lo que va del año, hechos que no podemos pasar por alto, principalmente la guerra de las Malvinas, que condujo al planteo del enfrentamiento contra el imperia-
lismo yanqui-inglés y a la necesidad de ejercitar una verdadera soberanía en todos los planos (política, económica, territorial, cultural, etc.), y, en la actualidad, el replanteo del tipo de país que queremos los argentinos y, con él, qué universidad lo va a acompañar. Y aquí es donde entramos nosotros, los estudiantes. Veamos que tenemos:

Asistimos a la imposición inconsulta de una política educativa ajena a las expectativas e intereses nacionales, imposición que fue la única manera de poder implementar una orientación dirigida consciente y sistemáticamente a desmantelar la educación universitaria (recordemos: Universidad de Luján, Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos, etc.) para ponerla de acuerdo con un proyecto de país elaborado con suma estrechez mental y amplitud de bolsillo desde el Ministerio de Economía. Todo apuntó entonces a reducir y achatar el sistema educativo para que apenas preparara los pocos recursos humanos con la estricta capacitación necesaria para hacer marchar un aparato productivo replegado (o lo poco que queda de él). Léase, entonces, cierre de universidades, supresión de carreras o dilatación infinita de las mismas, reducción de cupos, sistema de ingreso irracional e injusto, arancelamiento de la enseñanza, caza de brujas entre docentes e investigadores, concursos de instrumentación y validez dudosas, reducción del presupuesto -la última, julio de 1982, de aproximadamente el 22 %-, etc.

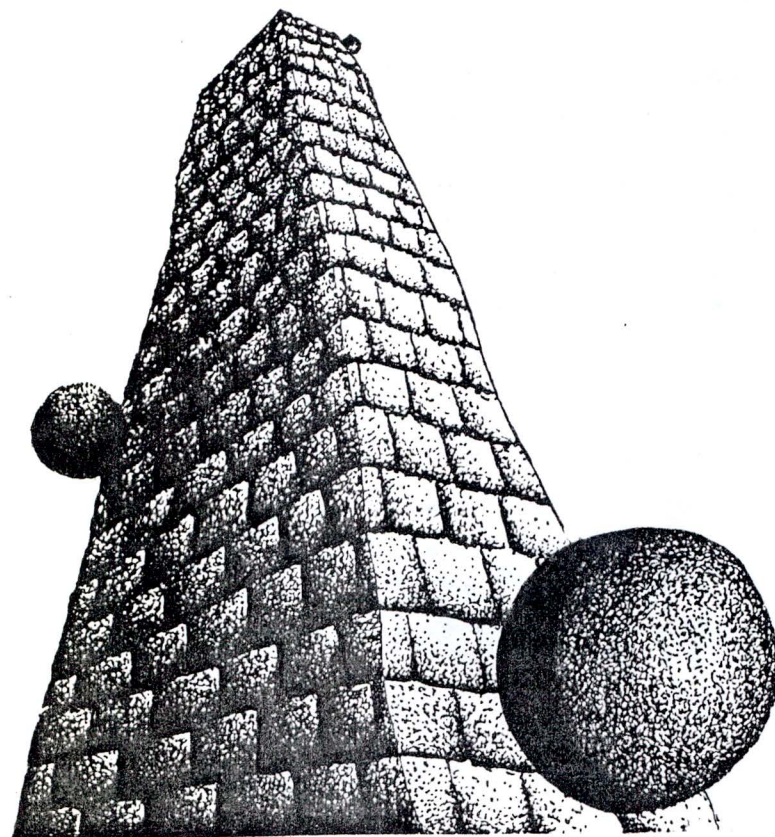
Aspiramos a una universidad democrática, autónoma, con un proyecto científico estructurado en función de las necesidades del país, en la que la libertad de expresión, de creación y de participación sean el pan nuestro de cada día.

Es nuestra contribución al debate que se inicia y al cual, creemos, nadie debe permanecer ajeno.

Como revista estudiantil de Ciencias Exactas, su funcionamiento debe darse dentro de la Facultad, con plena libertad de circulación; esto hace al clima de democracia que se debe vivir en la universidad; sin él, difícil pretender el progreso y evolución de la misma. INTERACCION invita al acercamiento de los estudiantes de física, matemáticas y computación a su revista, acercamiento que se facilitaría en ese marco.

Queremos comentar que además de la revista en sí misma, encaramos nuevas y diferentes tareas: conferencias (ver artículo dedicado a la epistemología), festivales (como el próximo a realizar en conjunto con las revistas Enlaces (químicos) y Doble Hélice (biólogos), con lo mejor de nuestra música joven), estudios acerca de la realidad científico-técnica y la universidad, etc.

Te esperamos!



Sobre la naturaleza de la luz

Segunda Parte

Emil Wolf

A pesar de que la introducción de Planck al concepto de cuanto de energía llevo a una de las más grandes revoluciones científicas de todos los tiempos, su teoría no atrajo la atención en un primer momento.

Uno de los primeros científicos que reconoció que el descubrimiento de Planck iniciaba una nueva era en la física fue Albert Einstein, un hombre joven que alrededor de 1902 tenía un puesto en la oficina de patentes de Suiza.

En la primavera de 1905, Einstein, bastante desconocido por entonces como científico, escribió a su antiguo compañero y amigo, Conrad Habicht, pidiéndole una copia de una tesis que éste había completado recientemente. Uno de los pasajes de esa carta dice: "¿Por qué no me mandaste tu tesis? No sabes que soy una de las pocas personas que la leería con interés y placer? Te puedo prometer a cambio cuatro trabajos, el primero de los cuales... es muy revolucionario...".

Tres de los cuatro trabajos que menciona Einstein en su carta fueron pu-

blicados en el volumen 17 (cuarta serie) de la publicación Annalen der Physik, en 1905 y fueron entregados en un lapso de tres meses y medio. Como Max Born dijo, éste es uno de los más valiosos volúmenes de la literatura científica, pues cada uno de los tres trabajos de Einstein es reconocido como una obra maestra y punto de partida para una nueva rama de la física. En la terminología de hoy en día los temas de los tres trabajos en el orden en que aparecen son:

- i) La naturaleza corpuscular de la radiación.
- ii) La teoría del movimiento browniano.
- iii) La teoría especial de la relatividad.

Sólo trataremos aquí el primer tema, ya que los otros dos no están comprendidos dentro de lo que concierne a este artículo. Sin embargo, parece apropiado mencionar que en el segundo trabajo, probablemente, hizo más que ningún otro para convencer a los físicos acerca de la realidad de los átomos y moléculas, y del papel fundamental que juega la teoría de la probabilidad en la interpretación de las leyes básicas de la física. En el tercer trabajo, Einstein dió los primeros pasos por los cuales las nociones intuitivas de espacio y tiempo absolutos fueron abolidas y reemplazadas por el concepto de continuo tetradimensional espacio-tiempo. Este paso tuvo sus más profundas consecuencias en nuestro entendimiento de las leyes físicas fundamentales del universo.

El título del primer trabajo es: "Acercas de un punto de vista heurístico sobre la creación y conversión de la luz". Es este el trabajo al cual Einstein había calificado como muy re-



Albert Einstein - 1905.

volucionario en su carta a Conrad Habicht. En libros de estudio modernos se lo refiere usualmente como el trabajo de Einstein sobre efectos fotoeléctricos. Actualmente, este trabajo contiene bastante más. De hecho, la discusión sobre efecto fotoeléctrico, cubre tan solo cuatro páginas, pero como en todos sus escritos, Einstein consiguió expresar la raíz del problema en unas pocas líneas, con su lenguaje simple y notablemente libre de complicados términos matemáticos.

Esencialmente, lo que Einstein hizo en este trabajo fue poner en evidencia de que no solo que los procesos de emisión y absorción de radiación ocurren en discretas cantidades de energía (como parece haber quedado establecido por Planck) sino que la radiación en sí misma se comporta en ciertas circunstancias como una colección de partículas que, en el lenguaje moderno, llamamos fotones. Consecuentemente, en este papel, Einstein introduce la teoría corpuscular de la luz, primero sostenida por Newton en el siglo XVII. Como ya hemos notado, la teoría corpuscular había quedado totalmente desacreditada con la teoría ondulatoria de Fresnel,

formulada casi noventa años antes de la publicación del papel de Einstein; y la teoría ondulatoria de la luz parece haber sido puesta en base sólida por Maxwell unos cuarenta años antes del trabajo de Einstein.

En la introducción a su trabajo, Einstein discute el éxito de la teoría ondulatoria de la luz que trata de funciones continuas en el espacio. Luego, Einstein dice que a pesar de ello, es posible que esta teoría esté en contradicción con la experiencia si es aplicada a los fenómenos de generación y conversión de luz; y luego continúa diciendo :

"De hecho parece ser que las observaciones de la radiación del cuerpo negro, fotoluminiscencia, la producción de rayos catódicos por luz ultravioleta y otros fenómenos que involucran emisión o conversión de luz, pueden ser mejor entendidos con la suposición de que la energía de la luz está distribuida discontinuamente en el espacio. De acuerdo a la suposición, considerada aquí cuando un rayo de luz, saliendo de un punto, es propagado, la energía no se distribuye continuamente en un volumen siempre en aumento, sino que consiste de un número finito de cuantos de energía, localizados en el espacio, que se mueven sin ser divididos y que son absorbidos y emitidos como un todo".

Presentaremos ahora la esencia de algunos ejemplos dados por Einstein en apoyo de este punto de vista. Supongamos que tiramos partículas en una caja de volumen V , seleccionamos en la caja una subregión de volumen (no necesariamente pequeño). Si introducimos una partícula dentro de la caja la probabilidad de que aparezca en la subregión es claramente :

$$p(1) = \Delta V / V \quad (8)$$

Si repetimos este procedimiento n veces, y colocamos n partículas en la caja, la probabilidad de que todas las n partículas aparezcan en la subregión es

$$p(n) = (\Delta V/V)^n \quad (9)$$

Ahora, en vez de un sistema de partículas, supongamos que la caja contiene radiación en equilibrio a temperatura T . La densidad de energía del campo de radiación está dada por la ley de Planck, pero sabemos que a suficiente alta frecuencia o bajas temperaturas, puede ser aproximada por la ley de radiación de Wein. Bajo estas condiciones, la energía total de la radiación, en la caja, está dada por la fórmula

$$E = \frac{8\pi}{c} \alpha \int \nu^3 e^{-\beta(\nu/T)} d\nu \quad (10)$$

donde α y β son constantes dadas por la ecuación (6)

$$\alpha = h/c \quad \beta = h/k$$

(Interacción N°7, página 6).

Como ya hemos notado, en condiciones de equilibrio hay fluctuaciones en el campo de radiación, por lo tanto, en el curso del tiempo la energía es redistribuida a través de la caja. Consecuentemente, en la subregión elegida la energía tendrá a veces cantidades mayores o menores al valor promedio. De hecho, existe una probabilidad que en un dado instante toda la energía esté concentrada en dicha subregión.

Usando la ley de radiación de Wein (ecuación 10), y algunos principios generales de termodinámica, Einstein mostró que la probabilidad, recién mencionada, está dada por:

$$p(\forall E \in \Delta V) = (\Delta V/V)^{E/h\nu} \quad (11)$$

La comparación de estos resultados con los de la ecuación 9, muestra que esta probabilidad es la misma que si el cuerpo de radiación consistiera de n partículas, donde $n = E/h\nu$ (12)

es decir, de n partículas cada una de las cuales lleva una energía $h\nu$.

Según lo dicho por Einstein: "La radiación monocromática de baja temperatura (dentro del rango de validez de la ley de radiación de Wein), se comporta, termodinámicamente, como si consistiese de un cuanta de energía de magnitud $h\nu$ mutuamente independiente".

Otro ejemplo que Einstein da en su trabajo, -en apoyo a su visión acerca de la naturaleza corpuscular de la radiación-, es el efecto fotoeléctrico. Este fenómeno consiste en la eyección de electrones de un metal, cuando incide sobre él radiación de ondas electromagnéticas suficientemente cortas. El efecto fue descubierto en 1887 por Heinrich Hertz.

Algunos hechos curiosos acerca del efecto fotoeléctrico fueron revelados por experimentos sistemáticos llevados a cabo por P. Lenard, en el período de 1899 a 1902. Lenard descubrió que la energía de un electrón eyectado es independiente de la intensidad de la luz que ilumina la superficie del metal, pero que en cambio depende de la frecuencia de la luz, y también, que cuando la intensidad de la luz se incrementa, hay un aumento en el número de electrones eyectados, pero no en sus energías.

Las dificultades encontradas al tratar de explicar estas observaciones por medio de la teoría ondulatoria de la luz, se vuelven evidentes si recordamos que de acuerdo a esta teoría la energía llevada por la onda de luz es medida por su intensidad; como la intensidad es aumentada, hay más energía disponible para impartir a los electrones, por esto su energía debería también aumentar, contrariamente a las observaciones de Lenard.

Einstein consideró estas observaciones como una clara demostración de la

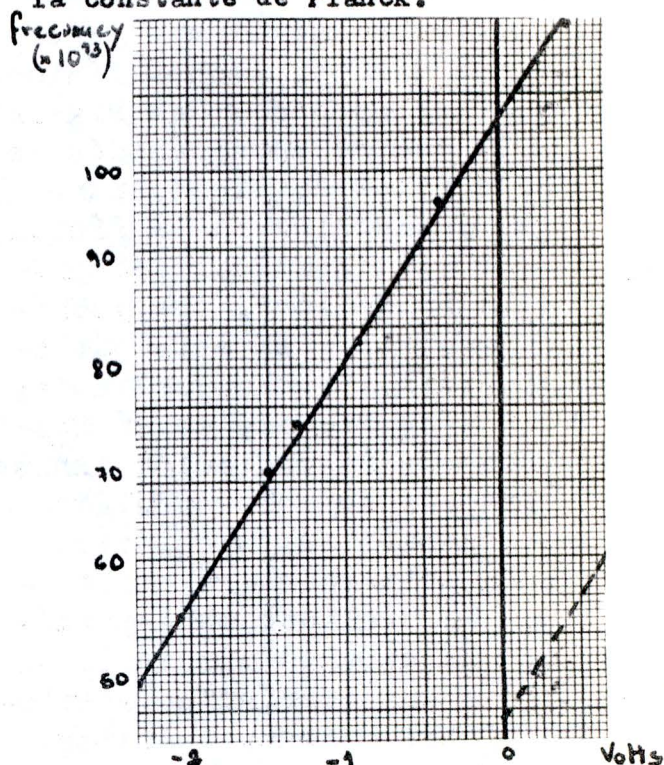
naturaleza corpuscular de la luz. Si la luz consiste de cuantos de energía cada cual de cantidad $h\nu$, los cuantos penetran en la superficie del metal y su energía es al menos parcialmente transformada en energía cinética de los electrones. La situación más simple es aquella en la cual un cuanto de luz transfiere toda su energía a un solo electrón y esta energía es suficiente para liberar al electrón. Al abandonar al metal, el electrón pierde parte de esta energía porque algún trabajo, llamémoslo W , es requerido para sacar al electrón del metal. Einstein llegó a la siguiente fórmula para la energía cinética máxima de un electrón eyectado

$$(E_{k.a.a})_{max} = h\nu - W \quad (13)$$

Esta fórmula, conocida como la ecuación fotoeléctrica de Einstein, explica rápidamente las observaciones de Lenard. Notemos que la ecuación 13, predice que la energía máxima de los fotoelectrones eyectados es una función lineal de la frecuencia, cuya pendiente es precisamente la constante de Planck. Por esto, la medición de la dependencia de la energía cinética máxima de los electrones en función de la frecuencia, puede ser utilizada para determinar dicha constante. En 1905, cuando Einstein mostró su ecuación fotoeléctrica, los estudios cuantitativos del efecto fotoeléctrico estaban en su infancia; llevó, alrededor de una década de experimentación difícil, la comprobación de la ecuación de Einstein. Fue confirmada por el trabajo de R.A. Millikan, quien comenzó a trabajar descreyendo totalmente la teoría de Einstein. En su trabajo publicado en 1949, en ocasión del 70 cumpleaños de Einstein, Millikan dijo: "Pasé 10 años de mi vida probando la ecuación de Einstein y, contrariamente a todas mis expectativas

fui obligado en 1915 a asegurar su verificación inambigua, a pesar de su irrazonabilidad, dado que parecía violar todo lo que sabíamos acerca de la interferencia de la luz".

En la fig. 1 reproducimos algunos de los datos experimentales de Millikan; estos exhiben la relación lineal predicha por Einstein en su ecuación fotoeléctrica, la pendiente de la recta es la constante de Planck.



El trabajo de 1905 de Einstein que acabamos de discutir, revela el fracaso de la clásica física en explicar ciertos fenómenos relacionados con la radiación. Esto mostró la necesidad de cambios aún más drásticos que aquellos traídos por la suposición de Planck de energía cuantizada en la absorción y emisión de osciladores. El análisis de Einstein indicó que no sólo la emisión y absorción de energía ocurre en cantidades discretas, sino que la radiación misma se comporta en ciertas ocasiones como si consistiera de corpúsculos de energía. La situación era confusa, ya que por un lado había fenó

menos -como la interferencia y la difracción de la luz- que parecían claramente demostrar la naturaleza ondulatoria de la luz, pero a la vez había otros -como el efecto fotoeléctrico- que revelan, como demostró Einstein, que la radiación tiene naturaleza corpuscular.

A pesar de la claridad y simplicidad de los argumentos de Einstein sus puntos de vista fueron firmemente opuestos en su tiempo y por largo tiempo más por muchos físicos eminentes, incluyendo a Max Planck.

En 1909, cuatro años después de su "trabajo fotoeléctrico", otro hito en el desarrollo de la física "Acerca del estado actual del problema de la radiación", fue publicado por Einstein. En esta publicación Einstein muestra que la ley de radiación de Planck, en sí misma, implica que la radiación exhibe características no solo ondulatorias sino también corpusculares. Fue ésta la primera clara explicación sobre la dualidad onda-partícula, que muchos años más tarde se volvería una característica aceptada de la física moderna cuántica.

La esencia del argumento de Einstein puede ser descrito así:

Consideremos un cuerpo negro radiando a temperatura T en una cavidad térmicamente aislada de volumen V . Fijemos ahora nuestra atención en una subregión de volumen ΔV , dentro de la cavidad. Como notamos precedentemente, hay fluctuaciones de energía en esta subregión causadas por el hecho de que la radiación entra y sale de ella. Einstein averiguó acerca de la magnitud de estas fluctuaciones.

Sea E la cantidad de energía en esta subregión, en un instante fijo del tiempo, en un rango de frecuen-

cias $(\nu, \nu + d\nu)$. La medida más simple de las fluctuaciones de energía es la varianza

$$(\Delta E)^2 = (E - \bar{E})^2 \quad (14)$$

donde la barra representa el promedio estadístico.

Einstein, primero demostró sobre la base de la termodinámica que la varianza puede ser expresada por una fórmula, de la forma:

$$(\Delta E)^2 = kT \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \quad (15)$$

donde, como antes, k es la constante de Boltzmann.

Ahora, de acuerdo con la ley de radiación de Planck

$$\begin{aligned} u_\nu(T) &= \frac{8\pi}{c} K_\nu(T) \\ &= \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \end{aligned}$$

la energía promedio en la subregión ΔV está dada por la fórmula

$$\bar{E} = z \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (16)$$

donde:
$$z = \frac{8\pi \Delta V}{c^3} \nu^2 \Delta \nu \quad (17)$$

Sustituyendo de la ecuación 16 en la 15, Einstein obtiene la siguiente expresión para la varianza

$$(\Delta E)^2 = h\nu \bar{E} + 1/z \cdot \bar{E}^2 \quad (18)$$

La ecuación 18 es conocida hoy en día como la fórmula de Einstein para la fluctuación de la radiación del cuerpo negro.

De esta fórmula, Einstein sacó conclusiones de largo alcance. El argumentaba que si el campo de radiación, dentro de una cavidad, consiste puramente de ondas electromagnéticas -como la gran mayoría de los científicos de la época pensaba-, uno puede pensar las fluctuaciones de energía de la siguiente manera: el campo de radiación puede ser representado por una mezcla de ondas planas (modos normales) con diferentes amplitudes diferentes fases y diferentes esta-

dos de polarización, propagados en todas las direcciones posibles. Las fluctuaciones de energía en la subregión ΔV , pueden ser consideradas como una manifestación de efectos de interferencia entre las distintas ondas planas. Einstein indicó -por medio de un argumento simple- que las fluctuaciones de energía producidas de esta manera, vendrían dadas por sólo el 2º término del lado derecho de su ecuación de fluctuación, resultado que puede ser expresado: $(\Delta E)_{\text{ONDAS}}^2 = 1/2 \cdot \bar{E}^2$ (19)

Algunos años más tarde, H.H. Lorentz verificó este resultado.

El argumento de Einstein era el siguiente: como la fórmula de fluctuación (ecuación 18), derivada de la ley de Planck contiene algo más que el término proporcional a E (que sólo es comprensible sobre la base de la teoría ondulatoria), algo más debe estar pasando aparte de la propagación normal de la luz. Supongamos que la radiación consiste de cuantos de luz, cada cual de energía $h\nu$, que se comportan igual que partículas clásicas independientes. Si, en un instante dado, hay n de tales cuantos en una subregión ΔV , en un determinado tiempo fijado, entonces la estadística elemental (teniendo en cuenta la distribución de Poisson), da la siguiente expresión para la varianza

$$(\Delta n)^2 \equiv (n - \bar{n})^2$$

de su número n : $(\Delta n)^2 \approx \bar{n}$ (20)

La energía total llevada por n cuantos es $E = nh\nu$ (21)

y la varianza de esta energía (que denotamos con $(\Delta E)_{\text{PARTIC.}}^2$) es

$$(\Delta E)_{\text{PARTICULAS}}^2 = (h\nu)^2 (\Delta n)^2 \quad (22)$$

De acuerdo con las ecuaciones 20 y 21 tenemos que $(\Delta n)^2 = \bar{E} / h\nu$, y usando esta expresión en la ec. 22

obteniendo: $(\Delta E)_{\text{PARTIC.}}^2 = h\nu \bar{E}$ (23) que es precisamente el 1º término del lado derecho de la ecuación 18. De aquí se sigue que la ec. de fluctuación de Einstein para la radiación del cuerpo negro puede ser expresada

$$(\Delta E)^2 = (\Delta E)_{\text{PARTICULAS}}^2 + (\Delta E)_{\text{ONDAS}}^2 \quad (24)$$

Así mostró Einstein que en su comportamiento estadístico, la radiación del cuerpo negro exhibe características tanto de onda como de partícula. Este resultado es el primer ejemplo de la famosa dualidad onda-partícula.

La radiación no sólo lleva energía, sino también momentum, el que se manifiesta como una presión.

En una conferencia que Einstein dió el mismo año (1909) en Salzburgo, indicó, de la siguiente forma, las conclusiones a las que había arribado con sus investigaciones: "No puede ser negado que hay un amplio grupo de hechos relacionados con la radiación que muestran que la luz tiene algunas propiedades que pueden ser entendidas mejor desde el punto de vista de la emisión newtoniana que desde el punto de vista de la teoría ondulatoria. Es, por lo tanto, mi opinión que la próxima etapa en el desarrollo de la física nos traerá una teoría de la luz que podrá ser considerada como fusión entre la teoría ondulatoria y la de emisión... un profundo cambio en nuestra visión de la naturaleza y constitución de la luz es indispensable".

Recordamos que la tercera y última parte de este artículo estará presente en el próximo número.

Concursos docentes

En el primer cuatrimestre de este año la Universidad de Buenos Aires, cumpliendo con lo dispuesto en la Ley Universitaria 22.207, instrumentó el primer llamado a concursos para normalizar el cuerpo docente.

Esta Ley prevé la existencia de tres categorías de profesores ordinarios y cuatro de extraordinarios. Los primeros, establece, serán designados previo concurso público de títulos, antecedentes y oposición (art. 23) por un jurado nombrado por el Consejo Superior de la Universidad a propuesta de los Consejos Académicos de cada Facultad, ambos elegidos por el Poder Ejecutivo Nacional. También establece que los docentes durarán en su cargo siete años, otorgándoseles estabilidad definitiva en la segunda designación, que se hará también por concurso o por confirmación de las dos terceras partes de los votos del Consejo Superior a propuesta del correspondiente Consejo Académico.

Esto representa la instauración de las cátedras vitalicias. Se desprende del método de elección de los jurados que los mismos son designados indirectamente por el Poder Ejecutivo Nacional, lo que significa una violación más a la autonomía mencionada en el artículo 5.

Por otro lado, nadie sabe quién decidió porqué concursar ciertas cátedras y no otras, ni el motivo que presidió la asignación de dedicaciones a los distintos cargos.

En la situación actual, un llamado a concursos debería tener un claro carácter convocante, para atraer a los mejores especialistas de cada área o disciplina, estén o no actualmente en el país. Por otra parte, puesto que el estatuto dice "los miembros del jurado solo podrán ser recusados por las causas que la reglamentación determine" (art. 22 inc. e) y tal reglamentación no fue dada a conocer, los jurados, tan impersonalmente designados por el rector son de hecho irrecusables.

Es manifiesta la falta de criterios objetivos para evaluar intelectual y científicamente a los aspirantes (el artículo 15 inc. b dice textualmente sobre las condiciones a reunir por los aspirantes "tener integridad moral y rectitud universitaria, las que no podrán suplirse por méritos intelectuales") y si bien resulta encomiable que se les exija "estar identificado con los principios consagrados en la Constitución Nacional", no negar "los principios, derechos y garantías establecidos en aquella" y repudiar "el empleo ilegal de la fuerza", es irrisorio que tales condiciones aparezcan en un texto

que institucionaliza en la Universidad la misma ausencia de derechos que padece el país entero.

Ni siquiera queda el recurso de apelación, presente en todo sistema jurídico, ya que según el artículo 22 "el dictámen del jurado será impugnabile solamente por defecto de forma o procedimiento" y "el mero hecho de introducir argumentaciones solo referidas al mérito del dictámen o de la designación impedirá dar trámite a la impugnación o recurso".

En resumen, no son precisamente éstas las condiciones para alentar la participación de profesionales y científicos que deberían ser recuperados para nuestra Universidad

Es interesante comparar con el pensamiento de la Reforma del '18 que, al respecto propone que el acceso a todos los niveles de la docencia se haga por medio de concursos públicos de antecedentes y oposición frente a un Tribunal designado por sorteo entre los pro-

fesores de las Universidades Nacionales que dictan similar materia.

Asimismo sostiene que la Cátedra deberá ser periódica, debiendo convocarse a concurso en un lapso no mayor que cinco años, para garantizar la permanente renovación científica y pedagógica.

Es notoria la diferencia conceptual que anima a ambas formulaciones. La primera, concebida por un gobierno anticonstitucional, permite al Poder Ejecutivo Nacional el control de la Universidad, otorgándole facultades para discriminar las ideas que considere perniciosas. Esto, en los hechos, nos ha llevado al estado actual, en el cual la Universidad está al margen de los intereses nacionales y cerrada a la mayoría.

En cambio, la segunda, a través de la autonomía, la libertad de cátedra y el cogobierno democrático, asegura el libre desarrollo de todas las ideas y la representación de los intereses mayoritarios.

-Del 24 al 27 de Noviembre del año pasado se realizó en la ciudad de San Luis la Reunión Nacional de Física 1981, organizada por la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias físico-matemáticas de la Universidad de San Luis. Estas reuniones se vienen llevando anualmente a cabo desde hace cuatro años en distintos puntos del país. (Buenos Aires 1978, Villa Giardino 1979, Bariloche 1980).

En ellas investigadores de diversos centros de estudios del país presentan trabajos realizados en los mismos. Los trabajos presentados en la reunión de San Luis fueron 251, tratando temas de Biofísica, Física aplicada, Física molecular, Materia condensada, Física nuclear óptica, haces electrónicos, computación, control, cálculo numérico, plasma, Física de reactores y enseñanza de la Física (sólo uno). Fueron 41 los trabajos presentados por los científicos que desempeñan tareas en nuestra facultad.

Historia de la Computación

12

La primera cuenta del hombre pudo muy bien ser hecha con la ayuda de sus diez dedos. Usando principios similares, las computadoras de hoy sirven también como ayuda de cálculos, sin embargo tienen una capacidad mucho mayor y son millones de veces más ágiles que los dígitos humanos. Pues entonces, ¿qué etapas históricas han conducido al desarrollo de las complejas máquinas de nuestros días?

Alrededor del año 2.600 antes de J.C estas cuentas fueron clasificadas en un mecanismo llamado ABACO por los chinos. Las cuentas iban engarzadas en unas varillas verticales y paralelas, empezando de derecha a izquierda las varillas representaban la unidades decenas, centenas, la adición se hacía desplazando las cuentas de abajo hacia arriba.

En el año 1642 Blas Pascal construyó la primer máquina de sumar mecánica, que funcionaba mediante ruedas contadoras digitales, la cual tuvo aplicación inmediata en la realización de cálculos para la oficina de impuestos de Ruan.

En 1833, el matemático inglés Carlos Babbage desarrolló la llamada máquina analítica, en la que aplicó por primera vez el principio de las tarjetas perforadas para resolver un problema matemático complicado. Esta máquina constaba de una unidad de almacenamiento y de una prensa. La primera retenía los números para resolver un problema. La prensa seleccionaba determinado números de la unidad de almacenamiento cuando se introducían por el operador las tarjetas perforadas. El principal problema de ésta máquina fue que aunque era enteramente realizable, constaba de tan grande cantidad de ruedas engranajes y bielas que la hacían inutilizable. Pero la máquina analítica seguía ya los lineamientos básicos de las computadoras actuales. A partir de 1915 el desarrollo se aceleró en gran escala al introducirse cambios e innovaciones que incrementaron la capacidad y velocidad de las máquinas. Las computadoras basadas en operación con tarjetas perforadas se denominan "Máquinas de registro unitario" por ser de tipo electromecánico, tienen serias limitaciones en cuanto a velocidad y exactitud de operaciones. El primer intento de reducir esas limitaciones fue realizado por el profesor Howard Aiken quien trabajó con ingenieros de la compañía I.B.M (1944) en la creación de la primer computadora electromecánica Mark I. Funcionaba con los mismos principios básicos de la máquina de Babbage, pero compuesta de relés electromagnéticos y órganos mecánicos. El desarrollo de las operaciones se realizó por cinta perforada de papel en vez de tarjetas. El Mark I, podía ejecutar una operación matemática sencilla en 0,3 segundos. Comparado con la eficacia de las máquinas no contables en ese tiempo, fue

éste un notable avance. Estas primeras computadoras, propiamente llamadas así, usaban como base el sistema decimal y eran muy voluminosas y de escasa capacidad operativa. La verdadera revolución comenzó con el uso del sistema binario, cuando en 1946 Juan Manchly construyó la primer computadora electrónica digital llamada ENIAC en la que intervinieron mas de 18000 tubos electrónicos.

Luego se introdujeron cambios radicales en la construcción de computadoras al aplicarse "circuitos transistorizados" lo que dio lugar a la llamada segunda generación de computadoras. Y mas tarde con la utilización masiva de microcomponentes de alta tecnología se inició la fabricación de

computadoras que en la actualidad constituyen la tercera generación. Estas son capaces de recibir millones de datos de información y además, almacenarlos para su posterior aprovechamiento. Esto permite que con pocos datos básicos aportados al sistema, este sea capaz de resolver en minutos operaciones matemáticas de enorme complejidad.

Sin embargo, hasta hoy en día la computadora tiene sus límites es incapaz de crear, no tiene imaginación. Esas capacidades son exclusivas del cerebro humano en el universo que conocemos. Se augura la aparición de máquinas inteligentes, capaces de crear y de tomar resoluciones sin estar alimentada previamente con toda la información pertinente.

13

Congresos de matemática

Del 5 al 9 de julio se realizó en Mendoza el "II Coloquio Latinoamericano de Algebra". Fue organizado por la Federación Latinoamericana de Matemática, y auspiciado por la Universidad "Maza" de Mendoza, la Universidad Nacional de Cuyo y el CONICET. Este último facilitó el traslado y la estadía de participantes de distintos puntos del país.

Los cursos y conferencias tuvieron lugar en la Facultad de Ingeniería del Petróleo de la UNC. Por la mañana se dictaron dos cursos: "Formas cuadráticas", a cargo de los doctores Gentile y Baeza, y "Geometrías finitas" que fue dictado por el doctor Barriga. Por la tarde se dictaron conferencias sobre diversos temas de álgebra y topología algebraica.

Hubo participantes (graduados o estudiantes) de diversas universidades y centros de estudio de nuestro país, así como de Chile, Colombia y Perú.

Asimismo, organizado por el Instituto de Matemática, Astronomía y Física (IMAF) de la Universidad de Córdoba, y auspiciado por el CONICET, tuvo lugar del 2 al 14 de agosto en aquella provincia, el "VI Seminario Nacional de Matemática", dedicado a Algebra y Teoría de Lie. Se dictaron conferencias y cursos a cargo de investigadores de la UNS, UBA, IMAF, CONICET y de Brasil. Participaron graduados y estudiantes avanzados de distintas provincias del país. Los temas tratados en los cursos y conferencias fueron geometría diferencial y grupos de Lie, teoría de grupos, curvas algebraicas, representación de grupos y de álgebras y teoría geométrica del control.

Ingreso '82

Nuestra idea en este artículo es presentar la situación actual del ingreso a la universidad y como vive el ingresante la preparación de este.

Por este motivo hicimos una encuesta entre los aspirantes a ingresar a nuestra facultad en la que tratamos de abarcar los temas de preocupación general.

Uno de los problemas más alarmantes es la poca información que recibe el alumno secundario y preuniversitario de las carreras y el ingreso. El Ministerio envía a veces un profesional a dar algunas charlas de orientación vocacional a los alumnos del último año del colegio mientras que la información en este sentido debería comenzar a darse en los primeros años para obtener algún resultado.

En cuanto al sistema de ingreso hay actualmente dos en vigencia. Uno de ellos consiste en un curso preparatorio de aproximadamente un mes y medio de duración en el que se dictan dos materias y un examen final para cada una de ellas, con la posibilidad de ingresar de acuerdo a los cupos fijados en cada carrera.

El otro sistema consiste en un curso de mayor duración con dos exámenes parciales y un final para cada materia, habiendo también un número fijo de cupos en cada carrera.

En ambos casos el alumno puede ver su examen una vez corregido pero no puede apelar su resultado.

Quisimos saber, ya que a nadie parece importarle, que tipo de sistema de ingreso prefieren los ingresantes; la mayor parte de las opiniones estuvo dividida entre ingreso sin cupo limitado (todo alumno que aprueba el examen ingresa), y curso preparatorio no eliminatorio (que nivele los conocimientos de los alumnos e ingreso de todos ellos a la facultad).

Los restantes se volcaron por la ampliación de los cupos y por los sistemas actuales.

En definitiva la proposición de los ingresantes en líneas generales es mayor números en la universidad. Claro que las instalaciones actuales no darían lugar a más alumnado ni tampoco se podría arreglar el problema de los docentes, esta es muchas veces la respuesta dada por los altos funcionarios pero es claro que si el presupuesto de educación sigue siendo el 8% el problema seguirá sin solución.

Con respecto al nivel dado por el colegio secundario la opinión estuvo prácticamente unificada: no cubrió en absoluto las exigencias del ingreso.

Para el 50% de los encuestados el curso dictado por la facultad no fue suficiente; la duración es poca, proponen que se tomen

evaluaciones periódicas y en algunas carreras piden cambio de materias (biología por matemática los químicos y física por química los geólogos) . Algunos pidieron que se nivelara a los profesores.

Para tratar de asegurar su vacante muchos recurrieron a los cursos de ingreso privados los cuales tuvieron un costo aproximado de 3.000.000\$ promedio en agosto de 1981 . A la mayor parte de los que hicieron el curso privado les resultó de mejor nivel que el dictado por la facultad.

El 70% de los encuestados no trabajaba , aún más , algunos dejaron de hacerlo para poder concurrir al curso.

Es decir que el acceso a la universidad no depende exclusivamente de los conocimientos que se lleguen a adquirir sino que se necesita tener determinado poder económico pa-

ra aspirar a una vacante.

La respuesta fue unánime a la revisión del examen : los ingresantes quieren una revisión pública y con acceso a la apelación de los resultados.

Queremos hacer notar que en algunas carreras de nuestra facultad este año sobraron vacantes . Se pueden deducir fácilmente de lo expuesto razones que expliquen este hecho , considerando también que en general el nivel de los exámenes fue mucho mayor que el dado en los cursos.

Otro punto que tocamos fue la información que tenían los ingresantes sobre todos los aspectos de la carrera que eligieron (contenido , posibilidades laborales , etc.) : por supuesto casi todos dijeron tenerla , siendo la principal fuente de información la guía del estudiante de EudeBA....

15

GRAN PEÑA GRAN

Música

Empanadas

Vino

y otras exquisiteces

organizan:

Enlaces

Doble Hélice

Interacción

Introducción al cálculo de diferencias finitas

Quien haya cursado Análisis 1, ya entiende como natural la operación paso al límite, y por ende maneja como herramientas usuales a la derivación y a la integración.

Sin embargo es posible desarrollar un cálculo diferencial "sin pasar al límite", llamado Cálculo de diferencias finitas, el cual no solo tiene interés teórico, sino que también brinda nuevas herramientas para el cálculo, desde el cálculo de derivadas e integrales en serie de diferencias finitas (de amplia utilidad en el método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales), hasta la teoría de interpolación. Veremos también que con estos operadores es posible encontrar una expresión para la suma $\sum_{k=1}^n k$, $k \in \mathbb{N}$ y resolver la convergencia de series de tipo $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)\dots(i+n)}$.

El cálculo de diferencias finitas.

En lugar de considerar el límite del cociente incremental como en la derivación:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

consideraremos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donde no tendremos la intención de hacer tender h a 0

Es más, normalizaremos h a 1, y escribiremos

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

donde Δ debe ser considerado como el operador diferencia aplicado a f .

Por supuesto $\Delta f(x)$ siempre existe, con tal que f esté definida para x y $x+1$.

Pueden demostrarse las siguientes fórmulas:

- 1) $\Delta c f(x) = c \Delta f(x) \quad c \in \mathbb{R}$
- 2) $\Delta(f+g)(x) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$
- 3) $\Delta f \cdot g(x) = g(x) \Delta f(x) + f(x+1) \Delta g(x)$
- 4) $\Delta \frac{f}{g}(x) = \frac{g(x) \Delta f(x) - f(x) \Delta g(x)}{g(x)g(x+1)}, g(x)g(x+1) \neq 0$

Definiremos la diferencia segunda de f como

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta f(x)] = \Delta[f(x+1) - f(x)] = \\ &= [f(x+2) - f(x+1)] - [f(x+1) - f(x)] = \\ &= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x). \end{aligned}$$

Con la misma idea definiremos recurrentemente

$$\begin{aligned} \Delta^n f(x) &= \Delta(\Delta^{n-1} f(x)) \quad n \in \mathbb{N} \\ \Delta^0 f(x) &= f(x) \end{aligned}$$

Se puede demostrar por inducción en n la siguiente fórmula:

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} f(x+k).$$

Ejemplos:

- i) $\Delta c = 0 \quad c \in \mathbb{R}$
- ii) $\Delta a^x = a^x (a-1) \quad a \in \mathbb{R}$
- iii) $\Delta \log_a(x) = \log_a(1 + 1/x)$
- iv) $\Delta^n 2^x = 2^x$

(notar la analogía de iv) con $D^n e^x = e^x$ $n \geq 0$)

Polinomios factoriales.

Del cálculo diferencial sabemos que

$$Dx^n = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Sin embargo,

$$\Delta x^n = (x+1)^n - x^n$$

no es formalmente similar a (1).

Por lo tanto necesitamos una particular función de x que mantenga la analogía. Tal función es la función factorial, definida

$$x^{(n)} = x(x-1)\dots(x-n+1) \quad n \in \mathbb{N}$$

Notar que $x^{(n)} = n!$.

Si m es entero negativo

$$x^{(m)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+m-1)(x+m)}$$

Nota: esta última definición se basa en el siguiente hecho:

Es claro que

$$x^{(n)}(x-n)^{(m)} = x^{(n+m)} \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Si deseamos mantener esta propiedad para todo $n, m \in \mathbb{Z}$, en particular si $n = 0$ y $m \in \mathbb{N}$, tendremos

$$x^{(0)}(x-0)^{(m)} = x^{(0+m)} = x^{(m)}$$

de donde $x^{(0)} = 1$

También, si $n \in \mathbb{N}$:

$$x^{(-n)}(x+n)^{(n)} = x^{(n-n)} = x^{(0)} = 1$$

En consecuencia

$$x^{(-n)} = 1 / (x+n)^{(n)}$$

Ahora

$$\Delta x^{(n)}$$

es fácilmente calculable:

$$\Delta x^{(n)} = (x+1)^{(n)} - x^{(n)} =$$

$$[(x+1)-(x-n+1)][x(x-1)\dots(x-n+2)] = nx^{(n-1)}$$

un polinomio factorial de grado n es una expresión de la forma:

$$\phi(x) = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x^{(1)} + a_0$$

Es claro que $\{x^{(i)}\}_{i=0}^n$ es una base del espacio vectorial

$$R[x]_n = \{f \in R[x] / f=0 \vee \text{gr}(f) \leq n\}$$

ya que es una sucesión de $n+1$ polinomios de distinto grado; luego la sucesión que define a ϕ :

$$(a_i)_{i=0}^n$$

está unívocamente determinada. Además todo polinomio factorial de grado m , puede ser escrito en potencias de x . En particular:

$$x^{(n)} = \sum_{r=0}^n S_r^n x^r$$

Los coeficientes S_r^n son los números de Stirling de 1ª clase (Nótese que surgen del cambio de base $x^{(i)} \rightarrow x^i$). Calculando, vemos que:

$$x^{(1)} = x$$

$$x^{(2)} = x(x-1) = x^2 - x$$

$$x^{(3)} = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

De donde:

$$S_1^1 = 1$$

$$S_2^2 = 1 \quad S_1^2 = -1$$

$$S_3^3 = 1 \quad S_2^3 = -3 \quad S_1^3 = 2$$

De acuerdo con la definición, y definiendo $S_0^0 = 1$, $S_p^n = 0$ ($p > n$) $n \in \mathbb{N}$ se tiene la relación recurrente:

$$S_r^{n+1} = S_{r-1}^n - n S_r^n$$

Los números de Stirling de 2ª clase surgen de considerar

$$x^n = \sum_{r=0}^n S_r^n x^{(r)}$$

Calculando:

$$x = x^{(1)}$$

$$x^2 = x^{(2)} + x^{(1)}$$

$$x^3 = x^{(3)} + 3x^{(2)} + x^{(1)}$$

vemos que:

$$S_1^1 = 1$$

$$S_2^2 = 1 \quad S_1^2 = 1$$

$$S_3^3 = 1 \quad S_2^3 = 3 \quad S_1^3 = 1$$

Adoptando $S_0^0 = 1$, $S_p^n = 0$ ($p > n$) $n \in \mathbb{N}$ se obtiene

$$S_r^{n+1} = S_{r-1}^n + r S_r^n$$

La suma indefinida:

Sea F una función definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos entonces tomar su diferencia

$$\Delta F(x) = F(x)$$

Consideremos ahora el problema inverso. Esto es: sea f una función dada: ¿Es posible hallar una función F tal que $\Delta F(x) = f(x)$? Si esto es posible escribiremos

$$f(x) = \Delta^{-1} f(x) \text{ o también}$$

$$F(x) = \sum f(x) \cdot$$

donde $\sum$ representa la suma indefinida análoga a la $\int$ indefinida. En el caso de la integral indefinida, sabemos que la función primitiva es única a menos de una constante de integración. Análogamente, en el caso de la suma indefinida, la F encontrada es única, salvo una función periódica. En efecto, supongamos que

$$\sum F(x) = f(x) \text{ y } \sum G(x) = f(x)$$

Se tiene

$$\Delta(F(x) - G(x)) = 0 \quad (*)$$

Llamando

$$P(x) = F(x) - G(x)$$

sale de (*) que

$$P(x+1) = P(x)$$

de donde P es periódica (de período 1) y además es

$$F(x) = G(x) + P(x)$$

Aplicando la definición, se obtienen fórmulas similares a las de integración

$$i) \sum c f(x) = c \sum f(x)$$

$$ii) \sum (f(x) + g(x)) = \sum f(x) + \sum g(x)$$

$$iii) \sum f(x) \Delta g(x) = f(x)g(x) - \sum g(x+1) \Delta f(x)$$

(iii) es la sumación por partes, análoga a la integración por partes del cálculo diferencial)

Ejemplos:

$$\sum x^{(n)} = x^{(n+1)} / (n+1)$$

$$\sum a^x = a^x / (a-1) \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\sum 2^x = 2^x \cdot$$

La suma definida:

La regla de Barrow del cálculo integral nos dice que:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

donde $F'(x) = f(x)$

Veamos su análogo en el cálculo de sumas finitas. Esto es, la fórmula de

$$\sum_{x=a}^{a+n-1} f(x) \quad a \in \mathbb{R}$$

Supongamos que f sea la función dada y tomemos una función g tal que

$$g(x) = \sum f(x)$$

$$\text{Así: } \Delta g(x) = f(x) ; \text{ pero}$$

$$\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$$

En consecuencia:

$$g(a+1) - g(a) = f(a)$$

$$g(a+2) - g(a+1) = f(a+1)$$

$$\dots \dots \dots g(a+n-1) - g(a+n-2) = f(a+n-2)$$

$$g(a+n) - g(a+n-1) = f(a+n-1)$$

Sumando ambos miembros:

$$\sum_{x=a}^{a+n-1} f(x) = g(a+n) - g(a) = \sum f(x) \Big|_a^{a+n}$$

Esta expresión es conocida como la regla de Barrow del Análisis numérico.

Aplicaciones.

1) La fórmula de Newton:

En el cálculo diferencial, se ve que si $f(x)$ es un polinomio de grado n , entonces $f(x)$ puede ser escrito

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Supongamos ahora que $f(x)$ es un polinomio factorial, o sea

$$f(x) = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x^{(1)} + a_0$$

si $x=0$, es $f(0) = a_0$

tomando Δ a $f(x)$, resulta

$$f(x) = na_n x^{(n-1)} + (n-1)a_{n-1} x^{(n-2)} + \dots + 2a_2 x^{(1)} + a_1$$

$$\text{y, } f(0) = 1! a_1$$

Procediendo de esta manera, vemos que

$$\Delta^k f(0) = k! a_k$$

y en consecuencia

$$f(x) = f(0) + \Delta f(0) \frac{x^{(1)}}{1!} + \Delta^2 f(0) \frac{x^{(2)}}{2!} + \dots + \Delta^{n-1} f(0) \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + \Delta^n f(0) \frac{x^{(n)}}{n!}$$

Esta ecuación es conocida como la fórmula de Newton y tiene muchas aplicaciones en la teoría de interpolación.

veamos un ejemplo.

Supongamos que tenemos los números

0, 7, 26, 63, 124, 215, 342, 511.

y deseamos encontrar el polinomio f de grado mínimo tal que

$f(0)=0$, $f(1)=7$, ..., $f(7)=511$.

Tabulamos entonces

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	0	7	12	6	0
1	7	19	18	6	0
2	26	37	24	6	0
3	63	61	30	6	0
4	124	91	36	6	0
5	215	127	42	6	
6	342	169			
7	511				

Por lo tanto

$$f(x) = 0 + 7x^{(1)} + \frac{12x^{(2)}}{2!} + \frac{6x^{(3)}}{3!} + 0x^{(4)}$$

$$= 7x + 6x(x-1) + x(x-1)(x-2)$$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x = (x+1)^3 - 1$$

Podemos calcular mediante la fórmula de Newton, los números de Stirling de 2ª especie.

Sabemos que si $f(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo n , podemos escribir

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \Delta^i f(0) \frac{x^{(i)}}{i!}$$

Además sabemos que

$$x^n = \sum_{i=1}^n S_i^n x^{(i)}$$

Tomando $f(x) = x^n$, y siendo $(x^{(i)})_{0 \leq i \leq n}$ una base, setiene la igualdad:

$$\frac{1}{n!} \Delta^n x^n \Big|_{x=0} = S_r^n$$

de donde

$$S_r^n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{r+k} \binom{n}{k} k^n$$

fórmula no recurrente, que determina a los números de Stirling de 2ª clase.

2) Es posible también, encontrar una expresión explícita para las sumas del tipo

$$\sum_{i=1}^n i^k \quad k \in \mathbb{N}$$

Para ello:

$$\begin{aligned} \sum x^k &= \sum_{j=1}^k S_j^k x^{(j)} = \\ &= \sum_{j=1}^k S_j^k \sum_{i=1}^n x^{(i)} = \sum_{j=1}^k S_j^k \sum_{i=1}^n x^{(j+i)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora} \quad \sum_{i=1}^{n-1} i^k &= \sum_{i=0}^{n-1} i^k = \sum x^k \Big|_0^n = \\ &= \sum_{j=1}^k S_j^k \frac{n^{(j+1)}}{j+1} = \sum_{j=1}^k S_j^k \frac{n!}{(j+1)!} j! = \\ &= \sum_{j=1}^k \binom{n}{j+1} \sum_{i=1}^j (-1)^{j+i} \binom{j}{i} i^j \end{aligned}$$

Por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^n i = \sum_{j=1}^1 S_j^1 \binom{n}{j+1} j! = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } k=2: \\ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 &= \sum_{j=1}^2 S_j^2 \binom{n}{j+1} j! = \binom{n}{2} + \binom{n}{3} 2! = \\ &= \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \end{aligned}$$

Ejercicio.

demostrar que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin i\theta}{2^i}$$

converge a

$$\frac{2 \sin \theta}{5 - 4 \cos \theta}$$

(sugerencia: sumar por partes y aplicar

$$\Delta \sin ax = 2 \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \left(ax + \frac{a}{2} \right)$$

INTI

División Óptica

Licenciado Roberto
Daniel Lezane

Breve descripción de la División Óptica :

El Departamento de Física Industrial y Metrología del Instituto Nacional de Tecnología Industrial -INTI- tiene seis divisiones : 1)Acústica , 2)Calor , 3)Electricidad , 4)Electrónica , 5)Mecánica , y 6) Óptica, siendo alrededor de 100 personas las que trabajan en todo el Departamento.

En la División Óptica, trabajan 18 personas, entre los cuales se cuentan : 6 físicos, 1 matemático, 1 químico, 2 ingenieros electricistas, 1 ingeniero óptico, 3 técnicos y 2 auxiliares técnicos, en un área que cubre aproximadamente 1200 metros cuadrados de laboratorios, taller y oficinas. Cuenta además con un instrumental que puede valuarse en el orden del millón de dólares.

A su vez, las actividades de la División, están divididas en distintas áreas, a saber :

- a) Radiometría y Fotometría
- b) Colorimetría
- c) Óptica Física
- d) Óptica Geométrica e Instrumentación
- e) Luminotecnia
- f) Infraestructura

En general se prestan servicios calificados (a las Universidades, organismos estatales e industrias) y se realizan tareas de investigación y desarrollo, por lo general en problemas aplicados. Por otra parte, son inusuales las tareas de investigación básica o académica, aunque muchas veces es difícil discernir el límite entre lo aplicado y lo básico.

En el laboratorio de Radiometría, se mide radiación electromagnética en el ámbito de 200nm a 2,5 μ m aproximadamente, pero el mayor esfuerzo se ha concentrado en el espectro visible.

Allí también se estudian detectores de radiación y fuentes radiantes, métodos de medición y características fotométricas y/o radiométricas de los materiales. En el sector de Fotometría se realiza el mantenimiento de la magnitud fundamental - el lúmen - y sus asociados - la candela y el lux -. Se calibran lámparas, luxómetros, luminancímetros y otros elementos empleados en fotometría.

En el sector de Colorimetría, se estudian los aspectos relacionados con la visión, el color, y la apariencia de los materiales. Se miden estas características.

El sector de Óptica Física está orientado hacia la utilización del láser y las técnicas de óptica coherente. Holografía, speckle, interferometría son algunos de los temas estudiados.

El grupo que trabaja en Óptica Geométrica e Instrumentación desarrolla sus actividades en el marco del diseño de sistemas ópticos, su caracterización y su construcción.

El laboratorio de Luminotecnia está esencialmente dedicado al estudio de los elementos que participan en los proyectos de alumbrado (público).

co, fabril o de interiores) como son las luminarias, pavimentos o materiales.

Completa la estructura de los laboratorios el sector de Infraestructura que cuenta con las facilidades de un pequeño taller mecánico, un taller para el tratamiento de superficies ópticas, y un taller de electrónica. A ello se suman los servicios de un sistema de adquisición de datos y de acceso a la computadora central y un banco de informaciones razonablemente completo. La biblioteca y hemeroteca suma cerca de 500 títulos en la especialidad y el acceso a 100 publicaciones periódicas.

Desarrollo e Investigación en la División Óptica :

Desde su creación, casi, se ha tenido en claro que si bien por tratarse de un laboratorio oficial financiado por la industria (lamentablemente esa forma de financiación fue abolida por el ministro Martínez de Hoz reemplazándose al sistema de financiación indirecta a través de un impuesto especial a los créditos otorgados a la industria, por la dependencia lisa y llana del presupuesto nacional) era necesario prestar servicios a la industria, se tenía una conciencia clara de que una industria pujante necesitaría un laboratorio de referencia en primer lugar, y un apoyo tecnológico del mejor nivel para apoyar su propio desarrollo y ser aconsejada para la adquisición, adaptación o transformación de nuevas tecnologías.

Esto implicaba crear una estructura científico-tecnológica de buen nivel, tanto en la capacitación del personal como en las facilidades del laboratorio.

Para ello, se enviaron profesionales a entrenarse al exterior y aunque lamentablemente no fue entendida por las diferentes autoridades la necesidad de

formar gente en el más alto y mejor nivel (doctorados), un intenso flujo de becarios por períodos cortos o medios (no más de un año en general) permitió que el personal recibiera un entrenamiento adecuado en la aplicación de ciertas técnicas específicas.

Se sabía que eso no era suficiente y aunque el medio no era el más propicio, se creó una mentalidad proclive a la profundización de los temas y la realización de investigación y desarrollo.

Quizás no pueda comprenderse cuán difícil es lograr este objetivo donde no hay antecedentes, ni se alienta tal orientación del trabajo. Donde siempre los servicios eran lo esencial, y la investigación algo complementario -para los ratos libres- para dar "prestigio", o que sólo era entendido como parte de una carrera o interés personal para hacer "curriculum".

Crear que un laboratorio debía ser capaz de desarrollar las ideas, profundizarlas; que los servicios tenían una importancia relegada frente a la tarea creativa, la investigación, no fue muchas veces comprendido ni fácil de lograr. Pero era una cuestión que iba a más allá del mero planteo de una política; era una cuestión de supervivencia : O se creaba y se continuaba ejerciendo la facultad de pensar, o nos anquilosábamos liquidándonos como profesionales, convirtiéndonos en meros técnicos "aprieta-botones".

No se podía hacer "ciencia" en los ratos libres. No se puede realizar ninguna tarea científica, y menos investigación, sin dedicación suficiente y seriedad. No era cuestión de fingir "pour la galerie"; de engañarnos a nosotros mismos. Así que pese a todo tra-

zamos lenta pero obstinada, firmemente un camino decididamente orientado hacia la investigación aplicada y la prestación de servicios calificados.

Creo que es necesario explicar aquí porqué una industria pujante y en desarrollo necesita de un laboratorio de apoyo competente y del mejor nivel científico posible.

Con el desarrollo del mundo moderno, uno de los aspectos que más evolucionó ha sido la creación de tecnología. Esto es fácil de entender, por ejemplo : en electrónica o en computación. Cuando yo empecé a estudiar, hace poco más de 25 años, todos los cálculos complicados (digamos raíz cuadrada o el empleo de logaritmos) se hacían con máquinas de calcular manuales y a veces eléctrico-mecánicas. Hoy, los estudiantes llevan en su bolsillo calculadoras programables que tienen la misma relación con aquellas máquinas, que un cohete Saturno con una cañita voladora. El desarrollo ha sido explosivo, exponencial, demencial, impensable.

Los países que están en la delantera de este proceso -los creadores de tecnología- cada vez se alejan más de sus seguidores, porque tienen la capacidad humana y el usufructo económico de la nueva tecnología, los medios económicos para avanzar aún más.

Los otros países -el resto-, tienen dos posibilidades : 1) convertirse en mero apéndice económico y político de aquellos y 2) tratar de lograr un equilibrio en aquellas áreas donde fuera posible un desarrollo independiente acorde con las necesidades propias, y características de cada país. Para ello hace falta ser capaz de adaptar o transformar tecnología de acuerdo a nuestros particulares requerimientos. Y para poder hacerlo, se debe poseer el mejor

nivel científico posible, pues de otro modo sería quizás hasta imposible siquiera, de entender la fenomenología involucrada.

No sabemos si nos equivocamos, pero optamos por la segunda alternativa y hoy, nuestro laboratorio tiene un razonable buen nivel y en algunas especialidades como colorimetría tiene un bien ganado prestigio internacional.

Vayamos ahora a lo específico y veamos qué temas se están estudiando.

a) Medición absoluta de radiación electromagnética : Este es un tema relacionado con la metrología básica.

De su precisión y exactitud dependen todas las mediciones fotométricas ya que estas últimas no son más que mediciones radiométricas "pesadas" según una función que caracteriza al ojo humano. El principio fundamental en que se basa, es la transformación de energía radiante en calor. El criterio absoluto responde al método de sustitución : el calor obtenido por absorción de energía radiante se compara con otro producido por la circulación de una corriente eléctrica a través de una resistencia.

Tratar de obtener un grado de excelencia en las mediciones, comparado con las obtenidas en otros laboratorios no es tarea sencilla. Con una razonable expectativa se espera poder calibrar nuestros detectores con un error no muy superior a 0,2% (lo mejor obtenido en el mundo hasta hoy es una exactitud de 0,1%).

b) Medición absoluta de flujo luminoso : Este trabajo implica varias cosas previas, a saber : 1) calibración de un detector, de modo que pueda asegurarse su respuesta absoluta dentro de la máxima exactitud posible,

y 2) verificación del error de apartamiento de la repuesta espectral del detector respecto de la curva patrón que caracteriza al ojo humano. 3) Otros parámetros de funcionamiento (fatiga, efecto de la temperatura, linealidad, dependencia del ángulo de incidencia, etc.)

Conocidos estos factores, el principio de medición absoluta implica integrar el flujo de la fuente luminosa en cuestión en todas las direcciones del radio vector de una esfera que lo contenga. Esto es fácil matemáticamente, pero no tanto en la práctica, ya que existen limitaciones. El estudio de esas limitaciones y del método de medición es uno de los trabajos que se realizan.

c) Estudios fotométricos y colorimétricos de elementos de señalización vial : Elementos de señalización vial son, por ejemplo, las balizas triangulares usadas por los automovilistas, el material retrorreflector empleado en las señales de advertencia (carteles a los costados de rutas y calles), las tachas catadiópticas empleadas para marcar los carriles en algunas calles o avenidas y las pinturas retrorreflectoras usadas para delinear carriles o cruces peatonales.

El estudio de estos materiales y elementos puede implicar su medición o su diseño. La comprensión del fenómeno y del verdadero sentido de su utilización.

Esto implica cosas tan disímiles como el estudio de las características del tránsito, los mecanismos perceptivos y detectores del conductor y/o peatón, la medición de la distribución espacial y espectral de los objetos considerados, etc. Las investigaciones van desde la descripción de la fenomenología a la especificación de una norma de utilización.

d) Color en alimentos : Debido a la

tendencia de los últimos años de estimular las áreas de investigación dedicadas a los productos primarios, lentamente nos fuimos involucrando en el estudio de los problemas de color en distintos productos alimenticios. Las investigaciones generalmente implicaban en primer lugar, determinar en qué consistía "el color" de un determinado producto, en los modos de medirlo, en la forma de seleccionarlo; establecer tolerancias para la producción y desarrollar un método adecuado de medición.

A veces, esto implicaba también, desarrollar el instrumental.

Distintos productos han sido o son estudiados : tomate (y sus derivados enlatados); corned-beef; anchoíta salada.

e) Apariencia : Los modos de apariencia de los objetos caracterizan la forma como un dado observado los ve. Establecer una relación entre lo que éste ve y la forma como la radiación electromagnética visible interactúa con el objeto y el medio que lo rodea, es una de las tareas de investigación que se realizan. El brillo, la blancura, la textura, la forma, el color, son distintos parámetros de la apariencia de un objeto. El color está relacionado con la modificación (o no) de las características espectrales de la radiación que incide sobre un objeto, y de cómo es reflejada en dirección del observador. Interviene el tamaño del objeto, el fondo sobre el que se halla, el nivel de la iluminación y otros parámetros objetivos y subjetivos.

El brillo, en cambio, no está relacionado con la modificación (o no) de la característica espectral, sino espacial, por el objeto, de la radiación incidente.

La textura, no sólo con la variación espacial sino con su ordenamien-

to.

La blancura, con la " no selectividad " espectral y las preferencias reales o aparentes de los observadores.

En suma, toda esta área de investigación está muy relacionada con el comportamiento humano y en particular con el funcionamiento del sentido de la visión, al mismo tiempo que la comprensión de los fenómenos de interacción de los materiales con la radiación y sus variaciones temporales y espaciales.

Tanto en los temas c) como e) interviene una rama de la ciencia conocida como " Psicofísica ", y que estudia métodos y técnicas desarrolladas para comprender fenómenos físicos en términos de respuestas sensoriales de observa-

dores humanos y manifestados a través de fenómenos psicológicos.

(En el próximo número continuará con los aspectos relacionados con Óptica Física, Óptica Geométrica e Instrumentación, Luminotecnia e Infraestructura)

Roberto Daniel Lozano es Licenciado en Matemática Aplicada. Fue becario del Laboratorio Nacional de Física de Gran Bretaña y del Instituto Federal de Física de Alemania. Es miembro consultivo de la Comisión Internacional de Alumbrado y la Organización de las Naciones Unidas. Actualmente es Jefe de la División Óptica del Departamento de Física del Instituto Nacional de Tecnología Industrial.

... Es interesante mencionar uno de los hechos ocurridos en nuestra Facultad durante las acciones bélicas en las Islas Malvinas. El Ejército Argentino, necesitando de expertos en microondas, envió un representante a nuestra maltrecha casa de estudios en busca de algún idóneo en dicho campo de la Física.

Pero ¡Oh sorpresa! el idóneo no concurría a nuestra Facultad desde hace dos años y su laboratorio había desaparecido, como por arte de magia, ¿vió?

Jorge F. Westerkamp (dicho idóneo) no tenía muy buenas relaciones con los hombres de armas, quienes decidieron en 1980 que era más conveniente para el país que no siguiera investigando.

No es de extrañar ya que esa opinión es análoga a la que tienen sobre numerosos científicos, profesionales y artistas, que han visto impedida su actividad en el país en estos últimos tristes años.

Doctor Carlos Ruiz: Topología y psicoanálisis

El Doctor Carlos Ruiz obtuvo su Licenciatura en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires en 1965, obtuvo el Doctorado en esta misma Facultad en 1970, bajo la dirección del Ingeniero Villamayor. Fue docente en nuestra Facultad hasta 1975. Su especialidad es la Topología. Actualmente trabaja también con psicoanalistas, dándoles clases de Matemática, particularmente de Topología.

— La Topología es una de esas ramas de la ciencia que se nombran mucho y se conocen poco. Podrías acercarnos a una definición de ella?

— Sí, habría dos formas de aproximarnos a ella: una sería considerarla como una especie de Geometría generalizada; esta sería la manera clásica, antigua. Podemos, por ejemplo, partir de la Geometría de Euclides, que es la Geometría de los movimientos rígidos: dos triángulos son similares, o equivalentes, cuando hay un movimiento rígido que desplaza uno sobre el otro.

Una segunda Geometría es la de la semejanza. En ella las transformaciones permitidas

incluyen homotecias, o sea la multiplicación de todas las dimensiones por un número, además de las anteriores. Fijate que ahí tenés una inclusión de una Geometría en otra, una generalización. En una están permitidas ciertas transformaciones, que forman un grupo, el grupo de movimientos rígidos en el plano, y la otra permite un grupo más amplio de transformaciones. Se puede seguir, por ejemplo con una Geometría lineal, donde cualquier transformación lineal es válida. Así, uno podría seguir ampliando el grupo de transformaciones permitidas hasta llegar a permitir todos los homeomorfismos, es decir aquellas transformaciones biunívocas bicontínuas.

Es bastante fácil si lo pensás con una serie de ejemplos: un triángulo es equivalente a otro de la misma medida, exactamente igual. Por ejemplo, un cierto triángulo equilátero es equivalente a otro que tenga el mismo lado, pero no a otro más grande.

Si paso a semejanza, tengo que todos los triángulos equiláteros son semejantes, hay una sola clase de triángulos equiláteros y los triángulos quedan clasificados por las proporciones de sus lados, o por sus ángulos. Con los otros polígonos pasa lo mismo, también para la circunsferencia: en el caso de la equivalencia tenés que todas las circunsferencias de un dado radio R son equivalentes. Siguiendo, todas las circunsferencias son semejantes.

Este es un punto de vista que, del lado de los matemáticos es muy obvio, pero que para otra gente es importante: en que lugar uno va a definir una noción, porque nosotros estamos muy acostumbrados a definir desde los conjuntos todas las estructuras. Pero para otros viene un poco al revés: desde las palabras define las estructuras y va abstrayendo.

— ¿Qué pasa con el grupo de transformaciones lineales?

— Un triángulo no es una circunsferencia

ni en equivalencia ni en semejanza. Ahora, si uno permite transformaciones lineales, simplemente todo triángulo es linealmente equivalente a otro triángulo. Es decir, dados dos triángulos uno puede definir una transformación conveniente. De la misma forma uno puede transformar una elipse en otra.

Lo que uno tiene, entonces, es una familia de Geometrías. Uno podría definir, dados diferentes grupos, diferentes Geometrías. Como yo estoy definiendo grupos cada vez más grandes, obtengo Geometrías en cierto sentido ordenadas. En último lugar coloco aquella en la cual lo único que le pido a mis transformaciones es que sean bicontínuas. Se entiende que en todas estas Geometrías las transformaciones son biunívocas y bicontínuas. En el caso del plano alcanza con continua. Esta última que definí es la Topología, en este caso Topología del plano, o del espacio. Ahí, por ejemplo una circunsferencia es equivalente a un triángulo, un cuadrado, una elipse. Todas esas son curvas cerradas, simples, que se pueden transformar una en la otra. Esta sería una versión.

Habría que hacer una aclaración: no distingo mucho, en lo que te dije, entre la Topología de la línea - en esta todas las líneas simples cerradas son equivalentes - y aquella que deriva de la estructura formada por el par plano-línea. Esta es la versión histórica.

— ¿Se puede generalizar a otros espacios a otras estructuras ?

— Sí, uno puede cambiar los espacios en los que hace Topología: trabaja en el plano, en el espacio, en dos cosas muy importantes como el espacio y el plano proyectivos. - La Topología del plano proyectivo es uno de los temas más importantes en estudio.

Lo que pasa es una cosa bastante general. Yo tengo una cierta estructura, en principio una estructura geométrica, en la cual,

mediante axiomas, defino una estructura topológica. Ahora, estos axiomas, que definen una estructura topológica del plano, tienen una validez tal que pueden aplicarse a otros campos. Yo, por ejemplo, defino lo que es continuo: ese axioma de continuo puede definirse en otros conjuntos, en otras estructuras. Desde ahí abstraigo la noción de espacio topológico y de continuidad. Ya no tiene mayor sentido hablar de la Topología como esta Geometría de transformaciones en el plano. Eso puede ser la historia.

— ¿Cuál sería, entonces, la otra versión de la Topología ?

— Para decirlo rápidamente, la Topología es una rama de la Matemática que estudia la continuidad. Si uno quiere una definición más formal, va al Bourbaki, que, en el capítulo de Estructuras, define lo que es una estructura, en términos de la teoría de conjuntos, y clasifica las estructuras en tres clases: algebraicas, topológicas y de orden. La Topología es el estudio de las estructuras topológicas. Ahí, estructura topológica toma un significado más general, puede ser la Topología de un espacio, de una estructura uniforme, etcétera. Todo en un campo relacionado con la noción de continuidad.

La Topología conjuntista moderna participa de un proceso de toda la Matemática de unificación teórica. Los fundamentos de la Matemática se basan en la Teoría de conjuntos y, a partir de ella aparecen los fundamentos de las distintas ramas. De esta forma esta Topología geométrica, conjuntista se puede fundamentar de un solo golpe con la noción abstracta de espacio topológico, que es un conjunto dotado de una estructura con ciertas propiedades.

— ¿Tiene especializaciones la Topología ?

— Hay una Topología, que es la que está, por ejemplo, en el Kelley (EUA) que es la que se llama Topología general, que es

tudia ciertas propiedades, en principio muy básicas, sin eso no se puede hacer Topología, por lo menos un matemático no puede hacer Topología, ahí se incluye la definición de espacio topológico, de función continua. Necesito previamente la Teoría de conjuntos, aunque sea en forma intuitiva, para generalizar esas nociones, más otras cuestiones muy básicas; por ejemplo que la continuidad se puede definir de varias maneras diferentes, en términos de conjuntos abiertos o cerrados, de entornos, de convergencia: probar las equivalencias entre todas ellas sería lo mínimo. Después viene la clasificación de espacios según ciertas propiedades mínimas.

Yo abstraigo, generalizo al máximo, pero luego me planteo saber qué se mantiene, en esta teoría general, de las propiedades particulares que tenían las cosas que generalicé.

Por ejemplo, yo me pongo ahora a hacer demostraciones y las hago en la intuición y digo: "dados dos puntos, tomo dos entornos, uno de cada punto y están bien separados". Yo no puedo probar que todo espacio topológico sea así. Esa es una propiedad del plano. Entonces lo que uno hace es decir: Axioma; un espacio se llama T_2 si cada par de puntos tienen entornos disjuntos, y estudia las propiedades particulares de esos espacios, y ahí generaliza. Y por ahí se puede ver en el Kelley un pesadísimo tratamiento de cuáles son las propiedades en términos de conjunto, que hace que un espacio sea metrizable, o sea que la topología esa pueda ser definida por una métrica. Dada una distancia puedo definir una topología por entornos. Con los teoremas de metrización trato de averiguar si un dado espacio topológico proviene o no de una o varias métricas.

A partir de aquí se construye toda una teoría. Los teoremas de metrización son muy pesados, porque están pensados desde la topología conjuntista, general, hacia la metrización.

En Bourbaki aparecen las propiedades más importantes, que son condiciones suficientes para que un espacio sea metrizable.

— ¿Tiene esto alguna relación con lo que se ve en las primeras materias de la carrera ?

— Sí, supongo que inclusive en Análisis I, para la topología de la recta alguna vez uno vió eso. En Análisis I le dicen, por ejemplo; si yo cubro el intervalo $[0,1]$ con intervalos abiertos hay siempre un subcubrimiento finito. En Topología uno diría: el intervalo $[0,1]$ es compacto. Esto se ve en una dimensión y lo generalizo. Esas son nociones básicas, todo el mundo tiene que manejar eso para hacer Topología. Pero después viene la especialización en esa rama, la Topología General, a mí no me interesa mucho. Tiene cosas muy interesantes; las relaciones de topología con medida, por ejemplo, son totalmente inesperadas, muchas veces totalmente contrarias a la intuición.

Está, después, lo que se llama clásicamente la Topología Combinatoria. Esta es un conjunto de proposiciones sobre ciertos ordenamientos finitos. Un conjunto de puntos, que llamo vértices y ciertas relaciones: pares, que llamo aristas; ternas, que llamo triángulos, etcétera. Eso se puede jugar informalmente, es combinatoria pura. Lo más importante es el juego entre combinatoria y topología, pensando los puntos, por ejemplo, como puntos en el espacio. Históricamente esta es la primera, es uno de los orígenes. Definían superficies, por ejemplo, como pegamientos de triángulos, porque la superficie en sí es difícil de trabajar. Toda esa rama está incluida en otra que es la Topología Algebraica. Esta es la parte de la Topología que se ocupa de encontrar invariantes algebraicos de los espacios topológicos.

— ¿Qué es un invariante ?

— Es algo que si los dos objetos son de la misma clase lo tienen en común y si no, no.

— ¿Una propiedad común a dos objetos ?

— Sí. Por ejemplo, uno podría decir que el número de componentes en que queda dividido el plano cuando uno traza una línea es un invariante topológico de la línea. El Teorema de Jordan dice eso respecto de la circunsferencia. Si una línea es equivalente a una circunsferencia divide al plano en dos regiones. Eso no quiere decir que la recíproca sea cierta, que el invariante clasifique, si no la Topología algebraica sería facilísima.

— ¿Por qué sería facilísima ?

— Y, porque yo podría asociarle a los espacios topológicos un grupo trivial, por ejemplo el grupo 0, con un solo elemento, a todos los espacios topológicos y eso sería un invariante. Pero uno inventa invariantes más razonables, como asociar a cada espacio un cierto grupo, un grupo de homotopía, por ejemplo el Fundamental, que sería aquel que se construye a partir de los lazos que se pueden trazar en el espacio. Lazo es una función continua definida en un intervalo.

— ¿Como relacionas espacio topológico y grupo ?

— Lo que digo es esto: cada espacio topológico, un grupo. Si los espacios son homeomorfos tienen los mismos grupos. No es cierto que si tienen el mismo grupo sean homeomorfos. Si fuera cierto yo clasificaría los espacios por su grupo fundamental. En particular aparece una cosa que es muy importante en Topología algebraica, que practicamente la domina: los invariantes que se obtienen son invariantes homotópicos.

— ¿Cómo caracterizas a una homotopía ?

— Una homotopía, en principio, es una familia continua de funciones continuas, el parámetro es el intervalo $[0,1]$. Esto se puede ver de la siguiente forma: Yo puedo pensar la circunsferencia en el plano mediante la función inclusión. Supongamos que doy la circunsferencia por el ángulo α , la función es $(\sin \alpha, \cos \alpha)$. Ahora, hay otra función de la circunsferencia en el plano que es la función constante $(0,0)$, todo punto de la circunsferencia lo manda al $(0,0)$. Es una función no biunívoca, continua. Puedo tratar de relacionar estas dos funciones mediante la idea intuitiva de llevar esa circunsferencia hasta un punto.

— ¿Cómo hacés eso ?

— Una posibilidad es achicarle el radio. En lugar de $(\sin \alpha, \cos \alpha)$ pongo $(t \cdot \sin \alpha, t \cdot \cos \alpha)$. Voy a tener, así, una familia de funciones con parámetro t , para cada t una función. Eso sería una homotopía. Y lo que dice eso es que hay una homotopía que parte de la función inclusión (de la circunsferencia en el plano) y termina en la función constante. Dicho de otra manera, la inclusión de la circunsferencia es homotópica a la función constante.

Un punto y una bola yo no los puedo distinguir homotópicamente, y sí topológicamente: topológicamente sí porque no hay ninguna correspondencia biunívoca entre ellos, pero puedo encontrar una equivalencia homotópica entre una bola sólida y un punto. Por lo tanto todo lo que yo diga en términos de invariantes homotópicos de un punto vale para una bola. En esto se ve que la correspondencia no es biunívoca, ya que la recíproca no es cierta. Invariantes diferentes aseguran diferente tipo topológico.

La Topología algebraica en gran parte renuncia a la clasificación topológica pero no a la clasificación homotópica.

y ese fue durante años el problema central de la Topología: distinguir con un número finito o numerable, en lo posible, de invariantes la clase de homotopía de un espacio.

Hay muchos invariantes diferentes que se pueden definir, se pueden complicar muchísimo, donde antes tenía un grupo puedo agregar propiedades para que se convierta en un anillo o estructuras más complejas, familias de grupos ligados por homeomorfismos. El problema general no se resuelve, pero se resuelve para cierta clase de espacios de los cuales hay por lo menos uno en cada clase de homotopía.

Hay otra cosa que se llama Topología diferencial.

Una variedad es una superficie, una línea y sus equivalentes en más dimensiones, espacios localmente equivalentes, a un espacio euclídeo. Si yo tomo una variedad puedo estudiar, puedo encontrar ciertas propiedades topológicas que no dependen de que esa variedad tenga una determinada estructura como variedad diferencial, o sea que los pedazos en los cuales es equivalente a un espacio euclídeo no se cambien mediante coordenadas diferenciales. Yo doy una variedad diferencial exhibiendo un conjunto un conjunto de cambios de coordenadas - la carta -. Hay una enorme cantidad de propiedades que no dependen en absoluto de cual es la carta, pero sí de que exista alguna. Ni siquiera en la demostración voy a usar una carta particular.

La Topología de las variedades diferenciales estudia que propiedades tienen las variedades diferenciales en cuanto espacios topológicos. Es una rama importante porque se acerca a la geometría.

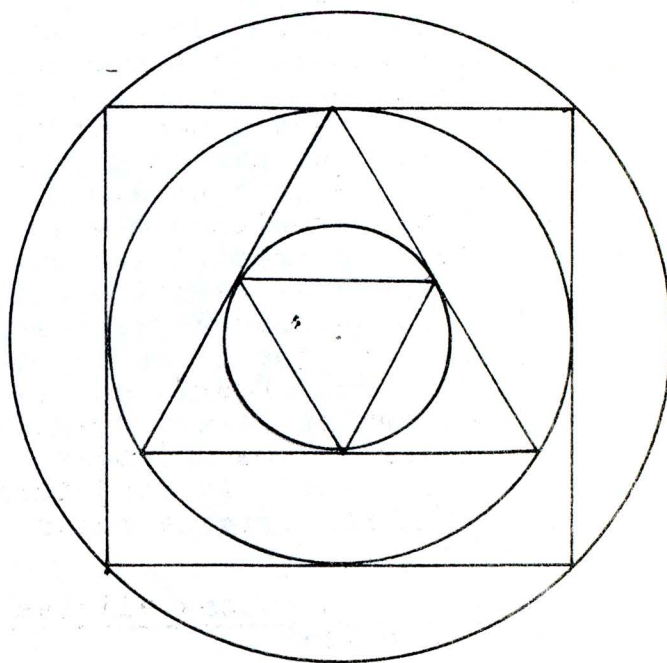
— Vos hablaste antes de que tenías, en algún momento, que plantearte la vinculación de estas generalizaciones con estructuras más concretas. ¿Cómo es esta

vinculación ?

— Hay una cosa que es un ida y vuelta permanente: una generaliza, demuestra cosas muy profundas, pero esos teoremas son algo así como de malla ancha, con ellos abarco mucho pero las cosas finas se escapan. Yo puedo demostrar enormes teoremas sobre espacios topológicos muy abstractos que no me dicen absolutamente nada sobre una variedad, que es un espacio más concreto, que quizá para trabajar a mi me importa mucho.

— ¿Cómo plantearías, resumiendo, el problema central de la Topología ?

— Lo plantearía así: Dados dos espacios ver si son equivalentes o no, y, un poco más en general, dados dos espacios saber si existe alguna función que los vincule con una cierta propiedad. Entonces, uno puede decir: si la función existe el método razonable es construirla. Uno exhibe la función, fabricando explícitamente la homotopía, como hice hace un rato con la homotopía entre una circunsferencia y un punto, y no hay más problemas.



--¿Cómo estudias un problema topológico?

-- Yo tengo dos conjuntos X e Y y una función de X en Y : si consigo transformarlo en un problema algebraico puedo considerarlos como $P(X)$, $P(Y)$, y una función. Si demuestro que no existe ese diagrama entonces quiere decir que convertí el problema topológico en un problema algebraico sin solución; entonces el problema primitivo tampoco la tiene. Los problemas de inmersión son más complicados pero igual se usan estos métodos.

El álgebra puede volver sobre la topología y sería interesante una vuelta sobre los objetos de los que se partió. Estudiar, por ejemplo la clasificación de variedades.

--¿Qué tipo de clasificación?

-- Bueno, decir cuántas variedades hay y cuáles son; por ejemplo: se podría decir que existen dos clases de variedades compactas y unidimensionales: circunferencias con borde y no conexas. En dimensión 3 es más complicado. Un teorema de clasificación dice que toda superficie que sea homotópicamente equivalente a una esfera es topológicamente equivalente a la misma. La conjetura de Poincaré dice que esto sucede en dimensión 3, y de allí se generaliza a variedades n -dimensionales. Está probada para n mayor o igual que 5 ¿qué pasa en dimensión 3 y 4? son problemas muy interesantes del tipo metafísico que plantea el teorema de Fermat. Utilizamos una proposición aparentemente tan simple pero que no se ha podido demostrar aún. Podría decirse que el teorema de Fermat origina el álgebra moderna. De ahí sale la teoría de ideales. La conjetura de Poincaré también origina ramas de la matemática.

--Vos trabajás con psicoanalistas ¿qué hacés con ellos?

--En principio, les doy clases de matemática, particularmente de topología.

Es un trabajo bastante especial. De lo que quiere o sabe un psicoanalista del tema a lo que sé yo, hay mucha diferencia. En general ellos lo reciben a través de un texto de Lacan, o algún discípulo suyo y entonces quieren saber qué es la topología.

--¿Qué relación hay entre topología y psicoanálisis?

--La relación se establece a través de Lacan, que empieza a usar superficies topológicas, por lo tanto los lacanianos o los que intentan acercarse a eso quieren saber qué es la topología y para qué sirve.

Conozco muy poco gente a la cual el problema que se le plantea es de topología. El problema es leer a Lacan. Ahora, uno podría plantear hipótesis razonables sobre los motivos que llevaron a Lacan a utilizar la topología. Por ejemplo, ver al sujeto como una cáscara que separa el mundo externo del interior, o como una membrana protectora. Uno podría decir que ahí se terminó todo o decidirse a probar razonablemente que el sujeto es una superficie - el ideal sería una demostración de un teorema, pero los psicoanalistas nunca van a llegar a eso --.

Es una primera manera de justificar porque alguien se lo ocurrió usar la topología. Tengo una estructura de la cual sé que localmente puedo pensarla como una superficie que distingue dos caras (interior y exterior) pero que globalmente no. Yo tengo la opción de decidir que como esta imagen no me sirve la tiro y sigo escribiendo sobre el tema o teorizando y no me preocupo más por esa "representación", o tomármelo en serio y decir: si no es una superficie, ¿qué es? Es una super

Ficis de una cara que localmente, como toda superficie, tiene dos caras. La cosa no se sostiene demasiado, porque uno quiere meterse en espacios tridimensionales, lo que justamente obliga a plantear otra cuestión: ¿Qué tiene que ver uno con el espacio en que uno vive? Nosotros lo vemos tridimensional, pero todo es mucho más complejo, inclusive por que cuando se piensa en adaptación pura, no puede pensarse en términos muy elementales. El espacio tridimensional es un dato a tener en cuenta, pero podríamos preguntarnos porqué nuestra percepción del espacio-tiempo no está adaptada a un sentido relativista.

La manera de trabajar es fea. Primero hay que conseguir que alguien piense en una esfera o un toro independientemente de su representación en el espacio, cosa que intuitivamente es muy difícil.

En este momento estoy planteando el problema más general. Para nosotros el espacio es importante y entonces lo primero que hago es ver lo que puedo decir sobre él. Probar como teorema que una superficie es orientable sí y solo sí tiene dos caras es muy importante aparte del resultado en sí porque de ahora en adelante estos dos conceptos serán para el matemático totalmente equivalentes, y eso es lo que le gusta. Uno no se da cuenta de que antes de demostrar ese teorema él los distinguió. Cuando se dice por ejemplo: "La vaca come pasto", vaca es una cosa y pasto otra y podemos dar una relación entre ellos. Algo así pasa con orientable y bilátero.

--¿Desde qué otro enfoque podría pensarse que Lacan llegó a la topología?

--La lógica es la lógica del pensamiento establecido. Lacan plantearía que hay otras cosas que no son abarcadas por la lógica. Uno podría decir,

si son ilógicas basta, o bien, según un proyecto de Lacan, construir una lógica adecuada. En ese camino aparece el hecho de que la lógica de proposiciones es equivalente al álgebra de Boole de la teoría de conjuntos.

--¿Por qué puede funcionar una teoría que identifica al sujeto con una superficie?

-- Por ejemplo, la retina es una superficie; el espacio es tridimensional y este es un dato a tener en cuenta. Esto no quiere decir que la estructura final a la que lleguemos tenga que ser una superficie, pero es razonable partir de ese dato.

--Tu trabajo con psicólogos, ¿consiste en buscar una topología que a ellos les interese?

-- Una primera etapa es establecer un cierto programa de trabajo, una introducción a la topología que sea bastante cerrada, que parta de bases intuitivas y que tenga un teorema final, por ejemplo un teorema de clasificación de superficies, que sea bastante rico en sí mismo.

Las superficies se prestan mucho porque uno puede ir a los textos de Lacan y señalar varios lugares donde aparecen.

Es muy difícil para mí porque tendría que estar en la cabeza del psicólogo y saber qué está pensando. Yo tengo una idea aproximada de esto, pero nada más, si no yo podría escribir un texto de psicoanálisis. El no puede tampoco expresar claramente sus proposiciones topológicas porque no dispone del lenguaje adecuado.

Para mí (no cómo lo ven los otros) mi trabajo es ver qué estructuras matemáticas responden a los requerimientos de los textos de Lacan.

Por ejemplo: resaltar el problema de que la situación de una superficie en el espacio puede ser la estructura fundamental que a uno le interesa es una cosa a la que yo llego yendo y volviendo con el psicoanalista.

--¿ La idea del psicoanalista que llega a vos es dar una explicación más científica, una explicación matemática a los problemas de la personalidad o lograr simplificar variables?

-- No está aceptado que el psicoanálisis sea una ciencia, pero me hace acordar al cuento de Popeye: El padre de Popeye le pega a Olivia una cachetada. Ella le dice que no es un caballero, "Claro que no, soy un marinero", le contesta él. Los psicoanalistas mismos discuten si es una ciencia o no, Para mí existe una única ciencia, la física, que sirve de modelo a la epistemología. To-

do lo demás: la química es una ciencia experimental, la biología no sirve como modelo. La gente que hace epistemología está, en general, muy aferrada a la física; inclusive lo que se entiende por matemática aplicada (recién ahora empieza a verse otra cosa) es la matemática aplicada a la física. Lo que puede buscar un psicoanalista no es la formalización en el sentido en que la puede entender el físico. Yo me apoyo en la teoría de Lacan.

--¿Cuál es la posición de Lacan al respecto?

--Son muy interesantes las charlas que dio en una universidad norteamericana en 1975. Después de varias preguntas le dicen: "¿Para qué matematizar el psicoanálisis?" El responde que no está tratando de matematizar el psicoanálisis sino de hallar el núcleo matematizante del psicoanálisis.

32

... El 10 de este mes se llevó a cabo en nuestra Facultad un Festival de música a total beneficio de los damnificados por las inundaciones en Formosa.

Participaron del mismo, representantes de la mejor música joven nacional: Alejandro Santos, Rubén Rada, el dúo Baraj-Barrueco, Raúl Peña y Juan Carlos Baglietto. Sobre el final, numerosos jóvenes estudiantes hicieron gala de su entusiasmo y musicalidad acompañando a los artistas.

Una mención aparte merece el desempeño de los locutores, exponentes del más fino humor "atrofia", que fueron justamente silbados y abuchados por la multitud, ofrenda similar a la que recibió la Secretaría de Asuntos Estudiantiles, organizadora de tan agradable velada.

fluencia sobre la Universidad lo que hacía que todas las ideas que contradijeran su doctrina no fueran objeto de estudio (como pauta de esta influencia se puede mencionar que el nombre de Jesús figuraba en el escudo de la Universidad y que el juramento profesional debía hacerse obligatoriamente sobre los Santos Evangelios).

El siguiente párrafo del "manifiesto liminar", emitido por los estudiantes cordobeses en 1918, ilustra la situación entonces imperante en las universidades argentinas: "...los métodos docentes estaban viciados de un estrecho dogmatismo, contribuyendo a mantener a la Universidad apartada de la ciencia y de las disciplinas modernas. Las lecciones, encerradas en la repetición interminable de viejos textos amparaban el espíritu de doctrina y sumisión. Los cuerpos universitarios, celosos guardianes de los dogmas, trataban de mantener en clausura la juventud...". Como solución a este problema continuaban diciendo: "...la juventud ya no pide. Exige que se le reconozca el derecho a exteriorizar ese sentimiento propio en los cuerpos universitarios, por medio de sus representantes...".

Las propuestas reformistas para la organización de la Universidad pueden resumirse en los siguientes puntos: autonomía universitaria, participación estudiantil, gobierno democrático interno, docencia libre, programas de extensión universitaria.

Autonomía universitaria: Considera que es la universidad misma quien debe dictar sus propios reglamentos y elegir su gobierno que debe funcionar independientemente del gobierno nacional.

Participación estudiantil: de acuerdo con el pensamiento reformista el alumno es "el pueblo presente en las aulas" por lo que exige que se le reconozca el derecho a expresar sus propias ideas en los cuerpos universitarios por medio de sus representantes que los integran en proporción

igual que los docentes.

Extensión universitaria: Considerando que las instituciones culturales están vinculadas con el medio en que tienen que desarrollar su tarea y que la creación de la cultura es un proceso que exige la participación de todos los sectores de la sociedad, la Universidad debe desarrollar programas de "extensión" que le permita desarrollar actividades con todos esos sectores.

Concursos docentes: La designación de un profesor se debe realizar mediante concursos libres por antecedentes y oposición, a los cuales puede presentarse cualquier persona que llenare los requisitos académicos sin que exista ningún otro tipo de discriminación.

Un jurado designado democráticamente por las autoridades de cada facultad debe examinar comparativamente los antecedentes y títulos de los aspirantes y expresar por escrito y publicar sus juicios fundados sobre cada candidato, justificando su elección.

Los concursos se deben realizar periódicamente, lo que evita la posible perpetuación de un docente en una cátedra si esta no es la voluntad de los cuerpos universitarios.

Gobierno democrático interno: El gobierno de la Universidad estará ejercido por cuerpos cuyos miembros sean electos por los integrantes de la misma (alumnos y docentes) y graduados en forma democrática y periódica.

COMPOSICIÓN del GOBIERNO UNIVERSITARIO	FORMA de ELECCIÓN Y DESIGNACIÓN de AUTORIDADES ORGANIZACIONES ESTUDIANTILES	ECONOMÍA UNIVERSITARIA
LEY: 1597 <u>Asamblea:</u> formada por los miembros titulares de las facultades y presidido por el Rector. <u>Consejo Superior:</u> compuesto por el Rector, decanos y dos delegados de cada facultad. Rector: representante de la Universidad. <u>Facultades:</u> compuesta por miembros titulares, honorarios, correspondientes y el decano.	AÑO: 1885 Presidente: Gral. Julio A. Roca <u>Rector:</u> elegido por la Asamblea por boleta firmada y por mayoría absoluta de votos. <u>Décano:</u> elegido por las facultades por mayoría absoluta de votos. <u>Profesores Titulares:</u> nombrados y removidos por el P.E.N. de una terna de candidatos propuesta por la facultad respectiva y aprobada por el Consejo Superior. <u>Profesores Suplentes:</u> nombrados por las facultades. <u>Organismos estudiantiles:</u> no está legislado.	El proyecto de presupuesto universitario es formulado por el Consejo Superior (autonomía administrativa). Cada facultad dispondrá de los fondos universitarios designados para sus gastos, rindiendo cuenta anualmente al Consejo Superior.
LEY: 13.031 <u>Consejo Nacional Universitario:</u> formado por rectores y presidido por el Ministro de Justicia e Instrucción Pública. <u>Consejo Universitario:</u> formado por el Rector, Vicerrector,	AÑO: 1947 Presidente: Tte.Gral. Juan D. Perón <u>Rector:</u> designado por el P.E.N. <u>Decanos y Vice-Decanos:</u> elegidos de una terna propuesta por el Rector al Consejo Directivo.	Son funciones del Rector: dirigir la administración de la Universidad. El Consejo Universitario proyecta el presupuesto anual.

LEY: 22207

AÑO: 1980

Presidente: Tte. Gral. Roberto E. Viola (no constitucional)

<u>Consejo de Rectores:</u> Integrado por los Rectores, que asesoran al Ministerio de Cultura y Educación en relación a la política universitaria. <u>Asamblea Universitaria:</u> Formada por el Rector, Vice Rector, el Consejo Superior, Decanos, Vice-Decanos y los Consejos Académicos. <u>Consejo Superior:</u> Formado por representantes de los Consejos Académicos. <u>Rector</u> <u>Vice-Rector</u> <u>Consejos Académicos:</u> Integrado por el Decano, Vice-Decano y profesores ordinarios.	<u>Rector:</u> Elegido por el P.E.N. a propuesta del M.C.E. <u>Vice Rector:</u> Elegido por el M.C.E. a propuesta del Rector. <u>Decano:</u> Idem Vice Rector <u>Vice-Decanos:</u> Elegidos por el Rector a propuesta del Decano. <u>Consejos Académicos:</u> Los docentes ordinarios son elegidos por voto secreto entre los docentes de cada área con voto jerarquizado (doble para los titulares y simple para los adjuntos). <u>Docentes:</u> Son designados por concursos por oposición y antecedentes. Los no confirmados al regir esta ley cesarán en sus funciones. Corresponde al P.E.N. la orientación de la política universitaria. Se prohíbe el proselitismo político en el ámbito universitario.	Establece la autarquía financiera. La enseñanza podrá arancelarse. La Universidad podrá disponer la percepción de tasas para la prestación de servicios administrativos. El presupuesto podrá ser reajustado por el Consejo Superior sin alterar los montos de los respectivos programas. No podrán incrementarse las partidas para financiar gastos de personal ni disminuirse el monto total de las designadas a obras públicas sin autorización del P.E.N. Podrá reajustar la plan-ta de cargos docentes sin alterar el monto total de esa partida. <u>Recursos:</u> Contribución del Tesoro Nacional. Los provenientes de su Fondo-Universitario.
--	--	--

tor, Decanos y Vice-Decanos. <u>Rector:</u> <u>Vice-Rector</u> <u>Facultades:</u> Consejo Directivo y Decanos. <u>Consejo Directivo:</u> Decano y diez consejeros. Un delegado alumno por cada escuela, con voz pero sin voto.	<u>Consejo Directivo:</u> los con-sejeros son elegidos en comi-cios de profesores por voto secreto. <u>Delegados Alumnos:</u> se eleji-rán por sorteo entre los diez alumnos de calificaciones mas altas del último año. <u>Profesor Titular:</u> designados por el P.E.N. de una terna. <u>Organización Estudiantil:</u> los estudiantes tendrán re-presentación en el Consejo Directivo por intermedio de un delegado por escuela. Pro-hibición de la actividad po-lítica.	
LEY: 14.297	AÑO: 1954	Presidente: Tte.Gral. Juan D. Perón
<u>Consejo Universitario:</u> esta-rá integrado por Rector, De-canos y Vice-Decanos. <u>Rector</u> <u>Vice-Rector</u> <u>Consejo Directivo:</u> integra-do por Decano, once conseje-ros y un alumno delegado. <u>Facultades:</u> Decanos y Conse-jos Directivos.	<u>Rector:</u> nombrado por el P.E.N. <u>Decanos:</u> designados por el Rector. <u>Vice-Rector:</u> elegido por el Consejo Universitario. <u>Alumnos Delegados:</u> deben ser alumnos regulares de uno de los tres últimos años y pro-venientes de una entidad gre-mial reconocida. Tendrá voto sólo en aquellas cuestiones que afecten los intereses es-tudiantiles.	Las universidades gozan de autarquía en el orden admini-strativo. El Consejo Direc-tivo proyecta el presupuesto de las facultades. El Rector dirigirá la administración general de la universidad. <u>Recursos de la Universidad:</u> 1) del presupuesto nacional 2) frutos de sus bienes par-ticulares.

	<u>Vice-Decano:</u> Designado por el Consejo Directivo <u>Profesor Titular:</u> Designados por el P.E.N. de una terna elevada por el Rector previo concurso. <u>Organizaciones Estudiantiles:</u> No está legislado.	
DECRETO LEY: 6403 AÑO: 1955 Presidente: (no constitucional) Gral. Pedro E. Aramburu		
<u>Asamblea Universitaria:</u> Intergrada por el Rector, Decanos, y miembros de los Consejos Directivos (presidida la primera vez por el interventor). <u>Consejo Superior:</u> Formada por el Rector, Decanos, representantes de profesores titulares, delegados de estudiantes y egresados. <u>Rector</u> <u>Consejo Directivo:</u> Formado por el Decano, representantes de profesores titulares, adjuntos o suplentes, estudiantes y egresados (presidida la primera vez por el delegado interventor).	<u>Rector:</u> Elegido por la Asamblea entre los profesores titulares. <u>Decano:</u> Designado por cada Consejo Directivo entre los profesores titulares. <u>Delegados:</u> Deben ser alumnos de los dos últimos años. El número de delegados es fijado por la facultad (la primera vez por el delegado interventor). <u>Organizaciones Estudiantiles</u> No está legislado.	El artículo 27 dispone la autarquía financiera. Creación del Fondo Universitario General.

LEY: 14557 AÑO: 1958 Presidente: Dr. Arturo Frondizi	Esta ley es la primera que fija el funcionamiento de universidades privadas. La organización del gobierno universitario queda en manos de cada universidad, con organización académica similar a las universidades nacionales. Los estudiantes no participan en ningún caso en el gobierno	Cada Universidad designará sus propias autoridades de acuerdo a la forma establecida por ellas.	El Estado se reserva el derecho de controlar periódicamente el desenvolvimiento económico de las Universidades.
LEY: 17245 AÑO: 1967	<u>Asamblea Universitaria:</u> Formada por el Rector, Decano y miembros del Consejo Académico. <u>Rector</u> <u>Vice Rector</u> <u>Consejo Superior:</u> Formado por el rector y los Decanos <u>Consejo Académico:</u> Formado por el Decano y siete consejeros	Presidente: Tte. Gral. Juan C. Onganía (no constitucional)	Autarquía financiera y administrativa. El Consejo Superior aprueba, modifica y reajusta el presupuesto. La enseñanza será gratuita salvo en los cursos de post grado.

LEY: 20654

AÑO: 1974

Presidente: Tte. Gral. Juan D. Perón

Asamblea Universitaria: Formada por el Rector, miembros del Consejo Superior y los de los Consejos Directivos de las unidades académicas.

Rector: Designado por un año por el Poder Ejecutivo hasta que las Universidades dicten sus reglamentos internos.

Establece la autarquía administrativa, económica y financiera. La enseñanza será gratuita. Los recursos provenirán de las contribuciones del Tesoro y del Fondo Universitario Permanente.

Consejo Superior: Integrado por el Rector, los Decanos y representantes de docentes estudiantes y personal no docente..

Delegados: Los alumnos elegirán por voto obligatorio y secreto los delegados al Consejo Superior y al Consejo Directivo. Estos tendrán voz y voto. Deberán ser argentinos y seguir carreras o cursos universitarios.

Rector

Consejo Directivo: Constituido por el Decano y representantes de los tres estamentos.

Decano

LEY: 21276

AÑO: 1976

Presidente: Tte. Gral. Jorge R. Videla (no constitucional)

El gobierno de las Universidades será ejercido por el Ministerio de Cultura y Educación, los Rectores o Presidentes y Decanos o Directores, designados por dicho Ministerio.

Los Rectores y Decanos serán designados por el P.E.N.

El ministro establecerá las normas administrativas y presupuestarias generales. Los proyectos de presupuestos anuales serán elevados al P.E.N.

Teorema de Weierstrass

Introducción

Uno de los problemas más importantes de que trata el análisis funcional es el de la aproximación de funciones.

En general, el problema consiste en aproximar una función dada por una sucesión de funciones que pertenecen a una clase más restringida (que resulta, por lo tanto, más conocida, en general).

En realidad, se debe especificar el sentido en el cual se entiende la aproximación. Así, por ejemplo, se puede considerar aproximación puntual:

"Dada una función g , hallar una sucesión f_n de funciones tal que, para todo x del dominio de g , se cumpla $f_n(x) \rightarrow g(x)$, con $n \rightarrow \infty$ ".

O bien, definida una distancia en un conjunto de funciones hallar una sucesión f_n tal que $d(f_n, g) \rightarrow 0$, con $n \rightarrow \infty$; si f_n y g pertenecen a dicho conjunto.

En nuestro caso nos ocuparemos de un problema relacionado con la convergencia uniforme de funciones.

Definición

Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) converge uniformemente a f sobre A si, para todo $\varepsilon > 0$, existe

$n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0(\varepsilon)$, tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$, si $n \geq n_0$.

(Notación $f_n \rightarrow f$ en A).

Muchas veces, es útil aproximar uniformemente una función por medio de funciones que pertenecen a una clase de funciones que resultan más fáciles de manejar, respecto del problema que se trata.

Esta situación se presenta frecuentemente en problemas de acotación precisa de error, paso al límite, etc. Por ejemplo en el caso de integrales sobre conjuntos acotados, es suficiente la condición de convergencia uniforme de una sucesión de funciones para pasar al límite bajo el signo de la integral:

$$f_n \rightarrow f \text{ en } A \Rightarrow \lim \int_A f_n = \int_A \lim f_n = \int_A f$$

En particular, si aproximamos uniformemente una función por una serie, se puede calcular la integral de la función "integrando la serie término a término".

Otras veces, se obtienen datos de la función límite uniforme a partir de condiciones en las funciones de la sucesión:

"Si $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas y $f_n \rightarrow f$ sobre $[a, b]$, entonces f es continua sobre $[a, b]$ ".

(ejemplo: considerar $f_n(x) = x^n$ en $[0, 1]$; véase que el límite no es continuo, luego no puede haber convergencia uniforme).

En este número daremos la demostración de un resultado clásico de la teoría: el Teorema de Weierstrass (1885), que, en su versión más sencilla afirma que si una función es continua sobre un intervalo acotado $[a, b]$ existe una sucesión de polinomios que la aproximan uniformemente sobre ese intervalo. Este resultado tiene gran importancia en la solución teórica de muchos problemas, tanto de matemática pura como aplicada.

La demostración introduce los polinomios de Bernstein (llamados así por

que fueron usados por S.N. Bernstein en la prueba que dió de este teorema en 1912).

Está basada en un teorema de P.P. Korovkin, el cual presenta interés por sí mismo, dado lo sorprendente del resultado, obtenido a partir de hipótesis relativamente débiles.

Las demostraciones fueron extraídas del libro "Linear operators and Approximation theory" de P.P. Korovkin, Hindustan Publishing corp., Delhi 1960.

Agradecemos la colaboración del Dr. R. Durán quien nos sugirió la nota, nos facilitó el libro y corrigió el manuscrito.

Preliminares

Un operador T es una aplicación entre dos conjuntos A y B de funciones (a valores reales, por ejemplo).

Si esos conjuntos tienen estructura de espacio vectorial, se dice que T es lineal si $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in A$

Utilizaremos indistintamente las siguientes notaciones

Si $f = f(t)$ está en A , y $P = P(x)$ está en B , y es la imagen de f por el operador T se tiene $P = T(f)$ ó $P(x) = T(f)(x)$

También pondremos $P(x) = T(f, x) = T(f(t), x)$.

Se dice que el operador T es positivo si $\forall f \in A$ tal que $f(t) \geq 0 \forall t$ del dominio de f , entonces $T(f)(x) \geq 0 \forall x$ del dominio de $T(f)$.

Si T es lineal, se comprueba casi inmediatamente que la condición de ser positivo es equivalente a: $f(t) \geq g(t), \forall t \Rightarrow T(f)(x) \geq T(g)(x), \forall x$.

Ejemplos

i) Si $u_1, \dots, u_m$ son n funciones reales y $t_1, \dots, t_m$ son n números reales, podemos definir $H(f, x) = H(f(t), x) = \sum_{k=1}^m f(t_k) u_k(x) = P(x)$

Es inmediato comprobar que es lineal, y que es positivo si $u_1, \dots, u_m$ son positivos ($u_k(x) \geq 0 \forall x$). Notemos que H está definido sobre el conjunto de funciones definidas sobre $t_1, \dots, t_m$.

ii) Sea $P: [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}; (t, x) \longrightarrow P(t, x)$, una función continua. Entonces podemos definir el operador $H(f, x) = \int_a^b f(t) P(t, x) dt = T(x)$ sobre las funciones continuas en $[a, b]$

Se ve bien que $T(x)$ es continua en $[a, b]$, y que H es lineal, y será positivo si P es ≥ 0 .

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar los resultados:

Teorema (de P.P. Korovkin)

Sea T_m una sucesión de operadores lineales y positivos, que mandan funciones reales en funciones reales, con las siguientes propiedades

i) $T_m(1, x) = 1 + \alpha_m(x)$

ii) $T(t, x) = x + \beta_m(x)$

iii) $T(t^2, x) = x^2 + \gamma_m(x)$

donde $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ convergen uniformemente a 0, en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Entonces si $f = f(t)$ es continua en $[a, b]$, la sucesión $T_n(f, x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en $[a, b]$.

Demostración

Como f es acotada (por ser continua en un intervalo cerrado), existe $M > 0$ / $-M < f(t) < M$, y también $-2M < f(t) - f(x) < 2M$, cualesquiera sean t y x en $[a, b]$.

Además, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$-\varepsilon < f(t) - f(x) < \varepsilon \quad \text{si: } \begin{matrix} x \in [a, b], \\ t \in [a, b], \end{matrix} \quad \text{y } |t - x| < \delta \quad (f \text{ es continua en } [a, b])$$

Si llamamos $\gamma(t) = (t - x)^2$, (x es un elemento cualquiera de $[a, b]$, fijo) se obtiene

$$-\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2} \gamma(t) < f(t) - f(x) < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \gamma(t) \quad (*)$$

En efecto:

$$|t - x| < \delta \Rightarrow (t - x)^2 < \delta^2 \Rightarrow \gamma(t) \frac{2M}{\delta^2} < \delta^2 \frac{2M}{\delta^2} = 2M$$

Observando las acotaciones anteriores, y el hecho que M y ε son > 0 , deducimos el resultado.

Si aplicamos T a la expresión (*), usando linealidad y positividad, tenemos

$$\begin{aligned} -\varepsilon T_n(1, x) - \frac{2M}{\delta^2} T_n(\gamma, x) &\leq T(f, x) - T_n(f(x), x) = T_n(f, x) - f(x) T_n(1, x) \leq \\ &\leq \varepsilon T_n(1, x) + \frac{2M}{\delta^2} T_n(\gamma, x) \quad (**) \end{aligned}$$

teniendo en cuenta, para la igualdad en el término central, que $f(x)$ es un número real fijo.

Veamos ahora que $T_n(\gamma, x)$ converge uniformemente a 0 en $[a, b]$. En efecto:

$$\begin{aligned} T_n(\gamma, x) &= T_n(t^2 - 2xt + x^2, x) = T_n(t^2, x) - 2x T_n(t, x) + x^2 T_n(1, x) = \\ &= x^2 + \delta_n(x) - 2x(x + \beta_n(x)) + x^2(1 + \alpha_n(x)) = \delta_n(x) - 2x(\beta_n(x)) + x^2 \alpha_n(x) = \delta_n(x), \end{aligned}$$

dado que T es lineal y x es fijo en $[a, b]$. De las hipótesis (i), (ii) y (iii), se deduce que: $\delta_n(x) \rightarrow 0$ uniformemente en $[a, b]$.

Es decir que el miembro izquierdo de (**) converge uniformemente a $-\varepsilon$ y el derecho a ε , en $[a, b]$.

Por lo tanto, $\exists N = N(\varepsilon)$ tal que para todo $x \in [a, b]$ se verifica

$$-2\varepsilon < T_n(f, x) - f(x) T_n(1, x) < 2\varepsilon, \quad \text{si } n > N(\varepsilon).$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario se deduce que $T_n(f, x) - f(x) T_n(1, x)$ converge uniformemente a 0 en el intervalo y, en vista de la condición i)

$T_n(f, x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en el intervalo, c q d.

Ejercicio: el mismo resultado se puede obtener si se reemplazan ii) y iii) por enunciados equivalentes para $\cos(t)$ y $\sin(t)$ y pidiendo que f tenga período 2π . En la demostración considérese $\gamma(t) = \sin(\frac{t-x}{2})$ y utilícense identidades trigonométricas.

Teorema de Weierstrass (1885)

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $a \leq x \leq b$ y $\varepsilon > 0$, entonces se puede encontrar un polinomio $P(x)$ tal que $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ para todo x en ese intervalo.

Demostración: (Bernstein, 1912.)

Pongamos $B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

Los operadores $B_n(f, x)$ se llaman polinomios de Bernstein.

Es sencillo de ver que son lineales, positivos en $[0, 1]$ y son polinomios en x de grado n .

Probaremos que la sucesión $B_n(f, x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$. Según el teorema anterior basta ver que esto es válido para:

$$f_k(t) = t^k \quad (k = 0, 1, 2)$$

Verifiquemos que se cumple el teorema anterior:

$$B_n(1, x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1-x)^n = 1$$

$$B_n(t, x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Pero $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$

$$\text{Luego } B_n(t, x) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = x(x + 1-x)^{n-1} = x$$

Por último tenemos

$$\begin{aligned} B_n(t^2, x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n-1} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 (x + 1-x)^{n-2} + \frac{x}{n} (x + 1-x)^{n-1} = x^2 + \frac{x - x^2}{n} \rightarrow x \end{aligned}$$

Luego, hemos probado que la sucesión $B_n(f, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ sobre $[0, 1]$. De aquí es sencillo pasar al caso en que f es una función continua sobre un intervalo $[a, b]$ cualquiera.

Sea $g(y) = f(a + (b-a)y)$. Como $g(y)$ es continua en $[0, 1]$, existe un polinomio $P(y)$ tal que

$$|P(y) - g(y)| < \varepsilon \quad \text{si } 0 \leq y \leq 1$$

Poniendo $y = \frac{x-a}{b-a}$ $Q(x) = P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$, $Q(x)$ resulta un polinomio, y además

$$g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = f\left(a + (b-a)\frac{x-a}{b-a}\right) = f(x), \text{ por lo que}$$

$$\varepsilon > |P\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)| = |Q(x) - f(x)| \quad \text{si } a \leq x \leq b$$

Esto completa la demostración.

... También en la reunión de San Luis se concretó la reorganización de la A.F.A. (Asociación Física Argentina) entidad gremial que había cesado de funcionar en 1976 y que nuclea a numerosos científicos argentinos.

Durante los meses que median entre la reunión de San Luis y la de La Plata se están recomponiendo los padrones de socios. Los estudiantes que deseen asociarse a la A.F.A. en calidad de tales, deben tener 13 materias de la carrera aprobadas y pueden retirar los formularios en el dpto. de Física.

Epistemo... ¿qué?

Muchos alumnos (futuros científicos) de nuestra facultad saben que la epistemología es el estudio de la filosofía de la ciencia, pero la mayoría no ha ido más allá en ese terreno.

Para mostrar el importante papel que debería desempeñar en la formación de un científico, transcribimos parte de un texto de Mario Bunge :

"El estudiante de ciencias o el científico que alguna vez dedique parte de su tiempo a estudios epistemológicos podrá obtener de éstos alguno de los siguientes beneficios:

a) no será prisionero de una filosofía incoherente y adoptada inconscientemente; podrá entonces corregir, sistematizar y enriquecer las opiniones filosóficas que de todas maneras integran su visión del mundo;

b) no confundirá lo que se postula con lo que se deduce, la convención verbal con el dato empírico, la cosa con sus cualidades, el objeto con su conocimiento, la verdad con su criterio, y así sucesivamente. (...)

c) se habituará a explicar las suposiciones e hipótesis, lo que le permitirá saber qué es lo que hay que corregir cuando la teoría no concuerda satisfactoriamente con los hechos;

d) se acostumbrará a ordenar sistemáticamente las ideas y a depurar el lenguaje; se habituará, en suma, a buscar la coherencia y la claridad;

e) afilará su bisturí crítico: la meditación epistemológica, al habituar a exigir pruebas, es buen preventivo del dogmatismo;

f) el científico con alguna formación epistemológica podrá mejorar la estrategia de investigación, al proceder con mayor cuidado en el planeamiento de los experimentos o de los cálculos y en la formulación de las hipótesis, así como en la evaluación de las consecuencias de unos y otras. La epistemología ciertamente no ayuda a medir ni a resolver ecuaciones, pero en cambio ayuda a ubicar estas operaciones en el proceso de la investigación;

g) su atención se desplazará del resultado al problema, de la receta a la explicación, de la ley empírica a la ley teórica.(...). El estudio de la epistemología, al tornarlo profesión, podrá estimularlo a explorar nuevos territorios;

h) la filosofía y la historia de la ciencia le acostumbrarán a considerar la marcha de la ciencia, no como un desarrollo meramente aditivo, sino como un proceso en que cada solución plantea nuevos problemas (...). En cambio, para quien no enfoca la ciencia con una actitud filosófica e histórica, toda fórmula científica es trivial en cuanto a manejarla, y la teoría más reciente es la definitiva o por lo menos la penúltima.(...).

¿Para qué necesita un país técnicos y científicos, si no tiene industrias propias? ¿Para qué investigar si la poca tecnología que necesitamos la podemos comprar afuera? Obviamente estas preguntas no tienen respuesta, si se las piensa alejadas de una más general: ¿Qué país queremos?

En los días que vivimos, todos los verdaderos argentinos han dado respuesta a estos interrogantes. Hoy ya nadie puede pretender destruir desembozadamente el aparato productivo del país. ¿Cabe alguna duda que los argentinos queremos y necesitamos un país desarrollado y libre de toda dominación extranjera? ¿Cabe alguna duda de que es fundamental para el desarrollo y el progreso nacional, la puesta en marcha de planes de formación de recursos científicos y técnicos de nueva concepción?

De lo anterior, se ve, que los problemas académicos de la carrera no se encuentran separados de la realidad argentina. El hecho de que estudiemos una disciplina en apariencia abstracta como la física, no nos aísla de los problemas del mundo y, en particular, del país. Desde nuestra perspectiva de estudiantes de física y futuros científicos, podemos contribuir a solucionarlos. ¿Cómo? Es una buena pregunta, y la respuesta no es difícil. Además de asumir las responsabilidades que nos atañen como ciudadanos y como seres humanos que somos (aunque a veces no parezca) y que son comunes a todos los argentinos, podemos mejorar las condiciones de vi-

da y estudio en la facultad. Podemos intentar que nuestra facultad sirva realmente a las necesidades del país.

Por una parte está el plan de estudios que tiene materias útiles y hermosas, que tal como están dadas aparecen como inútiles y de bajo nivel (como, por ejemplo, Física IV, Física Nuclear); materias necesarias y básicas, que tal como están contribuyen a alargar aún más la carrera (caso de Análisis I y Álgebra I). Contamos con un plan de estudios que no nos permite, a los estudiantes, tener alguna idea sobre la posible salida laboral, sobre las ramas en las que se investiga en Argentina; en definitiva un plan de estudios que no está a la altura de lo que el país requiere de nosotros.

Por otra parte, tenemos un régimen de correlatividades y dictado de materias que dista mucho de ser bueno (materias claves o "filtros" como Mecánica I y Física IV se dictan una vez por año, cosa que si uno las bocha queda colgado hasta el año siguiente).

No olvidemos los laboratorios en los cuales faltan materiales y la mayoría de los prácticos que se pueden realizar no son de los más interesantes y útiles.

Tampoco los horarios de las materias (gran coordinación), que en contados casos permiten tener un trabajo estable.

Todo esto hace que hoy la ca-

rrera de física se parezca a una carrera de obstáculos y que dure un promedio de 7 u 8 años (según estimaciones de algunos docentes).

Todos estos problemas son graves e importantes, y para ser solucionados requieren que las autoridades de la facultad tomen conciencia de ellos. La única solución debe pasar por un debate amplio, por la apertura para el ingreso a la facultad de científicos argentinos de alto nivel que tienen cerrado su acceso a la universidad por razones "extracientíficas". La elevación del nivel está indisolublemente ligado con el llamado a concursos (concursos en serio), para que queden los mejores y se vayan los malos docentes. Se debe instrumentar la manera de insertar a nuestra facultad en los programas nacionales de desarrollo e investigación.

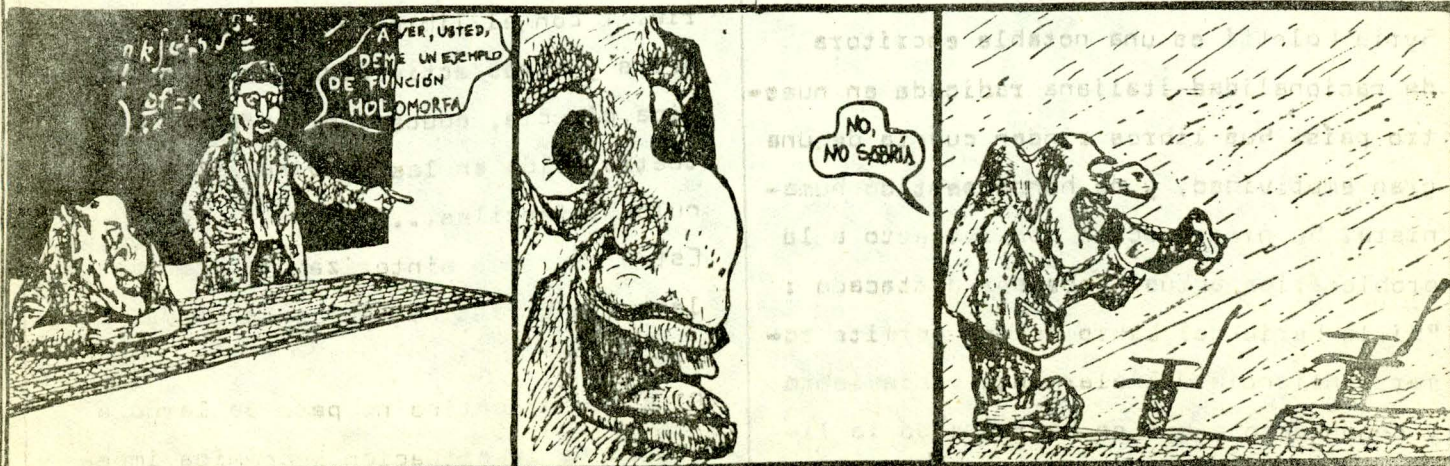
La solución a los problemas de correlatividades y dictado de materias pasa por que se dicten las

materias claves en todos los cuatrimestres y se aumenten los turnos de prácticos en horarios nocturnos, para lo cual se necesitan más docentes y mayor presupuesto (otra vez la guita).

El mejoramiento de los laboratorios requiere (además de la revisión de las prácticas actuales) la compra de materiales y equipos.

En definitiva la solución de todos los problemas de la facultad requieren de nuestro esfuerzo (del de los estudiantes, los docentes y los físicos graduados) y de nuestra participación.

Los estudiantes de física debemos participar en la solución de estos problemas, que son importantes para nosotros y para el país. Debemos opinar al respecto, debemos aportar soluciones y sacrificios si son necesarios y para eso debemos tener nuestra propia voz y esa voz debe ser escuchada.



Feria del Libro: ¿vitrina de un negocio?

Cada otoño, Buenos Aires se reencuentra con un evento esperado y reconocido cada vez por una mayor cantidad de personas: La Feria del Libro.

Lo que debiera ser un festival de la cultura, un descubrimiento de la palabra viva de nuestros artistas, un reconocimiento de nuestra historia, se queda a mitad de camino entre esto y el pasatiempo.

No, no se trata de apalcar a la feria, la cual tiene sobradas razones de existencia, se trata de dar una voz de alerta acerca de sus alcances, y de su compromiso en la realidad que vivimos.

Syria Poletti es una notable escritora de nacionalidad italiana radicada en nuestro país. Sus libros rinden cuenta de una gran emotividad, y de hondo sentido humanista. Su preocupación con respecto a la problemática actual debe ser destacada: "Si la Feria del Libro no nos permite tomar conciencia del alarmante vaciamiento y secundarismo a que se ha reducido la literatura nacional, es porque la feria es

la vitrina de un negocio; es un muestrario del mercado y no un instrumento de examen. Para ser instrumento de examen y elemento capaz de provocar modificaciones de fondo deberíamos contar con una expansión editorial pujante, capaz de reflejar toda la complejidad del país, y con una intelectualidad dueña del manejo del libro..."

"La presencia del empuje editorial de otros países debería servirnos de acicate y no de depresión, como nos sucede hoy debido a las desventajas económicas. Los negocios que se realizan entre editores extranjeros y editores argentinos no siempre son favorables a la afirmación del pensamiento y de los intereses nacionales..."

"Pero hubo obras que se hicieron conocer gracias a la Feria. Se celebran encuentros, homenajes, convenciones, reconocimientos vinculados con escritores nacionales desaparecidos, olvidados, postergados. No siempre son actos multitudinarios; pero esto no es imputable a la Feria. Y con el libro se vinculan otras artes y otras actividades: música, plástica, ciencia, educación, información, teatro, vida en las provincias, espectáculos infantiles..."

Estos párrafos sintetizan ajustadamente las características de La Feria del Libro.

El libro argentino no pasa de largo a través de la situación económica impe-

rante. En épocas donde angustian al hombre necesidades materiales y mínimas de supervivencia, el libro opaca su perfil.

La venta de libros en la Argentina disminuye día a día. Se hace imperiosa la necesidad de leyes actualizadas en defensa de los mismos: tarifas promocionales, exenciones impositivas, facilidades crediticias, etc.

Se deben recuperar los escritores "exportados".

La necesidad de total libertad de expresión es indiscutible.

¿No es el libro una de las formas capaces de enriquecer con mayor profundidad a los hombres?

¿No es a través del libro que pueden establecerse uniones indisolubles entre sentimientos y pensamientos de los hombres? No es un arma fundamental en la adquisición de conocimientos?

¿No significan acaso momentos gratos, emociones, reconocimientos de valores?

Si todo esto es también indiscutible, ¿qué se espera?



ALGO SE MUEVE

Galileo abjuró.

Dijo que se tuviera lo dicho por no dicho.

Pero desde ese día de obstinada tiniebla, nada, ni aún la nada, se mantuvo en su sitio.

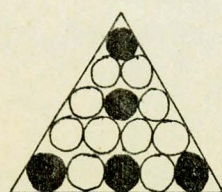
Una noción diabólica de insolentes galaxias pasó aventando el polvo muerto del Santo Oficio.

Alguien había visto por dentro el infinito.

(Armando Tejada Gómez, Tonadas para usar.)

Un momento de meditación

- ¿Cuál es el mínimo número de triángulos acutángulos en que se puede partir un cuadrado?
- Disecar un pentágono regular en 6 pedazos y reordenarlos de forma tal que queden 3 pentágonos regulares cuyos lados estén en razón 2:2:1
- a) Exhibir una forma de construir el triángulo ABC con escuadra y compás, dados el lado a , la mediana m_a y la bisectriz t_a del ángulo opuesto al lado a .
b) Análogamente si los datos son ahora el ángulo A , m_a y t_a .
- ¿Se puede separar el plano en infinitas regiones convexas de forma tal que cada recta corte sólo un número finito de ellas?
- Las caras de cada una de las quince bolitas, acomodadas según el dibujo pueden estar coloreadas de blanco o negro. Probar que siempre existen tres bolitas del mismo color cuyos centros son los vértices de un triángulo equilátero.



- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $\forall q \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N} / f(q) = 0$.
¿Implica esto que $\forall t \in \mathbb{R}, \exists n / f(t) = 0$?
- Sea $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y con derivada continua tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\exists x_1, \dots, x_n$ todos distintos tal que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(x_i)} = n$$

- Encontrar todas las soluciones racionales de la ecuación; $x^y = y^x$
- Demostrar que para todo X, Y , positivos:
 $x^y \cdot y^x \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}$
y la igualdad vale $\Leftrightarrow X=Y$.
- Demostrar que si p es un primo de la forma $p=2^n+1$ (Fermat) $\Rightarrow$ no es diferencia de potencias quintas de números enteros.
- Encontrar todos los n si M es una matriz de $n \times n$ a coeficientes reales, siendo I la matriz identidad, entonces ocurre alguna de las tres cosas:
i) M es inversible
ii) $M-I$ es inversible
iii) M es idempotente
- Encontrar dos matrices tal que sólo las escalares conmuten con ambas a la vez. Para el lector informado: se pueden encontrar tales matrices en cualquier anillo con unidad.
- a) Calcular el determinante de la matriz (a_{ij}) , donde $a_{ij} = (i+j)$
b) Lo mismo para $a_{ij} = i+j$
- Demostrar que dos anillos de Boole (anillos conmutativos con identidad tales que todo elemento es idempotente) son isomorfos si y sólo si sus semigrupos multiplicativos lo son.

