# TRATADO ELEMENTAL

DE

# GEOMETRÍA EUCLÍDEA

DE ACUERDO CON LAS IDEAS MODERNAS Y MÉTODOS MÁS RIGUROSOS

POR

C. C. DASSEN
Ingeniero civil; doctor en ciencias físico-matemáticas

---

## Tomo I. — GEOMETRÍA PLANA

Texto adaptable á los programas de los Colegios Nacionales y Escuelas Normales

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA DE CONI HERMANOS
684 — CALLE DEL PERÚ — 684

1904

# OBRAS DEL MISMO AUTOR

---

*La diagonalidad; Elementos diagonales.*

*El juego del nudo gordiano.*

*Factores de destrucción de los pavimentos.*

*Estudio crítico de la pavimentación de Buenos Aires, en los años 1899, 1900, 1901, 1902, 1903* (5 folletos).

*Metafísica de los conceptos matemáticos fundamentales* (espacio, tiempo, cantidad y límite) *y del análisis llamado infinitesimal.*

*Étude sur les quantités mathématiques. Grandeurs. Dirigées. Quatérnions.*

*Paradojas matemáticas.*

*Sobre la posibilidad de una Lengua auxiliar internacional. Trabajos recientes para su adopción.*

*Carga de los vehículos relacionada con el ancho de las llantas.*

*Los axiomas geométricos. Enseñanza de la Geometría.*

*La théorie de Parallèles basée sur un postulat plus évident que ceux employés ordinairement.*

## EN PRENSA

*[T]ratado elemental de Aritmética.*

*[T]ratado elemental de Algebra.*

*[T]ratado elemental de Geometría del Espacio.*

# INDICE GENERAL DEL TOMO I





## PRIMERA PARTE

### PRINCIPIOS COMUNES CON LAS GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS

## SEGUNDA PARTE

### PRINCIPIOS ESPECIALES Á LA GEOMETRÍA EUCLÍDEA

#### LIBRO PRIMERO



#### LIBRO SEGUNDO

# ÍNDICE

DE LOS POSTULADOS, TEOREMAS, COROLARIOS, ESCOLIOS Y PÁRRAFOS DEL PRESENTE TOMO



## Postulados, teoremas, corolarios, escolios y problemas

Párrafos

# CORRESPONDENCIA

## DEL PRESENTE TEXTO CON EL PROGRAMA OFICIAL DE LOS COLEGIOS NACIONALES

---

NOTA. — La numeración arábiga indica el párrafo del libro que responde al respectivo punto del programa, y la numeración romana expresa el número de los teoremas relativos á cada punto del mismo.

### BOLILLA 1ª

#### PRELIMINARES

Espacio (7, 39, 40, 41, 45, 46, 48 á 59). — Extensión (11). — Dimensiones de una extensión (18 á 22, 28 y 29). — Cuerpo (8, 36). — Superficie (14, 15, 35). — Línea (16, 34). — Punto (17, 32, 33). — División de las líneas en rectas y curvas, quebradas y mixtas (60 á 75). — División análoga de las superficies (76 á 86). — Objeto y división de la Geometría (12, 13 y 94). — Cualidades de la extensión, posición, figura y magnitud (8, 9, 10 y 38). — Términos generales empleados en Geometría (1 á 6, 30 y 31). — Principales axiomas (postulados I á VII). — Signos (99, 107, 111, pág. 138 y 140). — Propiedades de la línea recta (60 á 73). — Problemas á ella referentes (71, 134, ejercicio 1).

### BOLILLA 2ª

#### LÍNEAS RECTAS EN DIFERENTES POSICIONES. ÁNGULOS

Definición y designación. Generación de los ángulos (95 á 105).

— Bisectriz (115). — Angulos adyacentes (116 á 118). — Angulo recto, agudo y obtuso (106 á 114). — Angulos complementarios y suplementarios (114, 115). — Angulos opuestos por el vértice (119, III). — Ejercicios y problemas (pág. 124, ejerc. 1 á 7).

## BOLILLA 3ª

### RECTAS PERPENDICULARES Y OBLICUAS

Por un punto dado no se puede trazar más que una sola perpendicular á una recta (VI y escolio, 163 y 164). — Propiedades de la perpendicular y oblicuas trazadas desde un punto á una recta (V, corol. II; VII, corol. II; escolio del mismo, XII). — Lugar geométrico (166 y 167, con corolario II del teorema V, escolio del corolario II del teor. VII y corol. II del teor. VI; corol. V del teor. VII). — Ejercicios (pág. 125 á 128).

### RECTAS PARALELAS

Definición y propiedades (72, pág. 131 á 140; XXX). — Secante y transversal: ángulos que forma con dos rectas paralelas y propiedades de estos ángulos (183 á 188; XXXV y XXXVI). — Propiedades de los ángulos que tienen sus lados paralelos y perpendiculares (XXXVII y XXXVIII). — Ejercicios (pág. 302 y 303, ejercicios 67 á 75).

## BOLILLA 4ª

### CIRCUNFERENCIA

Definiciones (120 á 133). — Propiedad de la circunferencia y de las rectas trazadas en el círculo (VII, corol. VI y VII; XVIII y XIX; XXX, corol. II). — Rectas secantes y tangentes á la circunferencia (XII, corol. I, II, III, IV). — Posiciones relativas de dos circunferencias, tangentes comunes y relación entre los radios y la distancia de los centros (171; XXI y XXII).

## BOLILLA 5ª

### MEDIDA DE LOS ÁNGULOS

Relación entre los ángulos y sus arcos correspondientes. Valuación de los ángulos en grados y sus divisiones (135 á 142, IV). — Medida del ángulo inscripto y del semi-inscripto (pág. 168 á 173). — Problemas gráficos relativos á los ángulos, perpendiculares, paralelas y á la circunferencia (143 á 145 ; problemas I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, X, IX$^{bis}$, X$^{bis}$; teor. L y corolario ; ejercicios 105 á 119 de las pág. 306 y 307).

## BOLILLA 6ª

### POLÍGONOS

Definiciones (146 á 150). — Denominación según el número de lados (146).

### TRIÁNGULOS

Propiedades (VII, con escolio y corol. I; VIII, XIII con corol. I y II ; XXX, corol. I ; XXXII). — Valor de la suma de sus ángulos (XXXIX y corol. I á V). — Su división en razón de sus ángulos (158). — Casos de igualdad de dos triángulos cualesquiera (V y XVII). — Igualdad de dos triángulos rectángulos (V, corol. I ; VI, corol. I; VII, corol. IV; VIII, corol. II). — División de los triángulos en razón de sus lados (153 á 161).—Base y altura (165).— Relación entre lados y ángulos opuestos de un triángulo (IX, X, XI, XV y XVI). — Problemas (pág. 125 á 128).

## BOLILLA 7ª

### CUADRILÁTEROS

Su división (189). — Valor de la suma de sus ángulos (XL, cor. I). — Propiedades del paralelogramo (XLII con escol. y corol. ; 190 ;

XLIII con corol. y escol.; XLIV y corol.). — Igualdad de dos paralelogramos (XLII, cor. II). — División de los paralelogramos en romboides, rombos, rectángulos y cuadrados (161, XLIII, corol.; XLII, corol. I; VII, corol. III, 189; XLVII; 191). — Problemas (ejercicios 23, 26, 39, 40, 41 y 91 á 104, pág. 304 y 305).

### BOLILLA 8ª

#### POLÍGONOS EN GENERAL

Valor de la suma de sus ángulos (XL). — Valor de un ángulo de un polígono regular cualquiera (XL, cor. II y escol.). — Suma de los ángulos externos (XLI). — Igualdad de dos polígonos (ejercicios 26 á 31, pág. 127). — Problemas (ejercicios 76 á 90, pág. 303 y 304).

## Extensión de las figuras planas

### BOLILLA 9ª

#### FIGURAS SEMEJANTES. — LÍNEAS PROPORCIONALES

Teoremas respectivos (pág. 182 á 201). — Triángulos semejantes, vértices y lados homólogos (216 y 217). — Semejanza entre un triángulo y el parcial que resulta cuando se traza una recta paralela á uno de los lados (LVII). — Casos de semejanza más importantes de dos triángulos (218, LVIII con corolarios). — Semejanza de los polígonos en general (LX, LXI). — Problemas (problemas XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX; ejercicios 120 á 142).

### BOLILLA 10ª

#### CONSECUENCIA DE LA SEMEJANZA DE LOS POLÍGONOS

Rectas divididas en partes recíprocamente proporcionales (LXVII, LXIX, 221). — Relación entre las bases homólogas y las alturas de dos triángulos semejantes (LXII). — Relaciones que se verifican trazando la perpendicular á la hipotenusa desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo (219 y 220; LXIII y cor.; XLV con cor.). — Teorema de Pitágoras (LXIV con escol. y corol.) — Enunciado del valor del cuadrado del lado opuesto á un ángulo obtuso y del opuesto á un ángulo agudo en un triángulo oblicuángulo: aplicación númerica (LXVI). — Razón de los perímetros de dos polígonos semejantes (LXII). — Problemas (225; problemas XIX, XX, XXI; ejercicios 143 á 159).

## BOLILLA 11ª

### POLÍGONOS REGULARES INSCRIPTOS Y CIRCUNSCRIPTOS Y RAZÓN DE LA CIRCUNFERENCIA AL DIÁMETRO

Teoremas relativos á la inscripción y circunscripción de polígonos regulares (179 y 180; XXXIV, 182; XLIX y corol.). — Problemas sobre esta misma cuestión (problema XXIII). — Valor del lado del cuadrado, del exágono y del triángulo inscripto en función del radio (LXXI, LXXII, LXXIII). — Razón de la circunferencia al diámetro (229 y 230, LXXV; 231, LXXVI con cor.; 233 á 239). — Valor numérico de $\pi$ (240 á 242, 247, 250; aplicaciones; ejercicios 160 á 188).

## BOLILLA 12ª

### ÁREA DE LAS FIGURAS PLANAS (pág. 251 á 280)

Equivalencia de dos paralelogramos y de un triángulo con la mitad de un paralelogramo de igual base y altura (LXXVII, cor. I; 267). — Area del rectángulo (258, 259; LXXVI con corol. y escol.), del cuadrado (260 á 265), de un paralelogramo cualquiera (266, LXXVII y corol.), del triángulo (267 y 268, LXXIII con corolarios, aplic. y escolios), del trapecio (270, LXXX con corol. y aplicaciones), de un polígono regular (271, LXXXI y aplicaciones, pág. 266), del círculo (275, 276; LXXXIII y aplicaciones, pág. 273), de un polígono irregular (274; ejercicios 189 á 219).

COMPARACION DE LAS ÁREAS (pág. 280 al final)

Razón de las áreas de dos triángulos semejantes y de dos polígonos semejantes (LXXXV y LXXXVI).

Razón de las áreas de dos círculos de diferentes radios (LXXXVII).— Ejercicios numéricos y problemas (pág. 283, 284, problema XXV, ejercicios 220 á 231).

# PREFACIO

Durante el siglo próximo pasado, los fundamentos de la Geometría han sido motivo de grandes é importantísimos estudios (1). Estos han abierto nuevos horizontes, suministrado métodos generales y fecundos así como útiles datos relativos á la enseñanza de esa asignatura.

¿Qué efecto han tenido estos hechos sobre los textos que se encuentran actualmente en manos de los alumnos que cursan los estudios secundarios en nuestro país? Absolutamente ninguno, cuesta decirlo. La mayoría de los autores se han limitado á seguir los métodos antiguos á menudo reñidos con la sana lógica, buscando amoldar sus textos á los programas oficiales redactados más de una vez por personas profanas en la materia. Han cometido así tal herejía, que algunos de esos textos constituyen un verdadero peligro en la enseñanza de una ciencia destinada más que ninguna

(1) Recientemente, la *Academie des Sciences de Paris* acaba de discernir el premio *Poncelet* al matemático D. HILBERT por sus valiosos trabajos sobre los principios de la Geometría.

otra á acostumbrar el espíritu á un raciocinio riguroso.

Antes de Legendre, el texto de Euclides fué el único que sirvió para la enseñanza de la Geometría. Aquel matemático intentó por primera vez una reforma y sus *Elementos de Geometría* tuvieron durante mucho tiempo una influencia considerable; pero si corrigió algunos defectos del texto de Euclides, alteró la belleza del método griego por la introducción de procedimientos de demostración aritméticos, siendo vivamente combatidos por autores de la talla de Hoüel y Duhamel.

Los estudios modernos citados más arriba, al mismo tiempo que han establecido de una manera indiscutible la necesidad de una reforma en la enseñanza secundaria de la Geometría Racional, inspirada en el rigor y en métodos compatibles con las exigencias didácticas, han establecido también que la elegancia del método de Euclides debe, en lo posible, imitarse.

Por eso es que mientras nuestros textos de enseñanza están aún imbuídos de los errores del método de Legendre ampliados por otras incorrecciones introducidas por el prurito de seguir los programas y de creer que puede alterarse el orden de los teoremas con la misma facilidad que los capítulos de un texto de geografía, mientras aquí se delira á destajo, en éste como en otros asuntos, en países más adelantados bajo ese punto de vista, el método de Legendre se elimina poco á poco, volviendo al método rigurosamente geométrico de Euclides, para lo cual matemáticos ilustres como Betti y Brioschi en Italia, Hoüel en Francia, Casey y otros en Inglaterra, etc., no titubean en traducir el texto del geómetra griego y trabajar por hacerlo adoptar oficialmente. Este primer paso conseguido, otros autores insignes empiezan á introducir las reformas basadas en el rigorismo de los principios y de los métodos modernos. A ese respecto el profesor de la Universidad de Padua G. Veronese dice en su Memoria leída en el último Congreso internacional de matemáticas tenido en París del 6 al 12 de agosto de 1900: «Conciliar las exigencias de la ciencia, las de la enseñanza y también las de la inteligencia media de los alumnos, tal es el objeto que debe proponerse el autor de un nuevo tratado de Geometría Elemental. Es necesario de una vez, que los profesores tengan fe en el progreso de la ciencia y que se desprendan de los prejuicios...»

Esto que sucede en Geometría sucede también, aunque en menor escala, en Álgebra; por eso, habiéndome manifestado los señores Coni Hnos el deseo de editar una colección de textos de matemáticas respondiendo á los adelantos modernos y solicitado mi cooperación para llevar á cabo tal propósito, resolví, no obstante mi poco deseo de escribir textos de enseñanza, — relativamente á los cuales tanto se ha abusado entre nosotros, — aceptar el pedido hecho por la casa editora citada, considerando esta aceptación como un sacrificio impuesto por las necesidades actuales de la educación.

Paso ahora á indicar cómo he llenado este cometido en el volumen que sale hoy á luz.

Sin introducir en los textos reformas del calibre de las efectuadas por Veronese en su *Elementi di Geometrie* (1) ni mucho menos pretender enseñar los fundamentos de esa ciencia como lo hace Hilbert (2) ú otros

(1) Verona, 1900, 2ª edición, Fratelli Drucker.

(2) *Les principes fondamentaux de la Geometrie* par Da-

autores que sobre este punto han hecho importantes estudios, he tratado de conciliar en lo posible el sistema actual de enseñanza con los grandes adelantos modernos, siguiendo un orden rigurosamente lógico, de manera á no producir una revolución tan completa en la enseñanza como lo haría el texto citado más arriba; revolución que por falta general de preparación no nos sería posible, por ahora, resistir. No me he preocupado de los programas vigentes, sólo he cuidado á ese respecto que en el texto esté todo lo que sea lícito exigir en la enseñanza secundaria. El desvarío bajo ese punto de vista ha llegado entre nosotros hasta el extremo de que se enseñe la Geometría Racional en el primer año de estudios secundarios, es decir, á alumnos incapaces, en general, por su edad y por no haberse aún adaptado á la disciplina de los colegios nacionales, de efectuar raciocinios tan dificultosos como lo es el geométrico. En el primer año de estudio sólo es lícito enseñar dibujo geométrico y adoptarse textos como los que acaban recientemente de publicar, por ejemplo, los profesores ingleses Barnard y Child (1) ó Morris y Husband (2), pero para ello se necesitaría organizar de otra manera los planes de estudios y disponer de mayor tiempo para la enseñanza de las matemáticas. Figurando la Geometría Plana á veces en el primer año de estudio, á veces en el segundo y á veces

VID HILBERT, traduction L. Laugel, París, 1900; Gauthier-Villars.

(1) *A new Geometry for Schools*, London, 1903, Mac Millan and C°.

(2) *Practical Plane and Solid Geometry*, Londres, 1903, Longmans Green and C°.

en el tercero, con programas variados, no es extraño que los autores de textos tengan oportunidad de cambiar éstos, so pretexto de amoldarlos al programa, aunque para ello deban sacrificar los métodos rigurosamente lógicos. Para subsanar este inconveniente, he escrito este texto, según dije, despreocupándome por completo de los programas. He procurado colocar cada cosa, llámese teorema, definición, corolario, escolio ó problema, en el sitio que le corresponde en base á un método lógico y no á la fantasía del autor de los programas; no perdiendo nunca de vista las exigencias didácticas. En caracteres menores está impreso todo aquello que puede, sin inconveniente, suprimirse si escasea el tiempo ó si el desarrollo mental de los alumnos no está bastante adelantado. Como los programas no pueden imponer métodos á los profesores, es evidente que si el texto contiene, como éste, todo lo que es lícito exigirse en la instrucción secundaria, dicho texto es adaptable á cualquier programa, bastando al efecto, como se hará, agregar una tabla indicando cuales son los números y teoremas ó derivados del texto que responden á cada pregunta del programa vigente.

Indicado lo anterior, vamos á señalar las otras principales innovaciones introducidas en este texto.

He cuidado especialmente lo relativo á los postulados fundamentales, el estudio de los cuales ha sido precisamente el punto de partida de los importantes trabajos mencionados en el primer párrafo de este prefacio, trabajos iniciados cuando después de tantos siglos de infructuosos ensayos para demostrar el postulado de Euclides, los geómetras Lobatchevsky, Bolyai y otros, hicieron ver la independencia de este axioma geométrico, es decir, la imposibilidad de deducirlo de los restantes.

Ha separado por esa circunstancia, las proposiciones independientes de este postulado y que constituyen la llamada *Geometría General*, de los que dependen especialmente de ese axioma y que están por consiguiente subordinados á su exactitud. Esta reforma es hoy muy conveniente dada la importancia que ha adquirido el postulado en cuestión y la incorrección que reina al respecto en la mayoría de los textos, en los que se demuestran muchas proposiciones independientes del postulado de Euclides basándose en él. En cuanto á los demás postulados, los he enunciado expresamente en vez de dejarlos sobreentendidos como se suele hacer. Si estas omisiones eran antiguamente explicables, hoy día ya no lo son después de los estudios á que últimamente han sido sometidos los fundamentos de la Geometría. Veronese, en la memoria citada más arriba, dice á ese respecto :

« Lo que importa antes que nada en la enseñanza elemental, es la exactitud en el raciocinio; por eso es menester que todos los postulados necesarios, estén explícitamente enunciados y que no se use jamás en las demostraciones, proposiciones no admitidas. Tal observación puede hacerse á Euclides y Legendre, quienes, no obstante haber enunciado esplícitamente sus postulados, hacen demostraciones basadas en nuevos postulados no enunciados... Así, Euclides, sin haber admitido que la línea recta es abierta, demuestra que un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cada uno de los interiores no adyacentes, usando al efecto una demostración que supone tácitamente un axioma nuevo.»

Sobre este particular me he limitado en expresar los axiomas llamados *prácticos*, es decir, necesarios para las aplicaciones de la Geometría; al efecto, partiendo de la base de nuestro espacio actual, enuncio las propiedades fundamentales que la experiencia, ayudada por la inducción y la imaginación, nos autoriza á establecer.

En los trabajos de Veronese y de Hilbert citados, se consideran también los axiomas *necesarios*, es decir, considerados como tales para el desarrollo lógico de la Geometría, independientemente de su aplicabilidad; pero, según ya dijimos, sería demasiado reforma para la enseñanza secundaria de esa ciencia. En un tratado elemental sólo conviene enunciar postulados relacionados con figuras que puedan observarse. Por esa razón, el postulado de las paralelas no debe ser enunciado como se hace ordinariamente, basándose en la observación de rectas que por más que se prolonguen no pueden encontrarse, pues tales rectas, en lo relativo á dicha propiedad, nadie las ha podido observar. Lo he sustituido por el axioma: *Si dos rectas se acercan de un lado, se alejan del otro*, pues este enunciado puede considerarse como consecuencia de una observación hecha con dos líneas cualesquiera en un campo de observación también cualquiera. La variación á introducir en la teoría de las paralelas en base á ese postulado es insignificante; es cierto que dicha teoría se vuelve ligeramente más larga, pero este pequeño aumento queda ampliamente compensado con lo que se gana en evidencia (1); por otra parte,

(1) Véase mi artículo *La Théorie des Parallèles basée sur un postulat plus evident que ceux employés ordinairement*, publicado en la revista *L'Enseignement Mathématique*, nº 1, año VI, París, 1904, y en los *Anales de la Sociedad Científica Argentina*.

los que quieran seguir el antiguo sistema tienen en nota, páginas 136 y 137, la parte de él que no está en el texto.

Otra cuestión muy importante es la relativa á la definición de figuras iguales. Ordinariamente se definen las figuras iguales diciendo que son aquellas que se confundirían si pudieran llevarse la una sobre la otra. Ahora bien, esta definición supone admitido el axioma de la libre movilidad, aun cuando esta suposición sea tácita. Precisamente, los estudios modernos han demostrado que la Geometría Teórica puede desarrollarse independientemente de todo concepto físico y mecánico, y que el postulado recién citado entra únicamente en la categoría de los medios de control, es decir, de los principios necesarios para poder *prácticamente* construir figuras iguales y especular con la Geometría, pero que en manera alguna es necesario para la construcción geométrica abstracta de las figuras, es decir, para la concepción de *figuras iguales*, independientemente de toda especulación.

El autor citado más arriba, observa que una vez abstraída la intuición del movimiento, el postulado en cuestión no significa otra cosa sino la existencia en el espacio de sistemas continuos de figuras iguales á una figura dada, sin que se haya definido ni las figuras iguales ni los sistemes continuos de figuras, de suerte que cuando se emplea ó se sobreentiende en seguida ese postulado para definir la igualdad de las figuras, esta definición de igualdad encierra lógicamente una petición de principio (1).

(1) *Compte-Rendu du Deuxième Congrés International des Mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 Août 1903*, pág. 442, París, 1902, Gauthier-Villars.

El concepto de igualdad de dos figuras es una noción primera independiente de la de movimiento. Como noción simple y fundamental no puede definirse. De la homogeneidad del espacio concebimos inmediatamente que, dada una figura en una parte cualquiera de él puede trazarse una igual en otra parte del mismo sin que á esta concepción venga necesariamente unido el concepto de movimiento de una figura hacia la otra.

Mas aún, la definición de figuras iguales basada en la superposición de las mismas restringe el concepto general de las formas iguales al caso de la congruencia. Legendre fué el primero que distinguió la igualdad por simetría y la igualdad por congruencia; dos figuras iguales en el concepto primo que de ellas se tienen no reclaman necesariamente el que puedan superponerse; la superposición es indudablemente un *criterio de igualdad* (llamado por congruencia) pero este criterio no es el único capaz de acusar la igualdad, pues en él entra otro concepto, el de *sentido* de las figuras en el espacio que los contiene, concepto extraño á las figuras tomadas en sí mismas.

Dos segmentos simétricos tomados sobre una recta son iguales y sin embargo no son superponibles mientras no se saque uno de ellos de dicha recta y se le dé vuelta en un espacio á dos dimensiones; igualmente, las dos mitades en que queda dividido un triángulo isósceles por la bisectriz en su vértice, no son superponibles mientras no se saque una de ellas del plano y se le dé vuelta en un espacio á tres dimensiones, y sin embargo á nadie se le ocurre de que no deberían considerarse como iguales si esta superposición no pudiera hacerse por no disponerse de dicho espacio á tres dimensiones para efectuar la rotación.

Análogamente, dos triedros opuestos por el vértice no son superponibles en un espacio á tres dimensiones pero lo serían en uno de cuatro si dispusiéramos de éste, etc. Por eso, en nuestro texto, hemos establecido la igualdad de las figuras independientemente del movimiento de las mismas, y luego, en base al postulado de la libre movilidad, hemos indicado los dos criterios prácticos para comprobar tal igualdad, uno por *superposición ó congruencia*, otro por *simetría*.

Laisant, en un interesante estudio titulado *La Mathématique, Philosophie, Enseignement*, dice relativamente al mismo asunto:

« Se definen las figuras iguales, dos triángulos por ejemplo, diciendo que son aquellas que pueden superponerse. Pero esta superposición puede hacerse de dos maneras: por *resbalamiento* en el plano, ó con la obligación suplementaria de *dar vuelta* una de las dos figuras. Habría, pues, que distinguir la *igualdad directa* (por congruencia) y la *igualdad simétrica*. La diferencia filosófica es capital, puesto que no se llega á la superposición sino saliendo del espacio á dos dimensiones que se estudia. Da lugar á una consecuencia interesante (pues es la base de la simetría) que debe estudiarse cuanto antes. Y cuando se llegue á la Geometría del Espacio y se examine dos triedros simétricos por ejemplo, se tendrá la explicación de ese fenómeno, raro para los principiantes, de figuras iguales en todas sus partes pero no superponibles. La analogía con el plano es manifiesta. Para superponer las figuras sería necesario sacar una de ellas del espacio real en donde nos encontramos y darla vuelta, lo que no puede realizarse. Pero el resultado puede ser obtenido por una representación material, física, absolutamente expresiva; el *re-*

*tournement* á la manera de un guante ó de un bonete. »

Naturalmente, en la enseñanza todos estos postulados fundamentales, deben ser explicados aprovechando la intuición especial que existe en los alumnos, usando figuras en la pizarra ó modelos apropiados.

Relativamente á las definiciones, he procurado que sean lo más precisas posible y que la posibilidad de la existencia del objeto definido esté ya demostrado, evitando así la incorrección en que caen muchos autores que definen una cosa sin antes haber probado que ésta es realizable.

Al tratar de los entes geométricos, introduzco (parte impresa en caracteres menores) la noción moderna de átomo, cuidando de no caer en el vicio tan común de definir estos conceptos fundamentales con otros más complicados ó con frases huecas.

La definición usual de línea recta introducida por Legendre y adoptada por los autores que siguen su método, es reemplazada por la que se indica en el postulado correspondiente. A ese respecto, cabe recordar lo que dice Laisant en su obra ya citada :

« La célebre definición de línea recta: *es el camino más corto de un punto á otro,* definición por otra parte abandonada hoy casi por unanimidad, representa uno de los más notables ejemplos de la persistencia con que un absurdo puede propagarse durante siglos. En primer lugar, la idea expresada es incomprensible para los principiantes, puesto que presupone la noción de una longitud curva; además es un círculo vicioso, pues la longitud de una curva no puede comprenderse sino como límite de sumas de longitudes rectilíneas; finalmente, no es una definición, sino que, al contrario, es una proposición demostrable. »

Mucho cuidado he tenido también en la precisión del lenguaje usado en los enunciados de los teoremas; éstos resultan así muchas veces algo más largos que los que se encuentran usualmente en los textos, pero es un aumento necesario. Así, cuido de no confundir las rectas con segmentos de ellas, los números con las cantidades, etc.

En la definición del concepto de *ángulo* he dado á éste un rigor y una precisión que tampoco existe en la mayoría de los textos usuales, los cuales lo definen á menudo de una manera disparatada ó cometiendo una tautología (1).

Tocante á la nomenclatura he introducido un buen número de vocablos modernos como *coplanar*, *colineal*, *concíclico*, *circuncentro*, *rayo*, etc., destinados á simplificar el lenguaje y á dar más precisión.

He seguido la antigua división en Geometría Plana y Geometría del Espacio por no chocar demasiado con las costumbres adquiridas, aunque es general la tendencia actual de los grandes autores á enseñarlas juntas. Las razones en que se funda esta tendencia están expues as por el profesor E. Perrín, en su artículo: *Le méthode de M. Meray pour l'enseignement de la Geometrie* (2).

Algunas de estas ventajas serán mencionadas en el prefacio del tomo relativo á la Geometría del Espacio.

Otro error muy frecuente, es enseñar nociones de topografía y de agrimensura conjuntamente con la Geometría Plana, siendo así que estas nociones, al darse,

(1) Véase nuestra conferencia relativa á la enseñanza de la Geometría leida en el Colegio Nacional Oeste el 21 de junio de 1903.

(2) *L'enseignement Mathématique*, nº 6, año V, 1903, París.

deben dejarse para la Geometría del Espacio toda vez que los jalones y ejes de teodolitos, plomadas, etc., deben ser perpendiculares al plano horizontal, lo que exige conocimientos de Geometría del Espacio. Hemos dejado, por eso, tales nociones para el tomo II.

He dicho más arriba, que he desarrollado la materia colocando cada proposición en el sitio que lógicamente le corresponde, en la serie deductora de consecuencias.

La división general está basada en cuestiones fundamentales, como ser: dependencia ó no del postulado de las paralelas etc., y no en cuestiones de detalle como ser la clase de figura, triángulo, circunferencia, etc.

La teoría de la circunferencia es, en gran parte, una repetición de la de los triángulos, de modo que, lógicamente, deben estudiarse juntas, indicando después de cada proposición relativa á los triángulos sus consecuencias en la circunferencia. Esta alteración del sistema antiguo producirá seguramente más de una desorientación á los señores profesores, pero no puede sino ser benéfica á los alumnos, quienes estudiando simultáneamente un teorema, con todos los corolarios, aplicaciones, problemas, etc., basados sobre él, deberán necesariamente dominar mejor aquél y recordarlo con menor esfuerzo de memoria.

Al final de cada Parte, están agrupadas por clase de cuestión: triángulos, teoría de las perpendiculares y oblicuas, circunferencia, ángulos, etc., todas las propiedades halladas en dicha Parte; el alumno hará un útil ejercicio de repaso al esforzarse en repetir de memoria esas propiedades en la nueva agrupación, tratando luego de recordar su demostración.

En la enseñanza de la Geometría elemental, conviene que el profesor insista con empeño sobre los conceptos y proposiciones fundamentales y los aplique á la demostración de teoremas simples y á la resolución de problemas fáciles, de uso más frecuente. A ese respecto, al final de cada Parte, he agregado una colección de ejercicios selectos que deben hacerse resolver en los repasos, cuando ya el alumno conozca en su conjunto la Parte en cuestión.

Es conocida la variabilidad de los programas y de los textos de enseñanza entre nosotros, este texto contiene, según dijimos, todo lo que es lícito exigir en la enseñanza secundaria de la Geometría, y si en algunos casos parecerá extenso, el caudal de cuestiones que contiene, tarde ó temprano podrá ser útil á los alumnos. Por otra parte, eliminando la parte impresa en caracteres pequeños, la parte restante constituye un conjunto armónico, bien ligado y de poca longitud.

He dicho anteriormente que he escrito esta obra accediendo á un pedido expreso de la casa editora Coni hermanos, y en el deseo de dotar á los alumnos y profesores de un texto en armonía con los adelantos modernos de la ciencia ; al efecto, he tenido que efectuar un trabajo por cierto bastante laborioso y que como todas las cosas humanas es susceptible de mejorar ; por otra parte, y no obstante el cuidado que sobre ese particular han tenido, tanto la casa editora como el autor, la escasez de tiempo puede ser causa de que se haya, quizá, deslizado alguna incorrección. Dados los móviles que han presidido la confección de esta obra, no dudamos que los señores profesores tendrán á bien indicarnos las incorrecciones que puedan notar, así como hacernos conocer las observaciones que crean del caso, de todo lo cual quedará agradecido

El Autor.