BEPPO LEVI

MINISTERIO DE JUSTICIA E INSTRUCCION PUBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
FISICO-QUIMICAS Y NATURALES
APLICADAS A LA INDUSTRIA
INSTITUTO DE MATEMATICA
AVENIDA PELLEGRINI 250
ROSARIO

Rosario, 17 de diciembre de 1946.

Dr Mario Bunge
Florida

Apreciado Doctor:

Con mucho placer, pero solo ayer, recibí su atta carta fecha 9 del corriente.

Conozco muy poco de fisica de matrices, y, en particular no conozco el argumento de que Ud me habla. Sin embargo haré lo posible para contestarle algo como matematico.

1º- Observo en primer lugar que la diferencia que Ud señala entre los casos de J_ν^2 y $J_\mu J_\nu$ no puede estar; en efecto la unica diferencia esencial entre los dos casos es que en el primero la funcion por integrar es siempre positiva mientras no lo es siempre en el segundo. Lo unico que se puede luego presumir es que si la primera integral es convergente lo es tambien la segunda (no necesariamente lo inverso).

2º- Debo declararle no entender la relacion (1), como Ud la escribe. En efecto la igualdad puede tener sentido sólo si - como está escrito - el paso al limite se hace despues de la segunda integracion, porque en caso contrario la integral sería sin más 0. La integracion sobre un intervalo $k_1 - k_2$ tiene por efecto de introducir un factor r en el denominador y, por lo tanto de aumentar la convergencia; sin embargo, me parece que, por $k_1 \neq k_2$, la integral sigue siendo divergente. Si no lo es, tendrá un limite determinato y no se puede hablar de normalizacion imponiendo a este limite el valor 1.

Probablemente una interpretacion mejor voy a proponerle más adelante.

3º Para entrar en la esencia del calculo me parece bastar la observacion siguiente: es sabido que, para grandes valores de x, una primera aproximacion de J_ν es

$$J_\nu \sim C\cos(x - \lambda) : \sqrt{x}$$

con

$$C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad \lambda = \frac{1}{2}\pi\left(\nu + \frac{1}{2}\right);$$

en segunda aproximacion aparecen terminos con $x\sqrt{x}$ en el denominador. Limitandonos en un primer tiempo(1) a la primera aproximacion, podemos decir que la convergencia ó divergencia de una integral conteniendo J_ν^2 se determina come sigue: sustituimos

$$J_\nu^2 = C^2\cos^2(x - \lambda) : x = C^2\,\frac{1 + \cos 2(x - \lambda)}{2x}$$

Si por x ponemos kr e integramos respecto dk obtenemos como primer termino

$$\frac{C^2}{2r}\log k$$

y poniendo extremos de integracion $\frac{C^2}{2r}\log k_2 : k_1$. Multiplicando ~~por~~ por $r^2 dr$ resulta (si se tiene tambien en cuenta el valor de C).

$$\log\frac{k_2}{k_1}\,\frac{r\,dr}{\pi}$$

cuya integral en intervalo infinito es evidentemente ∞.

Aplicando las mismas operaciones al segundo termino de la primera aproximacion se obtiene (despreciando per brevedad los factores constantes)

$$\int_{k_1}^{k_2}\frac{\cos 2(kr - \lambda)}{kr}\,dk = \frac{1}{r}\int_{k_1 r}^{k_2 r}\frac{\cos 2(x - \lambda)}{x}\,dx$$

(1) Como Ud notará he escrito un poco in promptu por lo que hay en las premisas un poco más de incertitumbre que en las conclusiones. En particular digo aquí "en primer tiempo", el desarrollo lleva a no considerar el segundo tiempo de 'no es que este produciría una contribución nula'.

esta integral se desarrolla todavia en serie de senos y cosenos y potencias de $\frac{1}{x}$, dando como primer termino

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\operatorname{sen} 2(x-\lambda)}{x}\right]_{k_1 r}^{k_2 r} = \frac{1}{2k_1k_2r}\left[k_1 \operatorname{sen} 2(k_2 r-\lambda) - k_2 \operatorname{sen} 2(k_1 r-\lambda)\right]$$

Sustituyendo en la integral (1) (de Ud) se obtiene el termino

$$\frac{1}{2k_1k_2}\int_0^\infty \left(k_1 \operatorname{sen} 2(k_2 r-\lambda) - k_2 \operatorname{sen} 2(k_1 r-\lambda)\right)dr$$

que para $k_1 \to k_2$ tiende sin más a 0.

El resultado de este analisis es lo siguiente:
El artificio (1) no es suficiente para conseguir la convergencia; pero, si, antes de formar la integral entre 0 y ∞, se formara la integral entre 0 y R y se dividiera por

$$\frac{1}{\pi}\int_0^R r dr,$$

pasando luego al limite por $R \to \infty$, $k_1 \to k_2$ (lo que parece una justa interpretacion de lo que Ud indica como normalizacion), se obtendria el resultado de dar el valor 1 a los terminos de la diagonal principal de su matriz; y se podrian calcular en modo analogo los terminos que corrsponden a dos funciones de Bessel de indice diferente.

El calculo no presenta ninguna dificultad imitando el procedimiento que le he indicado en las lineas precedentes; una prevision que hago con un rapido calculo mental y por tanto sin garantia haria resultar todavia como limite ± 1 segun es par o impar la diferencia $\mu - \nu$.

Le observo sin embargo que esta forma de normalizacion se podria aplicar directamente a las integrales originarias, sin pasar por el artificio de la integracion respecto k. La razon por la cual yo me abstengo un poco, como le decia, de la fisica de las matrices es precisamente la arbitrariedad por la cual ~~cada~~ se admite que cada uno pueda ingeniarse para hacer resultar lo que espontaneamente no resulta. En el caso especial, el procedimiento se reduciria a adoptar un "modulo de probabilidad" que por accidente se presenta como un numero tendiendo a ∞, lo que, al final me parece aceptable y no tan malo. De todo modo juzgue Ud y si la conversacion puede haberle servido de algo estaré muy satisfecho.

Lo saludo atte

X

Para $\int J_\nu^2 r^2 dr$, pero yo necesito

$\int J_\nu^2 r dr$, que con este proced. es ± 0.

Además, ¿qué sentido tiene div. por $\int_0^R r dr$, y no por $\int_0^R r^2 dr$?

Reproducir cálculo Weyl para $-\frac{A+B}{x \cdot x} R_2(a,k)$.